现代数学译丛 21

欧拉图与相关专题

〔英〕Herbert Fleischner 著
孙志人 李 皓 刘桂真 刘振宏 束金龙 译
张 昭 黄晓晖 审校

科 学 出 版 社

现代数学译丛　21

欧拉图与相关专题

Eulerian Graphs and Related Topics

〔英〕Herbert Fleischner　著

孙志人　李　皓　刘桂真　刘振宏　束金龙　译

张　昭　黄晓晖　审校

科学出版社

北

图字：01-2012-1839 号

内 容 简 介

本书是迄今为止唯一的一本全面阐述欧拉图理论的主要研究成果和研究方法及其与其他图论问题之间的联系的专著．本书包含两卷共十章． 第一卷从欧拉的哥尼斯堡七桥问题开始，由浅入深地介绍了欧拉问题的起源，给出图的基本概念和预备知识，然后相继地介绍了无向图、有向图以及混合图中欧拉迹的结构性定理，欧拉迹的若干推广，各种类型的欧拉迹，欧拉迹的变换．在第二卷中，详尽地介绍了著名的中国邮递员问题，欧拉迹的计数问题，最后讨论了与欧拉问题相关的算法和计算复杂性．每章后面配有习题，帮助读者理解和掌握本章的主要内容.

本书适合从事图论研究的研究生和科研工作者使用，也是其他数学和计算机科学研究人员很好的参考书.

This edition of *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Volume 1* by *Herbert Fleischner* is published by arrangement with *ELSEVIER BV of Radarweg 29, 1043 NX Amsterdam, Netherlands*
This edition of *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Volume 2* by *Herbert Fleischner* is published by arrangement with *ELSEVIER BV of Radarweg 29, 1043 NX Amsterdam, Netherlands*

图书在版编目(CIP)数据

欧拉图与相关专题/(英)费莱施纳(Fleischner, H.)著；孙志人等译. —北京：科学出版社, 2012
（现代数学译丛；21）
ISBN 978-7-03-033878-5
Ⅰ.①欧… Ⅱ.①弗… ②孙… Ⅲ. ①图论-研究 Ⅳ.①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 051063 号

责任编辑：王丽平　房　阳／责任校对：宋玲玲
责任印制：钱玉芬／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012 年 4 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2012 年 4 月第一次印刷　印张：31 1/2
字数：611 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言 一[①]

自从我开始撰写博士论文起，图论中的哈密顿问题和欧拉问题就成为我的研究主题. 1975 年以前，我一直偏重于哈密顿图的研究；但在此后，欧拉图及其相关问题就逐渐成为我的工作中心. 把研究重点由哈密顿图转移到欧拉图开始于 1975 年，那年夏天，蒙特利尔大学的撒比达斯 (Sabidussi) 给我提出一个问题. 当时我在蒙特利尔大学与他合作研究. 我们都没有预料到他提出的这个问题 (下文称为撒比达斯猜想) 的研究会有相当广阔的应用空间.

在 1976~1977 学年，我证明了撒比达斯猜想的一个推广对欧拉平面图成立 (下文称为相容性结果). 从 1979 年起，我和我的合作者杰克逊 (Jackson)、中国邮递员问题的提出者管梅谷，最近还有弗兰克 (Frank)，发现了欧拉图在平图理论中的一系列应用. 这些发现的过程显示出，在各种各样的证明中，使用相容性结果可以避开使用四色定理 (假定四色猜想成立)[②].

不幸的是，对于非平图的情形，还没有简单的、类似的相容性结果. 但是最近在与杰克逊的合作中，我们提出了一个猜想，这个猜想的一个特殊情况等价于圈双覆盖猜想. 由于以上原因，我在本书的第二部分主要讨论撒比达斯猜想和它的推广、它在平图情况下的解 (这些猜想和结果的总体统称为相容性问题) 以及它的应用和相关问题.

1977~1978 学年被美国田纳西州 (Tennessee) 孟菲斯 (Memphis) 州立大学 (MSU) 数学系定为图论年. 那年秋天，在弗奥得瑞 (R.Faudree) 和善尔普 (R.Schelp) 的邀请下，我去那里工作了一个学期，开了一门课程，讲授欧拉图理论，每周三课时. 这段时间，我熟悉了科特齐格 (A.Kotzig) 在这一领域的工作，并且除相容性问题外，我研究了欧拉迹的一个特殊类型，这一工作由我的第一个博士生瑞格纳 (S.Regner) 进行了推广. 在准备资料的过程中，我第一次意识到：作为专题的欧拉图理论，不单纯是结果的累积. 我开始倾向于欧拉图理论的研究. 因此，当我在 1979 年的 Oberwolfach 图论会议上从奔尼克 (Beineke) 和威尔逊 (Wilson) 那里得知他们正在筹备《图论专题精选 2》([BEIN83a]) 时，我就问他们是否对欧拉图的综述文章感兴趣. 当时他们对这个课题是否有足够的材料表示怀疑，但是还是同意让我尝试为

---

① 原书 Part 1, Volume 1 (第 1~7 章) 的前言.

② 这要作个说明：阿佩尔–海肯 (Appel-Haken) 的四色猜想的证明是否正确我还不能确定，我希望看到这个猜想的不依靠计算机的证明 (哪位图论学家不希望如此？)，或者至少可以看到不同的研究集体采用阿佩尔–海肯的思路，提供更多的计算机支持的证明 (但是谁有这样多的时间和资金呢？).

[BEIN83a] 写一篇文章. 在准备这篇文章时，我吃惊地发现，在欧拉图及其相关专题的领域中已积累了如此多的素材. 到 1980 年，综述文章“欧拉图”的第一稿已完成. [BEIN83a] 的编辑对第一稿评审后，认为应该再写个扩充版，然后由编辑进行压缩. 这个扩充版有 90 页长，其中 124 篇参考文献就占去了 10 页.

这 90 页的稿子寄给 [BEIN83a] 的编辑后，我想到：既然这方面的资料如此之多，那么写一本比这个稿子长 4~5 倍的书应该是可行的. 在进一步查阅了 80 年代前半期的文献后，本书诞生了. 本书的结构部分地采纳了我在 [BEIN83a] 中“欧拉图”一文的结构 (增加了几章，而其他章节也增加了重要内容).

在本书最后资料的整理及打印过程中，文格尔 (M.Wenger) 夫人给予了很大的帮助，她使我节省了打印、复印以及编写目录的数百个小时. 文格尔 (Erich Wenger) 先生为我绘制了大部分的图. 他早期的认证论文 (他的中学教师资格认定的一部分) 中的某些材料被搜集在本书中 (即中国邮递员问题和爱米色–莱维茨基定理 (Theorem of Amitsur and Levitzki)). 他的兄弟 (Emanuel Wenger) 如同技术组织者一样提供了无偿的服务；作为我的学生，他熟悉我的大部分研究工作，对本书稿提出了许多有价值的建议. 我以前的另外两个学生姆醉克 (M.Music) 夫人和盖格斯 (J.Galambfalvy de Geges) 先生，分别完成了任意可迹图和欧拉图中的计数论文 (与文格尔的文章一样被摘取在本书里). 我的同事迪米特洛夫 (L.Dinitrov) 先生和陶乐 (R.Thaller) 先生帮助我做索引和校对部分手稿.

我的许多同事，特别是那些与我做过合作研究的同事，直接或间接地对本书做出了贡献：他们提供了宝贵的建议和评论, 提供了自己的写作经验, 为我介绍素材并提供说明, 给我精神上的支持, 并寄给我与本书有关的文章和辅助材料. 以下按字母顺序列出对我的工作起了关键作用的人们的名字：本尼克 (Lowell Beineke)、邦迪 (Adrian J.Bondy)、弗兰克 (András Frank)、杰克逊 (Bill Jackson)、耶格 (Francois Jaeger)、利特尔 (Charles H.C.Little)、纳什–威廉姆斯 (Crispin St.J.A.Nash-Williams)、普卢默 (Mike D.Plummer)、撒比达斯 (Gert Sabidussi)(他引起我对弗瑞 (Franz Bernhard Frey) 所作的欧拉肖像的注意) 以及威尔逊 (Robin Wilson). 在此对他们及所有关心我的人表示衷心的感谢. 我希望本书能恰到好处地体现出他们的帮助.

最后，我还要感谢利特尔 (Peter Lillie) 先生 (生活在维也纳的英国公民)，他在本书的文字方面帮我进行了把关. 如果在这方面还有什么缺陷，那就完全属于我的失误了.

前 言 二[①]

本卷为《欧拉图与相关专题》第一部分的第二卷，在某种程度上依赖于第一卷的结果. 作者和编辑都决定把第一部分分成两卷，因为原稿超过了 600 页. 这种划分让人能够在第二卷中放入一个附录，包含了对第一卷的勘误，而且参考文献也更精确了 (在第一卷出版时，有些文献还未正式发表). 第一部分的两卷包含的主题为欧拉迹和覆盖迹.

除了在第一卷中提到的对完成本书作出了贡献的人外，我还想感谢 P.A. Catlin，C.J. Colbourn，I. Nishizeki (这三位同事指出了一些错误)，A. Sebö，特别是 P. Rosenstiehl (他在一些迷宫搜索算法上的颇有价值的评述被收入本书) 和 P.D. Seymour, 他们不仅在阅读第 8 章时找出了一些错误和不确切的地方，并且提供了发现其著名的 6 流定理的思维过程 (对这些我有详尽的叙述). 最后，我要感谢 I. Hösch 女士，她是信息处理研究所的秘书，在本卷的最终版中提供了文字方面的帮助. 还有 C. Lillie 女士，她从语言学的角度审视了各补录、前言和附录.

① 原书 Part 1, Volume 2 (第 8~10 章) 的前言.

目　录

第 一 卷

第 二 卷

第 一 卷

第1章 引　　言

冠尼希 (Dénes König) 的书 *Theorie der endichen und Unendlichen Graphen* (《有限图与无限图的理论》)[KÖNI36a] 于 1936 年第一次出版时，只用 248 页 (不包括前言、目录和参考文献) 就囊括了自欧拉 (L. Euler) 发表哥尼斯堡七桥问题的解的文章以来，200 年中图论领域的大部分内容.

实际上，欧拉把他的文章提交给圣 · 彼得堡科学院是在 1735 年 8 月 26 日，但他的文章 "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" 一直到 1741 年才发表在 *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 上. 由于这个 Commentarii 注明的日期是 1736 年，所以图论作为数学的一个分支一般被认为诞生在 1736 年.

然而，D. König 在他的前言中指出：他的书中所考虑的图论仅限制在所谓的绝对图中 (现在称为抽象图)，除几个例外的情形，他没有讨论拓扑图论 (他称为相对图论) 和计数图论.

D. König 的书问世以后，特别是第二次世界大战结束以后，图论得到了飞速发展. 专门发表组合论文的期刊越来越多，它们所涉及的文章中大约有一半是图论文章. 例如，《图论杂志》创刊于 1977 年. 图论研究的繁荣不仅反映在图论书籍数目的增长上，而且反映在这些书籍的内容上. 它们中有很多都聚焦于图论的一些特殊专题，如拓扑图论、代数图论以及近年来具有强劲势头的算法图论 (该方向的研究是出于计算机科学的需要). 由此可见，图论也遵循着科学发展的一般过程. 最初，它从一般领域中脱离出来 (D. König 的书的子标题是 "Kombinatorische Topologie der Strekkenkomplexe" —— 一维复形组合拓扑). 然后它又按照所得的结果和所用的方法分化为若干不同的分支. 图论的这种发展可以被 *Selected Topics in Graph Theory* 和 *Selected Topics in Graph Theory 2* ([BEIN78a], [BEIN83a])(《图论专题精选》和《图论专题精选 2》) 的出版所见证，其主编是本尼克 (L.W.Beineke) 和威尔逊 (R.J.Wilson). 书中包含了不同作者撰写的 22 篇综述文章. 现在《图论专题精选 3》也已出版. 《图论应用》包含了 12 篇综述文章，涉及的是图论在各学科的应用，编者同上.

欧拉解决哥尼斯堡 (现为加里宁格勒) 七桥问题的文章并未把功劳归于自己，他在文章中提到了 Leibniz (Leibniz)：

> 几何学中除了与数量有关并且为人们极为重视的那个分支外，还有

一个目前几乎一无所知的分支这就是 Leibniz 首先提出的位置几何学 (geometria situs). 这个分支只涉及位置的确定及其性质，它不涉及度量，也不作计算……

欧拉继续说明：目前还不十分清楚哪些问题与位置几何学有关，也不清楚解决它们要用什么方法. 但是他肯定，哥尼斯堡七桥问题就是这样一个问题，因为它的解只涉及位置，而没有用任何计算 [WILS85a].

事实上，早在 1679 年，Leibniz 在他给惠更斯 (Huygens) 的信 (摘自 [WILS85a]) 中说："我不满足于代数，因为代数里既没有几何中最简短的证明，也没有几何中最漂亮的构造. 因此，我认为需要另外一种类型的分析，几何的或线性的，它能像代数处理数量大小一样直接处理位置."

通过引进术语"位置分析" (analysis situs)，Leibniz 并没有奠定一个新的数学研究领域，而是指出了一个可能取得进展的总的研究方向 (对"位置分析"这个术语的历史感兴趣的读者，可以参见 Wilson 的文章 [WILS85a]). 在第 2 章，我们将对图论的历史作更多评述. 在这里值得一提的是，König 的书大概是图论早期最丰富的专著 (这里"早期"是指 1936 年 König 的书出版以前图论的发展时期).

但为什么要出一本关于欧拉图的书？是不是因为最近举行了图论 (特别是欧拉的文章)250 周年的纪念活动？本书的出版和图论 250 周年纪念日接近纯粹是一种巧合 (我原计划在 1985 年 3 月底完稿). 但是，正如前言中指出的，欧拉图方面的文章不仅在数量上增长极快，而且该专题的统一理论也趋向成熟. 这两个事实成为写《欧拉图与相关专题》一书的必要条件. 许多同事也对这件事表示出了兴趣，本书和图论发展的大趋势是一致的. 虽然这个过程是缓慢的，但是图论在过去的 20 多年里确实分化出一些不同分支.

第 2 章将给出三篇文章的原始版本. 大多数图论学家认为它们构成了欧拉图理论的主要根基. 本书大部分内容都致力于与这三篇文章中提出的概念有直接关系的一些结果. 但与现在图论的发展相比，我认为只限于欧拉图的这部分内容会太狭隘. 这一观点也体现在我的综述文章"欧拉图"里 (见 [BEIN83a]). 另一方面，这一观点提出了一个问题：如何确定这样一本书的材料选择问题.

由于本书是第一次集中讨论欧拉图，所以我决定尽可能广地覆盖这一领域的问题. 某些专题我讨论得很详细，而另一些专题像综述一样点到为止. 当然，这样做也有一些缺点. 在某些情况下，读者要想了解该专题更多的内容，常常不得不去查阅其他的书或本书所引用的原始文献. 另外，本书的某些内容会与图论中的其他分支相重叠，如在中国邮递员那一章，在 1-因子分解起重要作用的地方，以及在计数、着色和一些其他地方，都有明显重叠. 但是一般来说，恰恰由于现代图论的发展，这样或多或少的重叠是不可避免的.

为了选取恰当的材料，我查阅了数百篇文献. 许多参考文献在本书中并没有进

行广泛的讨论. 不过本书的目的之一是指出目前研究的各种不同方向. 可能有的读者会感到参考文献的数量远远多于本书讨论过的问题，但是书后的参考文献可以有利于帮助感兴趣的读者延伸到本书内容以外的各个研究方向. 我查阅了众多的文献，希望不要漏掉欧拉图理论方面的重要内容，以弥补我的综述文章在这方面的不足.

最后的一项要点是，本书是自封闭的，因为我希望它的读者尽可能多一些. 因此，第 3 章论述了图论的基础理论，以满足后面几章的需要. 要读懂某些专题，或多或少还需要更广泛的数学知识，这有点使人困扰. 因此，本书中尽可能避免使用“容易导出”,“显而易见”等语句. 许多数学家 (包括我自己)，不止一次地遇到过这种情况：要看明白一个“容易”，还需要笔和纸，并花掉半个小时，甚至更长的时间. 因此，在使用了大量图形来阐明情况的同时，我并未用图形去代替逻辑证明. 但是在某些情形下，某些结果的完整证明还是留给了读者，作为不太困难的练习. 因此，本书的内容，无论对大学生还是对研究生来说，作为欧拉图理论的课程是都已足够了，即使不熟悉图论的数学家也可以参考. 由于本书包含了许多最新的结果 (其中有些结果只是部分地解决了某些未决问题)、相当多的猜想，故图论方面的研究者们也会感兴趣.

再说说算法和复杂性研究的问题. 许多问题 (如欧拉迹、圈分解、邮递员路线和迷宫通路等问题) 是用算法陈述的. 但是，本书的目的不是要理论化提出一个算法. 复杂性问题也是如此. 从理论的观点来看，问题是否多项式时间可解是很重要的. 但在本书中，一个算法的复杂性是 $O(n)$ 还是 $O(n^2)$ 是属于次要的事. 我知道许多同事 (特别是有这方面倾向的计算机科学家和图论学家) 会对此不满.

我愿意接受任何人的批判性的意见 (肯定的、否定的或是混合的)，因为这可以帮助我改进工作. 我将对所有给我提出意见的各位作出回应.

第2章　欧拉图理论的三个支柱

欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的文章 [EULER36a] 和 Hierholzer 关于构造连通欧拉图的欧拉迹的文章 [HIER73a] 都有许多不同的译本. 但是，接下来我还是要给出我自己的译文①. 决定这样做是因为我发现这些译本中有一个缺点：它们是“时新”的译本，多多少少地忽略了文章发表时的写作风格. 因此，从历史的观点来看，这些译本是不够准确的，它们无意中曲解了认知之路，我的译本并非一个学了 6 年拉丁文的高中生递交的家庭作业，也并非出于对版权的担心.

关于欧拉文章的历史说明，有兴趣的读者可参见文献 [WILS85a,WILS86a] 和 [SACH86a,SACH86b].

一个位置几何问题的解 *

1. 几何学中有一部分内容与数量有关，人们对其颇感兴趣. 除此之外，还有一部分内容，人们对它都知之甚少. 这部分几何首先由 Leibniz 提出，称为位置几何. 它研究仅由位置就可确定的几何，并研究位置的性质. 在这种几何中，人们不关心数量，也不关心计算. 然而，什么问题属于位置几何? 求解它们要使用什么方法? 一直没有明确的界定. 当最近有一个问题被提出来时，我确信它属于位置几何. 它看上去是一个几何问题，同时又具有这样的性质：不需要确定数量关系，通过量的计算也无法解决它. 特别地，其求解只需要位置关系就可以，而计算是无益于事的. 因此，作为位置几何的一个例子，决定在此介绍我解决这类问题的一个方法.

2. 据说这个问题是相当有名的，并且与以下叙述有关：哥尼斯堡是普鲁士的一个岛，称为 der Kneiphof. 围绕它的河被其分为两支 (图 1). 河上架有 7 座桥 a, b, c, d, e, f, g. 问题是一个人能否经过每座桥一次且恰好一次. 据说有的人否认这件事的可能性，而另一些人表示怀疑，但是没有人能给出确定的答案. 我将这一问题推广到了一般情形：不管河的形状和支流分布如何，也不管河上多少座桥.

3. 下述方法肯定能解哥尼斯堡七桥问题：列出所有可能的行走路线，由此就可以知道是否有某条路线满足要求. 但是由于组合的数目太大，这种方法是极端困难和辛苦的，而且这种方法很难应用于桥数更多的情形. 这种方法会导致许多无关

① 感谢维也纳奥地利科学院的 H.Reitterer 先生，他核对了我对欧拉文章的译文.

* 原书 II.2~II.11 是欧拉文章的影印件，共 10 页，摘自于欧拉全集，I7，代数研究). 这里是欧拉文章的译文. —— 译者

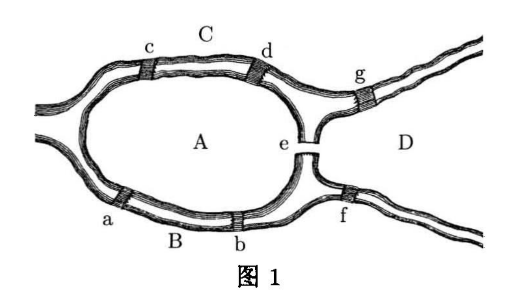


图 1

因素的讨论，包括复杂度. 排除了这种方法后，我力求寻找其他途径，一种只判断符合要求的路线是否存在的途径，我猜想应该存在这样一个简单的方法.

4. 我的方法基于表示路线的适当方式. 大写字母 A, B, C, D 表示被河分割的区域. 如果一个人从区域 A 经过桥 a 或者桥 b 走到区域 B，就用字母 AB 表示这个转移. 第一个字母表示旅行者从何而来，第二个字母表示穿过桥后到达的区域. 如果旅行者接着由区域 B 经过桥 f 到达区域 D，这个转移用 BD 表示. ABD 表示这两个相继的转移 AB 和 BD，字母 B 是第一次转移到达的区域，也是第二次转移离开的区域.

5. 类似地，若旅行者由区域 D 继续穿过桥 g 到达区域 C，就用 4 个字母 ABDC 表示这三个相继的转移. 从 ABDC 这 4 个字母中可以看出，旅行者首先出现在区域 A，然后到达区域 B，再前行到达区域 D，接着又到达区域 C. 因为这些区域是被河流分开的，所以旅行者必须穿过三座桥. 类似地，相继穿过 4 座桥将用 5 个字母表示. 无论旅行者穿过多少座桥，这条路都将用一串字母表示，其中字母数比穿过的桥数多 1. 因此，穿过 7 座桥将用 8 个字母来描述.

6. 这种记法并不需要考虑穿过的是哪座桥. 当一个人可以穿过多座桥从一个区域到达另一区域时，他走哪座桥是无关紧要的. 因此，若一个人能穿过 7 座桥且每座桥恰好穿过一次，则他的走法可以用 8 个字母表示. 它们的顺序必须满足：前后相继的 A 和 B 将出现两次，这是因为区域 A 和 B 间有两座桥 a 和 b 相连. 类似地，前后相继的 A 和 C 出现两次，而前后相继的 A 和 D，B 和 D，C 和 D 各出现一次.

7. 因此，这个问题约化为能否用 4 个字母 A, B, C, D 构成 8 个字母的序列，使得序列中相继字母出现的次数满足上述要求. 但在试图找出这样一个序列之前，需要先考察这种安排是否可能. 因为如果能证明这样的安排是不可能的，那么构造此序列的一切努力都是无效的. 因此，我研究了一个简单的规则，以判断这个问题和所有类似的问题是否有效.

8. 为了发现这样的规则，我考虑了一个具体的区域 A，通向 A 的桥可能有任意多座 (图 2). 在这些桥中，先考虑了一座具体的桥 a. 如果旅行者穿过桥 a，那么他或者跨越这座桥之前在区域 A 里，或者跨越桥之后到达区域 A. 因此，为了如上

所述地记录这次转移，字母 A 必须出现一次. 如果有三座桥 a, b, c 通向区域 A，并且旅行者要穿过所有这三座桥，那么不管他开始是否在区域 A 里，在他的走法的描述中，字母 A 都将出现两次. 如果桥的数目是任一奇数，那么字母 A 出现的次数就为桥数加 1 的一半.

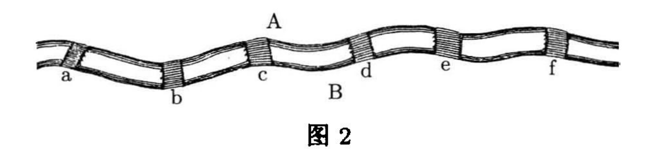


图 2

9. 在哥尼斯堡七桥问题 (图 1) 中，因为有 5 座桥通向区域 A，因此，在遍历这些桥的描述中，字母 A 必须出现三次. 由于有三座桥通向区域 B，故字母 B 必须出现两次. 类似地，字母 D 和 C 都出现两次. 在描述经过 7 座桥的 8 个字母的序列中，字母 A 要出现三次，字母 B, C, D 各要出现两次，这样的序列是不存在的. 因此，按上述要求通过哥尼斯堡七桥的路线也是不存在的.

10. 其他这类问题，假定通向每一个区域的桥数都为奇数，按类似的方法也能够判断是否有一条通过每座桥恰好一次的路线. 如果字母出现的总数等于桥数加 1，那么这样的路线是可能的. 但是如果像上述例子一样，字母出现的总数大于桥数加 1，那这样的路线就不存在了. 我提出的字母 A 的出现次数的法则，不管这些桥是从一个区域通向 A 的，还是从不同区域通向 A 的，都是有效的.

11. 然而，如果通向 A 的桥数为偶数，那就必须考虑旅行者是否是从区域 A 出发的. 如果有两座桥通向区域 A，并且旅行者是从区域 A 出发的，那么字母 A 就必须出现两次. 第一次表示他穿过一座桥离开区域 A，而第二次表示他穿过另一座桥返回区域 A. 但是如果旅行者是从另一区域出发的，那么字母 A 只出现一次，它既表示到达区域 A，也表示从区域 A 离开.

12. 假设有 4 座桥通向 A，并且旅行者从区域 A 出发，那么字母 A 就在整条路线中出现三次. 但是如果旅行者是从另一区域出发的，那么字母 A 只出现两次. 假设有 6 座桥通向区域 A，并且旅行者从区域 A 出发，那么字母 A 就在整条路线中出现 4 次. 但是如果旅行者是从另一区域出发的，那么字母 A 只出现三次. 一般地，如果假设有 $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) 座桥通向区域 A，并且旅行者从区域 A 出发，那么字母 A 就在整条路线中出现 $n+1$ 次. 但是如果旅行者从另一区域出发，那么字母 A 只出现 n 次.

13. 在这样一条路线里，其出发地只能有一个区域. 由通向一个区域的桥数，就能算出该区域出现的次数. 如果桥数为奇数，那么这个奇数加 1 的一半就是这个区域出现的次数；如果桥数为偶数，那么这个偶数的一半就是这个区域出现的次数. 当区域出现次数之和等于桥数加 1，并且出发地是有奇数座桥的区域时，满

足要求的路线可能存在. 当区域出现次数之和等于桥数，并且出发地是有偶数座桥的区域时，满足要求的路线也可能存在，因为按这个方法，区域出现的次数增加了 1.

14. 至此，对河和桥的任意组合形式都已讨论完了. 为了研究是否某人能经过每座桥一次且仅一次，我提出如下操作：第 1 步，把被河分离的区域用字母 A, B, C, ⋯ 表示. 第 2 步，把桥的总数加 1，将这个数记下来，以备后用. 第 3 步，把 A, B, C, ⋯ 列成表，紧跟在每一个字母之后写上通向该区域的桥数. 第 4 步，给旁边为偶数的字母标上星号. 第 5 步，在偶数后面写上这个数的一半，在奇数后面写上该数加 1 的一半. 第 6 步，把第 5 步中的数加起来. 如果这个和等于第 2 步中记下的那个数 (桥的总数加 1)，或者比它小 1，那么这样的路线就是可能的. 注意，如果这个和等于桥的总数，则这条路线必定起始于标星号的区域；如果这个和等于桥的总数加 1，则这条路线必定起始于没有标星号的区域. 在哥尼斯堡七桥情况下，我的操作如下：

桥的总数为 7，故 8 是有效数.

区域	桥数	出现次数
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

由于最后一列数之和大于 8，故满足要求的路线是不可能存在的.

15. 设 A 和 B 是水中的两个岛，与这片水域相连的有 4 条河 (图 3). 通往岛上的桥和横跨河流的桥共有 15 座，记为 a, b, c, d, ⋯，问一个人能否穿过每一座桥一次且仅一次. 首先，把被水分离开的区域用字母 A, B, C, D, E, F 表示，共有 6 个区域. 其次桥的总数是 15，然后加 1 等于 16，写在下表的顶部：

		16
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16

第 3 步，在 A, B, C, ⋯ 的后面标上通向该区域的桥数 (如通向区域 A 的桥数为 8，通向区域 B 的桥数为 4 等). 第 4 步，把桥数为偶数的字母标上星号. 第 5 步，

在偶数后面写上该数的一半，在奇数后面写上该数加 1 的一半. 第 6 步，把第 3 列的数字加起来，得到 16. 由于这个和等于表顶部的数字 16，所以只有以没有标星号的区域 D 或 E 出发才能构造出满足要求的路线. 例如，

$$\mathrm{EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD}$$

其中两个大写字母之间的小写字母表示需要穿过的桥.

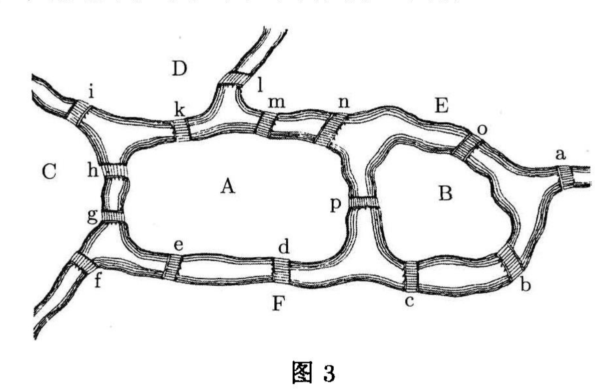


图 3

16. 按这样的方法，对最复杂的情况都能容易地判定出通过每座桥一次且恰好一次的路线是否存在. 但是我还要介绍一个更为简洁的方法，它可以很容易地从以下观察得出. 首先注意到字母后面的数字之和等于桥数的 2 倍，这是因为每座桥连接两个区域，因此，在计算中每座桥都被数了两次.

17. 从这个观察可知，把通向每一个区域的桥数加起来必是偶数，因为它是总桥数的 2 倍. 因此，在通向每个区域的桥数中不可能只有一个奇数，也不可能是恰有 3 个或 5 个奇数 …… 所以字母后面的奇数之和是偶数. 在哥尼斯堡的例子 (段落 14) 里，字母 A, B, C, D 后面有 4 个奇数；在段落 15 的例子里，只有两个字母 D 和 E 后面是奇数.

18. 因为字母后面的数字之和等于桥数的 2 倍，故这个和加 2 后再除以 2 就等于写在表的顶部的那个数. 如果在字母后面的数都是偶数，那么第 3 列数之和比顶部的数小 1. 在这种情形下，通过所有的桥的路线是可以被构造出来的，因为不管这条路线从哪个区域开始，都有偶数座桥通向该区域. 在哥尼斯堡七桥问题中，一个人通过每座桥恰好两次的路线是可能的，因为可以把一座桥分为两座，从而通向每个区域的桥数就是偶数了.

19. 如果字母后面写的数字中只有两个奇数，而其余的全为偶数，那么满足要求的路线也是可能的，但是起始区域必须有奇数座桥通向它，因为此时第 3 列数字之和等于写在表顶部的数字.

如果有 4, 6, 8, $\cdots$ 个奇数出现在第 2 列，那么第 3 列中的数字之和将大于表

顶部的数字，因此，不可能存在满足要求的路线.

20. 因此，对每一种可能的情形，借助于下述法则可以很容易判定是否有一条路线不重复地通过每一座桥：

如果有奇数个桥的区域数大于 2，那么不可能有满足要求的路线；

如果有奇数个桥的区域只有两个，那么从这两个区域之一出发的满足要求的路线是可能的；

如果不存在奇数个桥的区域，那么从任一区域出发的满足要求的路线是可能的.

按这个法则，上述问题可以完全解决.

21. 在确定这样一条路线的可能性后，还要解决如何设计这样一条路线的问题. 为此，我使用下述法则：如果有一对桥连接相同的两个区域，就把这对桥去掉，这样可以减少桥的数目，然后在剩下的桥中找到一条满足要求的路线. 去掉的这对桥对这条路线不会有很大影响. 关于这一点，略微思考一下就会明白. 因此，我认为没有必要对这条路线的构成作更多的说明了.

无重复无间断地通过一个线复形的可能性 *

卡尔 · 赫拉兹

联系人：维纳①

在任意一个错综复杂的线复形里②，复形的不同部分可称为一个点的支路，沿着这些支路人们能离开这一点. 具有多条支路的点称为*节点*. 节点处的支路数目称为该节点的*次*. 按次的奇偶性，这个节点称为奇节点或者偶节点. 任意一个双点是一个 4- 次节点. 通常的一个点可以描述为 2- 次节点，一个自由端是一个 1- 次节点.

如果能够不重复地连续遍历一个线复形，则这个线复形或者有两个奇节点或者没有奇节点. 在遍历过程中，穿过一点时用了这个节点的两条支路. 由于没有线会被经过两次，因此，被穿过 n 次的点必是 $2n$- 次节点. 一个奇节点在遍历中只

* 原书 II.20~II.22 是赫拉兹文章的影印件，共三页. 这里是赫拉兹文章的译文. —— 译者

① 赫拉兹教士对科学的卓越贡献不幸终止于他英年早逝 (1871 年 9 月 13 日). 他给数学界的同事作了如下研究报告. 由于缺少文字的记录，他的工作只能从记忆中复原. 在我尊敬的同事卢罗特 (Lüroth) 的帮助下，我尽可能准确地复原其工作如下文.

② 我把 Linienzug 翻译为线复形. 从语言的角度来看，[BIGG76a] 中把它翻译成 "线系统" 一词是不准确的 (虽然从图论的观点上看可能是最好的). 在数学字典里，1- 维复形是 Linienzug 一词的准确翻译，但是与赫拉兹时代的标准术语不太相容. 实际上，在赫拉兹文章的 20 多年前，李斯庭 (Listing) 已使用了线性复形一词 [LIST48a].

有一次不是被穿过的，即当它或者是起点，或者是终点时．如果这个遍历最后又回到了出发点，那么这个线复形中仅有偶节点；否则，起点和终点都是奇节点．

反之，如果一个连通的线复形含有两个或不含奇节点，那么它可以被不重复地连续遍历.

因为

a) 如果一个人已经游历了这个线复形的一部分，那么未被游历的部分中，每一个节点的奇偶性与它在整个复形中的奇偶性是一致的．只有当起点与终点不重合时，起点和终点的奇偶性才会发生改变．这是因为穿过一个点时用掉了两条支路，而在起点和终点处都只用了一条支路．

b) 如果自一个奇节点出发游历线复形，那么这个游历必停止在另一个奇节点．因为每穿过一次偶节点就用去该节点的两条支路，从而每次到达一个偶节点时都至少还有一条没有用过的支路，可以通过它离开该节点．由于起点在出发后变成一个偶节点，故游历不可能停止在起点．但是如果游历起始于一个偶节点，那么游历可能停止于它，因为它已由偶节点变为奇节点．

c) 如果一个线复形有两个奇节点，则从其中一个奇节点出发，必终止于另一个奇节点．在这种情况下，覆盖线复形的是一条开的遍历．如果线复形没有奇节点，那么从任一偶节点出发，必终止于起点．在这种情况下，覆盖线复形的是一条闭的遍历．

d) 如果还有一部分 b 未被游历，那么 b 中的节点均为偶节点，因为两个可能的奇节点已被用掉了，而其余节点的奇偶性保持不变．b 必与已游历的部分 a 有至少一个公共点；否则，线复形将不连通．如果可以在游历 a 时由 P 点进入 b，那么 b 的游历必终止于 P，然后接着游历 a．按这种方法，可以把未游历的每一部分粘到已经游历的部分上，从而可以无重复地连续遍历整个复形．

还能推出另一个定理：

> *一个线复形只能有偶数个奇节点．实际上，如果一个人从一个奇节点出发，尽可能连续地游历这个复形，那么他必终止于某个奇节点，这样用了两个奇节点．重复这个过程，直到奇节数减少到小于 2．但剩下的奇节点数不会是 1，故必为 0．因为一个线复形如果只有一个奇节点，并且由此出发，那么这个游历将永远不会终止，因为它只能终止于奇节点．因此，原线复形中奇节点的个数必是偶数.*

卡尔斯卢 (Carlsruhe)，1871 年 12 月

编者评述：上述内容的精华在李斯庭的 “初等拓扑研究” 中已有体现，该文鲜为人知，发表在 *Götinger Studien* (第一卷，Göttingen 1847) 上[①]．由于没有详细证

① 见欧拉文章 (H.F.) 的 17 节．

明，所以文章很短. 也许上述文章可以将几何学家的注意力指引到这项研究工作，其内容在其他方面也是颇为丰富的.

让我们以奥斯瓦德 • 外伯伦 (Oswald Veblen) 的文章 [VEBL31a] 中的一段话结束本章的讨论. 虽然前述文章被认为是图论发展中的奠基之作，但它有一点缺陷，即下述这句话在一般情况下是不对的:“这些 1- 圈 (C_1') 中的每一个都与 (C_1) 的一个圈相重合 (相对应) $\cdots\cdots$”(见下文). 因此，第三个柱石有个小裂缝. 但是外伯伦在他的文章 [VEBL12a] 里已说明了如何弥补:“$\cdots\cdots$ 从任一边出发描述一条通过这些边的路，由于任一个顶点的边数是偶数，所以这条路进入一顶点时，总存在一条可以离开这个顶点的边. 因此，这条路可继续下去，直到与自身相交. 此时，这条路的一部分构成一个闭圈. 如果去掉这个圈，则每个顶点余下的边数仍是偶数. 这样把圈一个一个地去掉，直到所有边都用完为止. ”

Oswald Veblen，ANALYSIS SITUS 15-16pp

一维圈

22. 一个连通的线性图，若它的每一个顶点是两个且仅是两个 1- 胞腔的端点，那么这个线性图就称为一维圈或 1- 圈. 按第 5 节的定理，任一条闭曲线被曲线上的有限个点分解为 1- 圈. 反之，一个 1- 圈上的所有点的集合是一个简单闭曲线. 如果一个线性图中每一个顶点恰是两个 1- 胞腔的端点，那么它或者是一个 1- 圈，或者是两两无公共点的 1- 圈的集合.

考虑每一个顶点都是偶数条边的端点的线性图 C_1，用 $2n_i$ 表示与顶点 a_i^0 关联的边数. 与 a_i^0 关联的边可以划分为 n_i 对，使任意两对没有公共边，称这些边对为与 a_i^0 相关的对. 作图 C_1' 如下：① 在 C_1 的每一个非顶点的点上，有一个且仅有一个 C_1' 的点；② 在 C_1 的每一个顶点 a_i^0 上，有 n_i 个 C_1' 的顶点，每个顶点与 a_i^0 的一个边对相关联.

线性图 C_1' 的每个顶点恰好关联两条边，因此，它由一些 1- 圈组成. 这些 1- 圈中的每一个都与 C_1 中的一个 1- 圈相对应，并且 C_1 的任意两个 1- 圈没有公共的 1- 胞腔. 因此，C_1 由一些 1- 圈组成，这些 1- 圈只有有限个公共的 0- 胞腔.

显然，在具有有限个公共点的若干闭曲线组成的线性图中，关联于每一个顶点的 1- 胞腔的个数是偶数. 因此，C_1 由一些仅有公共 0- 胞腔的 1- 圈组成的充分必要条件是 C_1 的每一个 0- 胞腔关联于偶数个 1- 胞腔.

第3章 基本概念和预备知识

本章的大部分内容可以在任一本图论的入门课本中找到，但是为了满足初学者的需要，我还是决定从基本概念开始. 此外，为了下面一些章节的需要，把图论中的某些概念用非通常的方式进行处理是必需的 (如开边、闭边、半边等). 这就必须对某些基本概念先给出相对形式化的定义. 在以后的章节中，我们会尽可能地回避这种形式化的定义，而用更具有启发性的方式来阐述书中的内容，因为形式化的东西越多，读者越容易厌烦.

本章的大部分基本结果没有给出证明，因为它们或者在图论入门的书中可以查到，或者略有一定基础的读者都可以简单地证明. 这样做主要是为了尽可能缩短本章的篇幅. 出于同样的考虑，一些不太初等的结果也仅仅叙述其内容，它们的证明可在所列的参考文献中查到，我推荐 [HARA69a，BOND76a，BEHZ79a，BEIN78a，BEIN83a] 作为图论入门的参考书.

至于除了图论以外的数学知识，本书假定读者具有集合论①、代数和曲面拓扑 (特别是平面拓扑) 的基本知识. 至于算法、算法的复杂性和判定问题的复杂性，将在需要时给出简单的介绍. 本书将不给出算法基本概念的定义，感兴趣的读者可参见有关文献. 现在让我们转入正题.

3.1 混合图与它们的基本要素

定义 3.1 设 V, K, K', K'' 是 4 个彼此不交的集合，K, K', K'' 是等价集，当 $V = \varnothing$ 时，$K = \varnothing$. 此外有 7 个给定的映射：

$\alpha : K' \to K$，$\beta : K'' \to K$，$f' : K' \to V$，$g' : K'' \to V$，

$f : K \to V$，$g : K \to V$，$h : K \to V \times V \cup \mathcal{P}_2(V) \cup V$，

其中 $\mathcal{P}_2(V)$ 是 V 的 2 元子集的集合. 假定这些映射有下述性质：

1) α 和 β 是双射；

2) $f(\alpha(k')) = f'(k')$，$g(\beta(k'')) = g'(k'')$，其中 $k' \in K'$，$k'' \in K''$；

3) 对 $k \in K$，

$$h(k) = \begin{cases} (f(k), g(k)) \leftrightarrow h(k) \in V \times V, \\ \{f(k), g(k)\} \leftrightarrow h(k) \in \mathcal{P}_2(V) \cup V. \end{cases}$$

① 第一、第二两卷只讨论有限图，无限图将在第三卷讨论.

上述这些集合和映射之间的关系可用图 3.1 说明.

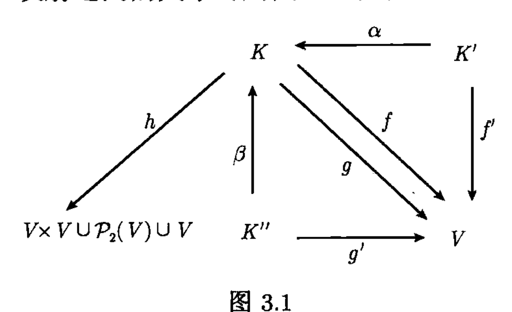


图 3.1

称 $H=V\cup K$ 为**混合图**，h 为它的**关联函数**，f 为它的**尾函数**，g 为它的**首函数**. 如果 $h(K)\cap V\times V=\varnothing$，则这个混合图称为**图**；若 $h(K)\subset V\times V$，则这个图为**有向图**. 以后将用 G 表示图，用 D 表示有向图 (对于不同的图或有向图，将用上标或下标加以区别).

定义 3.2 设 $H=V\cup K$ 为一个混合图. V 中的元素称为顶点，V 称为顶点集，记 $V=V(H)$ (除非同时考虑几个混合图，V 总表示 H 的顶点集).

定义 $E(H):=\{k\in K\mid h(k)\notin V\times V\}$，$A(H):=\{k\in K\mid h(k)\in V\times V\}$，称 $E(H)$ 为 H 的**边集合**，$A(H)$ 为 H 的**弧集合**. 在不引起混淆的情况下，用 E 和 A 分别表示 $E(H)$ 和 $A(H)$. 因此，$K=E\cup A$. 对 $a\in A(H)$，称 $f(a)$ 为弧 a **的尾**，$g(a)$ 为弧 a **的首**；对 $e\in E(H)$，称 $f(e)$ 和 $g(e)$ 为边 e **的端点**. 此外，对 $a\in A(H)$ 和 $e\in E(H)$，称 a **外关联于** $f(a)$，**内关联于** $g(a)$，而 e **关联于** $f(e)$ 和 $g(e)$. 对任意的 $b\in\{a,e\}$，称 $f(b)$ 和 $g(b)$ 为**相邻的**，或 b **连接** $f(b)$ 和 (到) $g(b)$；对于 $b,c\in K$，若 $\{f(b),g(b)\}\cap\{f(c),g(c)\}\neq\varnothing$，则称 b 和 c 相邻.

下面应用定义 3.1 来区分各种类型的边和半边 (弧和半弧).

定义 3.3 设 $H=V\cup E\cup A$ 是一个混合图. $e\in E$，$a\in A$ 分别称为开边 e 和开弧 a，$\bar{e}:=\{e,f(e),g(e)\}$ 和 $\bar{a}:=\{a,f(a),g(a)\}$ 分别称为**闭边**e 和**闭弧**a. 除非特别说明，以后文中的边 (弧) 可以表示开边 (弧) 也可以表示闭边 (弧)，这在上下文中是容易区分的. $\{e,f(e)\}$(或 $\{e,g(e)\}$) 为关联于 $f(e)$(或 $g(e)$) 的 **半开边** e；类似地，可定义**半开弧**. 对于 $e'\in K'$ $(e''\in K'')$，如果 $h(\alpha(e'))\notin V\times V$ $(h(\beta(e''))\notin V\times V)$，则称 e' (e'') 为关联于 $f'(e')$ $(g'(e''))$ 的**半边**. 此外，当 $e=\alpha(e')=\beta(e'')$ 时，称 e' 和 e'' 为 e 的半边. 但在大多数情况下，用 e' 代表 e' 或 e''；如果需要更具体地说明，将用 $e(v)$ $(e(w))$ 表示关联于 $v=f'(e')$ $(w=g'(e''))$ 的半边 e'(或 e''). 相应地，用 $E'\subseteq K'$，$E''\subseteq K''$ 分别表示满足 $\alpha(E')=\beta(E'')=E$ 的半边的集合. 对于**半弧**，也可以给出定义. 最后，对于一条边或弧 k，如果 $f(k)=g(k)$，则称 k 为一个**环**，用 Λ_v 表示**点** v **的所有环的集合**，定义 $\Lambda(H)=\bigcup\limits_{v\in V}\Lambda_v$. 如果环 a 是一条弧，

也称 a 为**有向环**或**定向环**.

在前述定义的基础上，对混合图 $H = V \cup E \cup A$ 引进下述符号：

$E_v := \{e \in E \mid f(e) = v$ 或 $g(e) = v\}$，

$E_v^* := \{e(v) \in E' \cup E'' \mid f'(e(v)) = v$ 和 (或) $g'(e(v)) = v\}$.

类似地，可以定义相应的集合 $A_v \subseteq A$ 和 $A_v^* \subseteq A' \cup A''$. 但在许多情况下，还必须更加具体地表示这些 (半) 弧的集合，即

$$A_v^+ := \{a \in A_v \mid f(a) = v\}, \quad A_v^- := \{a \in A_v \mid g(a) = v\}.$$

因此，$A_v^- = A_v - A_v^+$ 当且仅当 $\Lambda_v \cap A_v = \varnothing$. 半弧集合 $(A_v^*)^+$ 和 $(A_v^*)^-$ 可类似定义. 有时也称 $a \in A_v^+ (a \in A_v^-)$ 起始 (终止) 于 v.

基于上述集合的定义，引进下面的一些数 (从现在起，假定集合 V 和 K 是有限的，并且用符号 $|V|$ 和 $|K|$ 分别表示它们元素的个数)：

$$p_H := |V(H)|, \quad q_H := |E(H)| + |A(H)|, \quad \lambda_v := |\Lambda_v|.$$

称 p_H 为 H 的**阶**，q_H 为 H 的**模**. 在不引起混淆的情况下，简记 $p := p_H$，$q := q_H$. 当讨论多个图，如 H_1 和 H_2 时，记 $p_1 := p_{H_1}$，$p_2 := p_{H_2}$ 等. 此外，$d(v) := |E_v^*| + |A_v^*|$ 称为顶点 v 的**度**或**价**；称 $\delta(H) := \min\{d(v) \mid v \in V(H)\}$ 为 H 的**最小度**；称 $\Delta(H) := \max\{d(v) \mid v \in V(H)\}$ 为 H 的**最大度**. 由此可以推出 $d(v) = |E_v| + |A_v| + \lambda_v$，即一个环在 $d(v)$ 中计算了两次①. 根据 $d(v)$ 的奇偶性，称 v 为**奇点**或**偶点**. 由此可以得到以下重要结果，它已包含在欧拉的文章中 (见第 2 章第 17 段)：

引理 3.4　对任意混合图 H，

$$2q = \sum_{v \in V} d(v).$$

因此，H 的奇点个数为偶数.

一个混合图的顶点可按它们的度进行分类，如不加说明，总是记

$$V_i(H) := \{v \in V(H) \mid d(v) = i\},$$

并称 $v \in V_i(H)$ 为 i- 价顶点. 特别地，1- 价顶点称为 H 的端点 (不要与边或弧的端点相混淆)，关联于端点的边 (弧) 称为端边 (端弧). 0- 价顶点称为孤立顶点. 一个图 G，若对一切奇数 i 都有 $V_i(G) = \varnothing$，则 G 称为**欧拉图**. 此外，在引理 3.4 的基础上，引进

$$\sigma(H) := \sum_{v \in V(H)} (d(v) - 2) = 2q - 2p.$$

---

① 这与现今通用的度的定义是一致的. 但是冠尼希区分了度对环的两种不同的计算方式 [KÖNI36a, p163].

这个数在许多归纳法的证明中将被使用. 如果 H 是一个有向图 $D := V(D) \cup A(D)$, 则对于顶点 $v \in V(D)$, 定义 v 的出度 $\mathrm{od}(v) := |(A_v^*)^+| = |A_v^+|$ 和入度 $\mathrm{id}(v) := |(A_v^*)^-| = |A_v^-|$ 以及 $\sigma(D) := \sum_{v \in V(D)} (\mathrm{od}(v) - 1)$, 它意味着 $\sigma(D) = q - p$. 这一关系可由下述引理得到:

引理 3.5 对任意有向图 D,

$$q = \sum_{v \in V(D)} \mathrm{od}(v) = \sum_{v \in V(D)} \mathrm{id}(v).$$

有向图 D 的一个顶点 v, 若 $\mathrm{id}(v) = 0$, 则称 v 为 D 的**源**; 若 $\mathrm{od}(v) = 0$, 则称 v 是 D 的**汇**. 0- 价顶点既是源又是汇. 但是一个有向图不一定有源或汇. 由引理 3.5 可知, 若 D 有一个顶点 $v \in V(D)$ 满足 $\mathrm{od}(v) - \mathrm{id}(v) > 0$, 则必有另一点 $\omega \in V(D) - \{v\}$ 满足 $\mathrm{od}(w) - \mathrm{id}(w) < 0$. 因此, 对每一顶点 $v \in V(D)$ 均有

$$\mathrm{id}(v) = \mathrm{od}(v)$$

的情况是相当特殊的, 这种特殊图称为**欧拉有向图**. 应用引理 3.5 可得下述推论:

推论 3.5a 设 D 是一个有向图, $v \in V(D)$ 为一个固定顶点. 若对一切 $x \in V(D) - \{v\}$ 都有 $\mathrm{id}(x) = \mathrm{od}(x)$, 则也有 $\mathrm{id}(v) = \mathrm{od}(v)$, 即 D 是**欧拉**的.

一个有向图 D, 如果对每一顶点 $v \in V(D)$ 都有 $\mathrm{id}(v) = \mathrm{od}(v) = k$, 则称 D 是 **k- 正则有向图**(或者称为正则的). 按此定义, 一个 k- 正则有向图必是欧拉的. 如果一个图 G 的每一顶点 $v \in V(G)$ 都有 $d(v) = k$, 称 G 为 **k- 正则图**. k- 正则图不一定都是欧拉图, 它是欧拉图当且仅当 k 是偶数. 引理 3.4 和引理 3.5 引出这样一个问题: 能否对欧拉 (有向) 图的顶点度给出一个一般的描述. 这个问题暂时不去讨论. 当读者读完本章后, 肯定能构造出许多不同的欧拉 (有向) 图. 尽管如此, 我们仍然建议感兴趣的读者参见文献 [LESN77a, RAOS79a], 其中讨论了本问题及其他相关问题.

对混合图 H 的一个顶点 v, v 的邻域定义为

$$N(v) := \{x \in V(H) - \{v\} \mid (E_x \cup A_x - \Lambda_x) \cap (E_v \cup A_v - \Lambda_v) \neq \varnothing\},$$

称 $x \in N(v)$ 为 v 的邻点. 还定义 $N^*(v) := N(v) \cup \{v\}$.

如果混合图 $H = V \cup E \cup A$ 的关联函数 h 是单射 (即 $h(e) = h(a)$ 蕴涵着 $e = a$, $e, a \in E \cup A$), 则用 $e = xy$ 表示 $e \in E$, 其中 $\{f(e), g(e)\} = \{x, y\}$, 用 $a = (x, y)$ 表示 $a \in A$, 其中 $(f(a), g(a)) = (x, y)$. 但在一般情况下, h 不是单射. 尽管如此, 即使对于满足 $h(e) = h(f)$ 的 $e, f \in E$ 有 $e \neq f$, 或者对于满足 $h(a) = h(b)$ 的 $a, b \in A$ 有 $a \neq b$, 也将使用这种记法. 此时, 应该理解为 e 具有形式 xy 或 a 具

有形式 (x,y). 当 $e\neq f$ $(a\neq b)$ 满足 $h(e)=h(f)=\{x,y\}$ $(h(a)=h(b)=(x,y))$ 时，称 xy $((x,y))$ 为**多重边 (弧)**. 类似于定义环时的情形，定义

$$\Lambda_{xy}:=\{e\in E\mid h(e)=\{x,y\}\},\quad \Lambda_{(x,y)}:=\{a\in A\mid h(a)=(x,y)\},$$

$\lambda(xy):=|\Lambda_{xy}|$ 和 $\lambda(x,y):=|\Lambda_{(x,y)}|$ 分别为 $e=xy$ 和 $a=(x,y)$ 的重数. 一条边 $e=xy$ 的度定义为

$$d(e):=d(x)+d(y).$$

图 3.2 总结了以上所讨论过的一些概念.

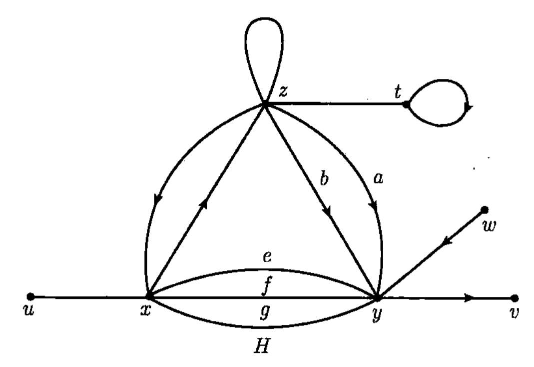


图 3.2　混合图 $H=V\cup E\cup A$，顶点集 $V=\{t,u,v,w,x,y,z\}$，边集 $\{e,f,g,ux,zt,zz\}$，弧集 $\{a,b,(x,z),(z,x),(t,t),(y,v),(w,y)\}$. 端点集为 $\{u,v,w\}$，ux 为端边，(w,y) 和 (y,v) 为端弧. $\lambda(xy)=3,\lambda(z,y)=2$，而其余每一边或弧的重数为 1. $\lambda_z=\lambda_t=1,\Lambda(G)=\{zz,(t,t)\}$ 且 (t,t) 是一个有向环. x 是 H 的唯一偶顶点

注意，对混合图 $H=V\cup E\cup A$ 且 $E\neq\varnothing$，对 $s\in V$ 还没有定义 $\mathrm{id}(s)$ 和 $\mathrm{od}(s)$. 下面引进比顶点度、入度和出度更一般的概念. 对混合图 $H=V\cup E\cup A$，选取不交的子集 $X,Y\subseteq V$，并定义

$$E(X,Y):=\{e\in E\mid X\cap\{f(e),g(e)\}\neq\varnothing\neq Y\cap\{f(e),g(e)\}\},$$

$$A^+(X,Y):=\{a\in A\mid f(a)\in X,g(a)\in Y\},$$

$$A^-(X,Y):=\{a\in A\mid g(a)\in X,f(a)\in Y\},$$

$$A(X,Y):=A^+(X,Y)\cup A^-(X,Y).$$

因此，$A^+(X,Y)=A^-(Y,X)$，$A^-(X,Y)=A^+(Y,X)$. 由此推出 $A(X,Y)=A(Y,X)$. 由定义有 $E(X,Y)=E(Y,X)$. 与这些集合相联系的数有 $e(X,Y)=|E(Y,X)|$，$a^+(X,Y)=|A^+(Y,X)|$ 等. 如果 $Y=V-X$，则简写这些集合及数为 $E(X)=E(X,V-X)$，$e(X)=e(X,V-X)$ 等，并且称 $E(X)\cup A(X)$ 为 X 的**边界**. 由此

可得 $d(v) = e(\{v\}) + a^+(\{v\}) + a^-(\{v\}) + 2\lambda_v$. 在图 3.2 中, $a^+(\{x\}) = a^-(\{x\}) = 1$, $e(\{x\}) = 4$. 当 H 是无环有向图时, 对一切 $v \in V(D)$ 都有 $e(\{v\}) = 0$, $a^+(\{v\}) = \mathrm{od}(v)$, $a^-(\{v\}) = \mathrm{id}(v)$. 本书所涉及的混合图大部分允许有环、多重边或多重弧. 但许多结果只是对 $\lambda(H) := \sum_{v\in V(H)} \lambda_v = 0$ 或对任意 $k \in E(H)\cup A(H)$ 都有 $\lambda(k) = 1$ 的混合图成立. 使 $\lambda(H) = 0$ 的混合图 H 称为是无环的. 如果一个无环混合图的关联函数 h 是内映射, 则称 H 为简单的. 具有多重边或弧但无环的 (混合) 图 (有向图) 称为 (混合) 多重图 (多重有向图). 除本章和第 9 章前半部分的一些讨论外, 在一般情况下, 将直接用混合图一词, 并且 H 表示混合图当且仅当 $E(H) \neq \varnothing \neq A(H)$.

3.2 图与混合有向图的子图

在进一步探讨之前, 我们再讨论一下定义 3.1, 在那里给出了各种映射, 然后用性质 1)~3) 把它们联系起来. 由定义 3.1 可见, 即使给定了关联函数 h, 也不能唯一确定 f', g', f, g. 事实上, 假设 $f_1 : K \to V$ 和 $g_1 : K \to V$ 是对 $a \in A$ 满足 $f_1(a) = f(a)$ 和 $g_1(a) = g(a)$ 的尾函数和首函数, 而对 $e \in E$ 只满足 $\{f_1(e), g_1(e)\} = \{f(e), g(e)\}$. 定义 $f_1' : K' \to V$ 和 $g_1' : K'' \to V$, 使得定义 3.1 的性质 2) 对 f_1, g_1, f', g' 成立 (因此, 映射 α 和 β 保持不变), 那么 h, f_1, g_1 满足定义 3.1 中的性质 3). 反之, 如果给定 h, f_1, g_1 满足性质 3), 那么 f_1, g_1 与 f, g 有上述关系. 简单地说, 对于给定的关联函数 h 和双射 α 和 β, 尾函数和首函数 (或等价地, f' 与 g') 在允许对换的意义下, 是唯一确定的.

以下讨论关联函数的各种变化. 例如, 当 $A(H) \neq \varnothing$ 时, 用集合 $\{f(a), g(a)\}$ 替换 $h(A(H))$ 的每一个有序对 $(f(a), g(a))$, 得到的图 G_H 称为 H 的底图. 反之, 若把图 G 里的一些边 e 用对应的弧 a_e 替换, 则得到的混合图 H_G 称为 G 的部分定向. 若 $H_G = D_G$ 是有向图, 则称 D_G 为 G 的定向. 如果对每一顶点 $v \in V(D_G) = V(G)$[①] 都有 $\mathrm{id}_{D_G}(v) = \mathrm{od}_{D_G}(v)$, 那么 D_G 是 G 的一个**欧拉定向**. 由这个定义可以看出, 仅当 G 是欧拉图时才有欧拉定向. 如果混合图 $H = V\cup E\cup A$ 的每一条弧 $(x, y) \in h(A)$ 都用一条反向弧 (y, x) 替换, 那么称新的混合图为 H 的**反定向**, 记为 H^{R}. 显然, 一个欧拉有向图的反定向图也是欧拉有向图. 在很多实例中, 只要求 H 的部分弧反向, 因此, 上述符号需要加以推广: 用 a^{R} 或 a^- 表示弧 a 的反向弧, 即如果 $a = (x, y)$, 那么 $a^{\mathrm{R}} = a^- = (y, x) := (x, y)^{\mathrm{R}}$. 如果 $A_0 \subseteq A(H)$, 那么 $A_0^{\mathrm{R}} := \{a^{\mathrm{R}} \mid a \in A_0\}$. 对 $H = V\cup K$, $K_0 \subseteq K$, K_0 的边 (弧) 导出 (混合) 子 (有向) 图 $\langle K_0\rangle$ 定义为满足 $V(H_0) = \{v \in V \mid \exists k \in K_0, 使得\ v \in \overline{k}\}$ 和 $K(H_0) = K_0$ 的 (混合)(有向) 图 H_0, 而相应的关联函数为 $h_0 := h|_{K_0}$ (映射 $\alpha_0, \beta_0, f_0', g_0', f_0, g_0$ 可以类似地定义). 特别地,

① 从现在起, D_G 的下标表示 D_G 是由 G 得来的, 此后将不加说明地使用.

记 $H-K_1 := V(H)\cup\langle K-K_1\rangle$，其中 $K_1 \subseteq K$. 若 $K_1 = \{k\}$，则用 $H-k$ 代替 $H-\{k\}$. 类似地，对于 $V_0 \subseteq V(H)$，V_0 的顶点导出 (混合) 子 (有向) 图 $\langle V_0\rangle$ 由 $V(\langle V_0\rangle) = V_0$ 和 $K(\langle V_0\rangle) = h^{-1}(V_0\times V_0\cup\mathcal{P}_2(V_0)\cup V_0)$ 所组成，即 $\langle V_0\rangle$ 的边和弧恰是由 H 中连接 V_0 中顶点对的边和弧所构成的. 对于 $V_1 \subseteq V(H)$，定义混合图 $H - V_1 := \langle V(H) - V_1\rangle$，即在 H 中去掉一个顶点 v，意味着 H 中关联于 v 的边和弧也同时去掉. 在大多数情况下，我们用“导出”代替“边导出”或“弧导出”，或“顶点导出”，因为符号 K_0 和 V_0 已显示出导出 (混合) 子 (有向) 图的元素集合. 一般地，一个 (混

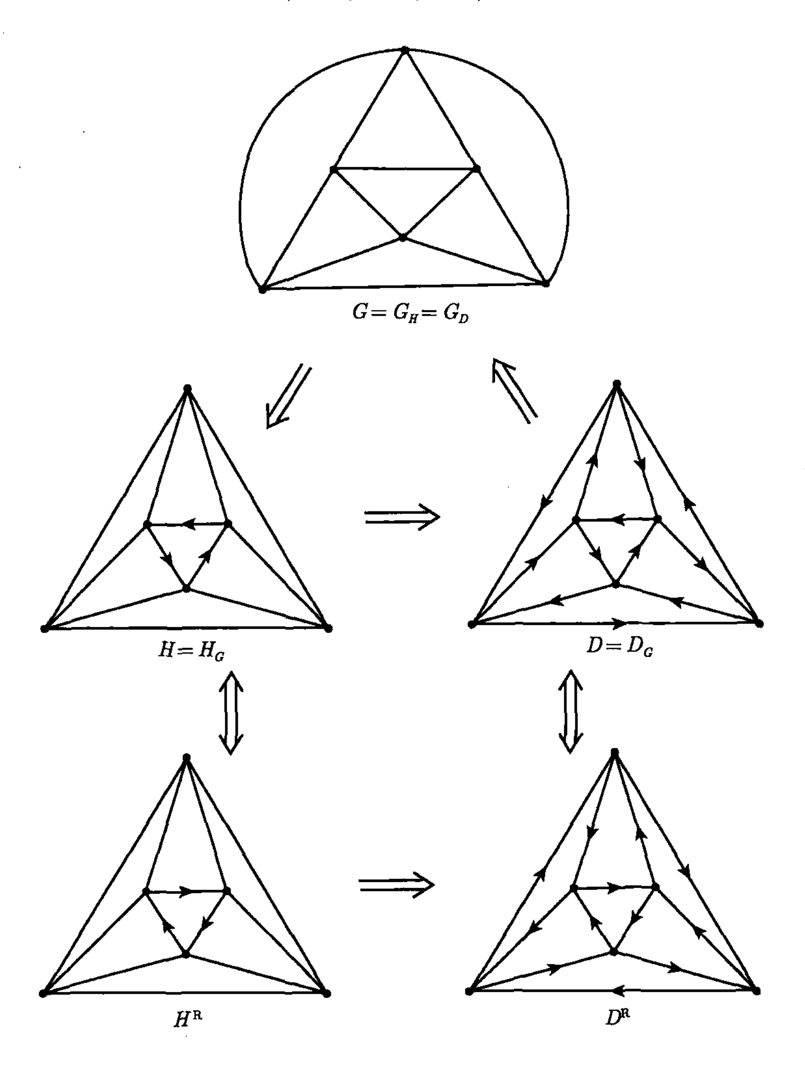


图 3.3　(欧拉) 图 G，G 的部分定向 H，由 H 扩充为 G 的 (欧拉) 定向 D，由 H 的反定向 H^{R} 得到 D 的反定向 D^{R}

合) 子 (有向) 图 $H_0 \subseteq H$ 定义为 $V(\langle K_0\rangle) \subseteq V_0 \subset V(H)$, $H_0 := \langle K_0\rangle \cup (V_0 - V(\langle K_0\rangle))$，即 H_0 是从 H 中先去掉 $K^0 = K(H) - K_0$ 得 $H' := H - K^0$，然后从 H' 中去掉 $V' = V(H) - V_0 \subseteq V_0(H')$ 得到. 若 H_0 是 H 的一个 (混合) 子 (有向) 图，则称 H 为 H_0 的母图. 设 H 是一个无孤立点的混合图，H_1 是 H 的一个混合子图，定义 $H - H_1 := \langle K(H) - K(H_1)\rangle = H - K(H_1) - V_0(H - K(H_1))$，即从 H 中去掉 H_1 的所有边和弧，然后去掉使得 $d_H(x) = d_{H_1}(x)$ 的一切顶点 x. 因此，$H - H_1$ 无孤立顶点. 最后，如果 $H_0 \subseteq H$ 且 $V(H_0) = V(H)$，则称 H_0 支撑 H. 对 $A_0 \subseteq A(H)$，在 H 中将 A_0 中的弧反向后得到的混合图记为 $(H - A_0) \cup A_0^{\mathrm{R}} := \langle (K(H) - A_0) \cup A_0^{\mathrm{R}}\rangle$，相应的关联函数 h_1 为 $h_1|_{K(H)-A_0} := h|_{K(H)-A_0}$，而对 $a \in A_0$，$h_1(a) = h(a)^{\mathrm{R}}$. 注意，$G_H = G_{(H-A_0)\cup A_0^{\mathrm{R}}}$ (图 3.3、图 3.4).

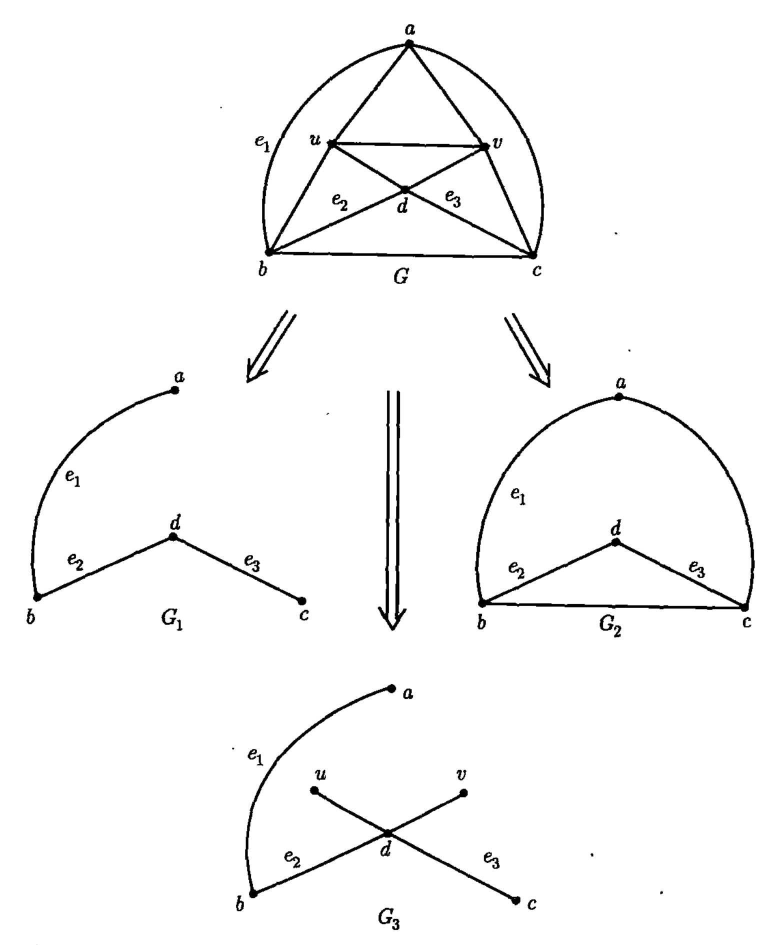


图 3.4 图 G，边导出子图 $G = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$，顶点导出子图 $G_2 = \langle V(G_1)\rangle \neq G_1$，支撑子图 G_3

注 3.6 把一个混合图 $H=V\cup E\cup A$ 作为由关联函数 h 所确定的具有某种结构的集合，这种处理方法是不常见的，但对于本书而言，却是极为实用的. 在图论的许多理论研究方面，人们只关心简单的混合图，在这种情况下，可以回避关联函数的概念，而用 $E\subseteq\mathcal{P}_2(V)$ 和 $A\subseteq V\times V$ 取而代之. 原则上，可以用插入 2- 价顶点的方法，把本书的许多讨论限制在简单图上. 但是大部分欧拉图论的内容允许有多重边、多重弧及环. 鉴于这些考虑，我们先用严格的方式通过各种映射定义图的一些基本元素，而后才给出比较形象的描述.

注 3.7 对于 $A_0\subseteq A(H)$ 及 A_0^{R}，$A_0\cap A_0^{\mathrm{R}}\neq\varnothing$ 当且仅当 A_0 包含环 (x,x)，其中 $x\in V(H)$. 但在第 9 章里，我们将讨论把一个环 $xx\in E$ 视为可以双定向的情形. 由于映射 f',g',f,g，即半边半弧的使用，这种性质是自然的.

注 3.8 当讨论具有多重边和多重弧的混合图时，关联函数的应用在某种意义上是实质性的 (见注 3.6). 应用关联函数的另一个较大的优越性是：在许多讨论中，将由一个给定的混合图 $H=V\cup E\cup A$ 导出一个形如 $H'=V'\cup E\cup A$ 的混合图，即在某些图的变换里，将改变顶点集 V，而不改变 $K=E\cup A$，也就是把 K 视为独立于 V，而通过关联函数与 V 相联系的集合 (见定义 3.1). 当 $K=K(H)$ 是用边和 (或) 弧的链表形式给出，即使用**标号边或弧** (标号可以是整数) 时，关联函数的方法特别有用.

3.3 导出子图

设 $H=V\cup E\cup A$ 为一个混合图，并且假定 $E\cup A\neq\varnothing$，构造新的混合图

$$H_1=(H-b)\cup\{z,b^*,b^{**}\},$$

其中 z 为一个新的顶点，b^*,b^{**} 为新的边和 (或) 弧，并且当 $b=xy$ 时，$b^*=xz$，$b^{**}=zy$，而当 $b=(x,y)$ 时，$b^*=(x,z)$，$b^{**}=(z,y)$ (可能 $x=y$). 称 H_1 为由 H **细分** b 而得到的. 细分的逆运算是**压平** H_1 的顶点 z，即用一条边或弧替换 2- 价点 z 的两条关联边或弧. 两个混合图 H 和 H^* 称为**同胚**的 (简记为 $H\approx H^*$)，如果 $H=H^*$ 或者它们中的一个可由另一个通过一系列边或弧的细分或压平而得到. 显然，若 H^* 能由 H 通过一系列的细分和压平运算而得到，那么 H 也可以由 H^* 通过一系列相反顺序的压平和细分而得到. 对每一个混合图 H，如果 H 的每一个 2 正则边导出子图都有 H 中的一个非 2- 价顶点，并且每一个顶点 $v\in V_2(H)$ 都有 $a^+(\{v\})=a^-(\{v\})$，则存在一个混合图 H_0，使得 $H\approx H_0$ 且 $\delta(H_0)>2$. 如果对混合图 H 中的每一个 $b\in E\cup A$ 都进行细分，则得到的图称为 H 的**细分混合图**，记为 $S(H)$. 用 s_k 表示细分 k 时引进的顶点，显然，$p_{S(H)}=p_H+q_H$ 和 $q_{S(H)}=2q_H$. 对每一个混合图 H，$S(S(H))$ 都是简单的. 在一般情况下，存在简单

图 H_1，使得 $H_1 \approx H$ 且 $p_{H_1} \leqslant p_{S(S(H))}$. 注意：若 H 是欧拉 (有向) 图，则 $S(H)$ 是欧拉的. 这就说明为什么在考虑欧拉 (有向) 图时，只限于简单的 (有向) 图. 此外，可以把 A_{s_k} (E_{s_k}) 中的元素理解为 k 的半弧 (半边).

当 H 是一个图 $G = V \cup E$ 或有向图 $D = V \cup A$，**线图** $L(G)$ (**有向线图** $L(D)$ 定义为 $V(L(G)) = E$ ($V(L(D)) = A$)，并且 $ef \in E(L(G))$ ($(a,b) \in A(L(D))$) 当且仅当对某个 $v \in V(G)$ ($v \in V(D)$) 有 $e, f \in E_v$ ($a \in A_v^-, b \in A_v^+$). 对简单图 G，$L(G)$ 是欧拉的当且仅当对每个 $e \in E(G)$，$d_G(e)$ 是偶数. 如果 G 是 k 正则简单图，则 $L(G)$ 是 $(2k-2)$ 正则简单图 (图 3.5)，从而是欧拉的.

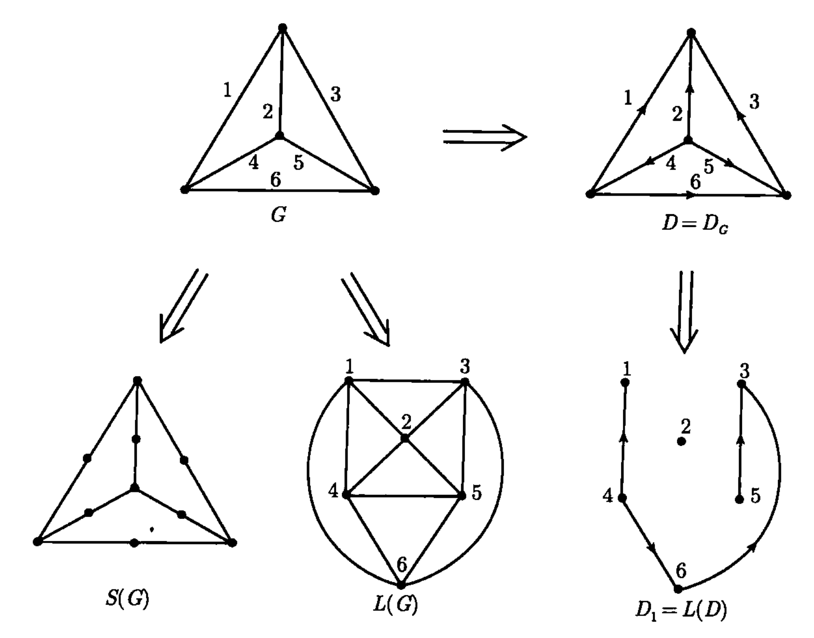


图 3.5 图 G, 它的细分图 $S(G)$ 和 G 的线图 $L(G)$. G 的定向图 D 和 D 的有向线图 $D_1 = L(D)$ 满足关系 $G_{D_1} \subset L(G)$

下面的概念在本书中起着重要作用. 设 H 是混合图，$v \in V(H)$ 且 $d = d(v) > 2$，假设 $K_v^* = E_v^* \cup A_v^*$ 是由半边和 (或) 半弧给出的链表. 不失一般性，设 $K_v^* = \{b_1', b_2', \cdots, b_d'\}$，又设 $v_{i,j} \notin V(H)$ 是一个新点，构造一个新的混合图 $H_{i,j}$，

$$V(H_{i,j}) := V(H) \cup \{v_{i,j}\}, \quad K(H_{i,j}) := K(H),$$

对应的映射 $f_{i,j}', g_{i,j}', f', g'$ 满足以下关系：

$$f_{i,j}' \cup g_{i,j}'|_{K' \cup K'' - \{b_i', b_j'\}} \equiv f' \cup g'|_{K' \cup K'' - \{b_i', b_j'\}},$$

$$E_{v_{i,j}}^* \cup A_{v_{i,j}}^* = \{b_i', b_j'\} \cup K'(H_{i,j}) \cup K''(H_{i,j}),$$

即 $H_{i,j}$ 可按下述方式由 H 得到：在 H 中，令半边和 (或) 半弧 $b'_i, b'_j \in E^*_{v_{i,j}} \cup A^*_{v_{i,j}}$ 关联于新的顶点 $v_{i,j}$，从而使 $v_{i,j}$ 在 $H_{i,j}$ 中成为 2- 价顶点，而其余关联关系保持不变. 称 $H_{i,j}$ 为 H **分裂边和 (或) 弧** b_i **和** b_j **得来**. 从 H 变换到 $H_{i,j}$ 的过程称为**分裂运算或分裂程序**. 注意：$b_i = b_j$ 当且仅当 $b_i = b_j$ 是一个环，但在大多数情况下，b'_i 和 b'_j 将对应于 K 中不同的元素. 为了方便起见，有时也用 $H_{i,j}$ 表示同胚于 $H_{i,j}$ 且具有顶点集为 $V(H)$ 或 $V(H)-\{v\}$ (若 $d(v)=4$) 的混合图 (即在 $H_{i,j}$ 中压平 $v_{i,j}$ 后的混合图). 这在上下文中是易于区分的. 同样，为了方便起见，将用 v 表示新顶点 $v_{i,j}$，并对原来的 v 和新的 v 加以区分. 由 $H_{i,j}$ 产生 H 的运算，包含在下述更一般的概念中：如果 $d(v)=2k$，那么对顶点 v 执行 k 次分裂运算得到的图记为 G_v (注意：$|V_2(G_v)| = |V_2(G)| + k$). 仅当这些分裂运算被确定后，$G_v$ 才是唯一的.

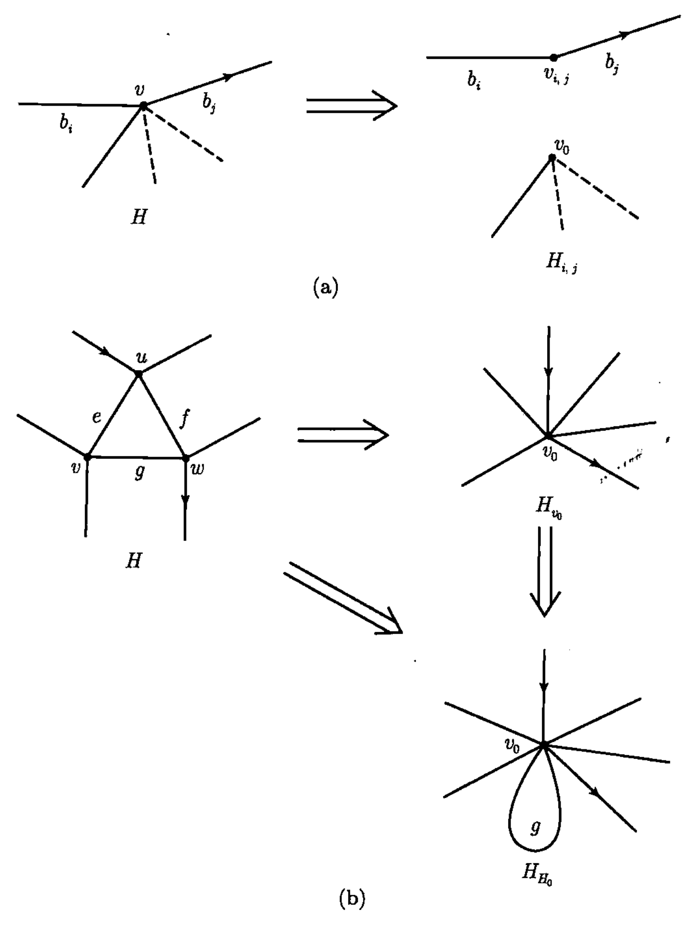


图 3.6　(a) 由 H 分裂 b_i 和 b_j 得到 $H_{i,j}$. (b) 由 H 收缩 $V_0=\{u,v,w\}$ 得到 H_{V_0}，$H_0=\langle\{e,f\}\rangle$ 得到 H_{H_0}

设 $H = V \cup K$ 是一个混合图，$V_0 \subseteq V$. 令 $v_0 \notin V$ 是一个新顶点，定义一个新的混合图 H_{V_0} 如下：

$$V^0 := V(H_{V_0}) = V \cup \{v_0\} - V_0,$$

$$K^0 := K(H_{V_0}) = K - \{k \in K \mid \{f(k), g(k)\} \subseteq V_0\},$$

并且保持每一个 $v \in V - V_0$ 在 H_{V_0} 中的关联关系，而当 $f(k) \in V_0$ $(g(k) \in V_0)$ 时，令 $f_0(k) = v_0$ $(g_0(k) = v_0)$，称 H_{V_0} 是将 H 中的 V_0 **收缩为** v_0 的图. 特别地，当 $V_0 = \{v, w\}$ 且 $k \in K$ 连接 v 和 w 时，记 H_{V_0} 为 H_k，并且称 H_k 为 H **收缩边 (弧)** k 得到的图. 在某些情况下，将需要把某些 (不必全部) $K - K^0$ 中的边 (弧) 表示为 H_{V_0} 中过 v_0 的 (有向) 环. 特别地，若 $H_0 \subseteq \langle V_0 \rangle_H$ 且 $V(H_0) = V_0$，则 $H_{H_0} := H_{V_0} \cup \Lambda_0$，其中 $\Lambda_0 = K(\langle V_0 \rangle)_H - K(H_0)$ 是 H_{H_0} 中过 v_0 的环的集合. 因此，H_k 可以代表两个不同的混合图，这要看 k 是被当成开边 (弧) 还是闭边 (弧) (当 k 是闭的时，k 可看成子图 H_0). 上述这些概念可用图 3.6 来说明.

3.4 路径、迹、路、圈、树；连通度

本节的概念和结果不仅为本书服务，也是整个图论的重要内容.

定义 3.9 设 $H = V \cup E \cup A$ 是一个混合图，$K = E \cup A$，若一个顶点和边 (弧) 的交错序列

$$W := v_0, b_1, \cdots, b_i, v_i, b_{i+1}, \cdots, b_n, v_n$$

满足 $v_i \in V(i = 0, \cdots, n)$，$b_i(i = 1, \cdots, n)$，$\{f(b_i), g(b_i)\} = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，则称 W 为**一条边 (弧) 序列**. 用 $E(W)$ $(A(W))$ 表示 W 中边 (弧) 的集合，用 $\lambda_W(b)$ 表示 $b \in K$ 在 W 中出现的次数. 置 $K(W) = E(W) \cup A(W)$，$V(W) = \{v_i \mid i = 0, \cdots, n\}$. 形如 $b_i, v_i, b_{i+1}(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 的子序列称为 W 的**一节**；形如 $S_{r,s} = v_r, b_{r+1}, \cdots, b_s, v_s$ 的子序列，若满足 $v_r = v_s$，并且 $S_{r,s}$ 的每一节也是 W 的一节，则称 $S_{r,s}$ 为 W 的**一段**. 设 $S_{r,s}$ 是 W 的一段，称 W 的子序列 $b_r, S_{r,s}, b_{s+1}$ 为一个**扩充段**.

1) 对于 $b_i \in A(1 \leqslant i \leqslant n)$，若 $f(b_i) = v_{i-1}$ (此时，$g(b_i) = v_i$)，称 W 为一个**途径**，它起始于 v_0，终止于 v_n (或 W 连接 v_0 和 v_n)，并记 $W = W(v_0, v_n)$. 当 $K(W) = A(W)$ 时，称 W 为**有向途径**. 如果 $v_0 = v_n$ $(v_0 \neq v_n)$，则称途径 W 是**开 (闭) 的**. 如果 $K(W) = K$，则称 W 为**覆盖途径**. 如果 $V(W) = V(H)$，则称 W 为 $V(H)$ **覆盖途径**. 如果覆盖途径 W，对 $\forall b \in K$ 都有 $\lambda_W(b) = 2$，则称 W 为**双迹**. 对于上述 W，n 称为 W 的**长度**，记为 $l(W)$. 如果对于两条途径 W 和 W' 有 $l(W) < l(W')$，则称 W **比** W' **短**.

2) 一条途径 W，若对 $\forall i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n$ 都有 $b_i \neq b_j$，则称 W 为一条**迹**，闭的覆盖迹称为**欧拉迹**.

3) 一条开迹 W，若满足 $l(W) = |V(W)| - 1$，则称 W 为一条路；若满足 $l(W) = |V(W)|$，则闭迹 W 是一个圈，在这种情况下，$n > 0$①. 一个 $V(H)$ 覆盖圈 (路) 称为**哈密顿圈 (路)**. 若 H 有哈密顿圈，则称 H 为**哈密顿的**. 若 H 的每一条边 (弧) 都在 H 的一个哈密顿圈上，则称 H 为**边 (弧) 哈密顿的**. 一个圈 C，若 $K(H - V(C)) = \varnothing$，则称 C 为**控制圈** (图 3.7)，类似地，可以定义**控制迹**. 3- 正则图的控制圈称为**塔特圈**. 只有一个顶点而没有边 (弧) 的路，称为**平凡路**.

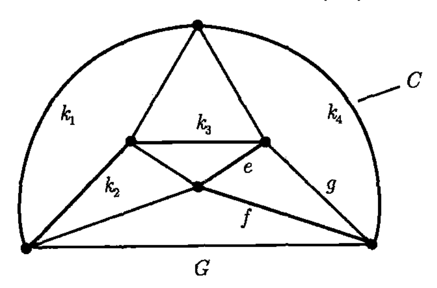


图 3.7　G 有哈密顿圈 C，$E(C) = \{k_1, k_2, k_3, e, f, k_4\}$. 若用 g 代替 e 和 f，就得到一个控制圈

4) H 中的两个顶点 x 和 y 之间的**距离** $d(x, y)$，定义为连接 x 和 y 的最短路的长度；若 x 和 y 之间不存在路，则定义 $d(x, y) := \infty$.

定义 3.10　混合图 $H = V \cup K$ 的一组不必互不相同的圈的集族 $S = \{C_1, \cdots, C_m\}$，若满足 $K(S) := \bigcup\limits_{i=1}^{m} K(C_i) = K$，则称 S 为 H(或 $K(H)$) 的**圈覆盖**. 若圈覆盖 S 还满足对于 $1 \leqslant i < j \leqslant m$ 有 $K(C_i) \cap K(C_j) = \varnothing$，则称 S 为 H 的**圈分解**. 为了方便起见，称 $S = \varnothing$ 为 H 的圈分解当且仅当 $K(H) = \varnothing$. H (或 $K(H)$) 的**路 (圈) 分解**是指 H 的弧 (边) 不交的路 (圈) 的集合 S，使得对任意 $k \in K$，k 恰好在 S 的一个成员里 (图 3.8). 类似地，可定义**迹分解**. 两两顶点不交的圈的集合，

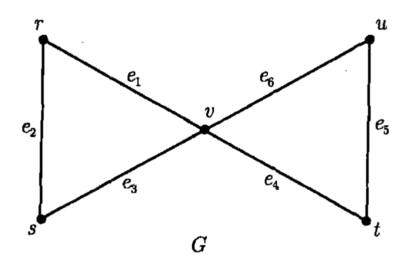


图 3.8　G 的闭覆盖途径：$v, e_1, r, e_2, s, e_3, v, e_4, t, e_5, u, e_6, v$ 是一条欧拉迹. $S = \{C_1, C_2\}$ 是 G 的圈分解，其中 $C_1 = \{v, e_1, r, e_2, s, e_3, v\}$，$C_1 = \{v, e_4, t, e_5, u, e_6, v\}$

① 圈也常称为回路，而闭迹也常称为圈. 注意一个圈至少有一条边 (弧).

称为平行圈组.

下面继续给出一些小的结果.

引理 3.11 设 W 是起始于 v_0，终止于 v_n 的 H 的一条途径，则 H 中存在起始于 v_0，终止于 v_n 的路.

引理 3.12 设 $W(x,y)$ 是起始于 $x=v_0$，终止于 $y=v_n$ 的途径，而 $W(y,z)$ 是起始于 $y=v'_0$，终止于 $y=v'_n$ 的途径，那么 $W:=W(x,y),W(y,z)$ 是起始于 x，终止于 z 的途径，这两条途径的连接点是 $y=v_n=v'_0$.

引理 3.11 不可能加强进而推出下述结论：若 W_1 是起始于 $v:=v_0=v_n$，终止于 v 的闭途径，则 H 包含起始于 v，终止于 v 的圈. 这是因为当 H 是一个无向图时，一条途径 W 的逆顺序也是一条途径. 因此，由引理 3.12 知，$W_1=W,W^{-1}$ 是起点等于终点的途径，故当 W 是一条路时，则 $W_1=W,W^{-1}$ 不可能含圈. 但是若 H 是有向图，那么引理 3.11 可以加强为如下引理：

引理 3.13 若 W 是有向图 H 起始于 $v=v_0=v_n$，终止于 v 的闭迹，并且 $K(W)\neq\varnothing$，那么 W 有子序列 C 为起始于 v，终止于 v 的圈.

引理 3.11 和引理 3.12 引出下述定义和结果：

定义 3.14 若图 G 中任意两个顶点 $x,y\in V(G)$ 之间，都有一条途径 $W(x,y)$ (并依据引理 3.11 有一条连接 x 和 y 的路)，则称 G 为**连通的**. 一个有向图 D 或混合图 H，若 G_D 和 G_H 连通，则称它们为**弱连通的**. 在不引起混淆的情况下，对于 $A(H)\neq\varnothing$ 的混合图 H，弱连通也称为连通. 不具有 (弱) 连通性质的图被称为**不连通的**. 设 H 是一个混合图，若对任意两个顶点 $(x,y)\in V(H)$，都同时存在路 $P(x,y)$ 和 $P(y,x)$，则称 H 为**强连通的**. $G(H)$ 的一个极大连通 (弱连通)(混合) 子 (有向) 图，称为一个**连通 (弱连通) 分支**. 有向图 D 的一个**强连通分支**为 D 的一个极大强连通子有向图 (图 3.9).

检验一个 (有向) 图的 (强) 连通性，不必检查它的所有顶点对.

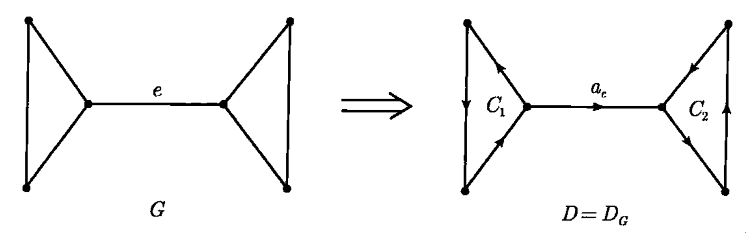


图 3.9 连通图 G 和 G 的定向 D. D 的两个强连通分支 C_1 和 C_2，也是 $D-a_e$ 的弱连通分支，$G-e$ 不连通

引理 3.15 设 $G(D)$ 是一个 (有向) 图，$V=V(G)\ (=V(D))$，取 $v\in V$ 为一固定顶点. $G(D)$ 是 (强) 连通的，当且仅当对任意 $w\in V-\{v\}$，G 中有路 $P(v,w)$

(D 中有路 $P(v,w)$ 和 $P(w,v)$).

每一个 $G(D,H)$ 是其不交的 (弱连通) 分支的并. 因此，$G(D,H)$ 的 (弱连通) 分支的个数 $c(G)(c(D),c(H))$ 是唯一确定的. 同样，一个有向图的强连通分支的个数也是唯一确定的. H 不连通当且仅当 $c(H)>1$.

注 3.16　设 W 是 H 的一条途径，W_1 和 W_2 分别是 W 的边 (弧) 和顶点组成的子序列，即

$$W_1=b_1,b_2,\cdots,b_n,\quad W_2=v_0,v_1,\cdots,v_n.$$

由定义 3.9 的 1) 知，若 H 是简单的，则只需知道 W_1 或 W_2 中的一个就可以重新构造出 W. 即使 H 是非简单的有向图，有时也可以只考虑形如 (v_i,v_{i+1}) 的任一弧 a，而不必考虑连接 v_i 和 v_{i+1} 的某条固定的弧. 上述定义的序列 W_1 和 W_2 也称为途径，对于迹、路、圈等，将使用类似的术语. 例如，若把 W_1 和 $K(H)$ 中的元素同时视为闭 (开) 边和弧，那么一个圈分解就可视为 $K(H)$ 的一个划分. 类似地，将不把定义 3.9 的 3) 中的圈 C 或路 P 与混合图 $\langle K(C)\rangle_H,\langle K(P)\rangle_H$ 加以区分[①]. 虽然这个约定可能减弱证明的严格性，但是决不会使证明模糊. 同理，若上述的 W_2 对应于一条路，那么有时将用 $\langle W_2\rangle$ 表示这条路 (若不引起混淆，W_2 也表示无序集). 在 W_2 是圈的情况下，我们也用 $\langle W_2-\{v_n\}\rangle$ 表示 $\langle W_2\rangle$.

定义 3.17　设 $H=V\cup K$ 是混合图，给定 $V_0\subseteq V$ 以及 $K_0\subseteq K$.

1) 若 $c(H-V_0)>c(H)$ $(c(H-K_0)>c(H))$，则称 V_0 (K_0) 为 H 的**分离顶点 (边或弧) 集**，有时也称 V_0 (K_0) **分离** H. 如果 H 是不连通的，则称空集分离 H. 有时可简称 V_0 为**顶点割**，K_0 为**边割或割集**. 若 K_0 是 H 的一个割集，但是 K_0 的任何一个真子集都不是 H 的割集，则称 K_0 为 H 的一个**极小割集**. 含有元素个数最小的割集称为 **最小割集** (因此，最小割集必是极小割集，但是反之不对). 若 $K_0\neq\varnothing$，$V_0\neq\varnothing$ 且 $c(H-(V_0\cup K_0))>c(H)$，则称 $V_0\cup K_0$ 为**混合割** (这里的混合是指 $V_0\cup K_0$ 既包含顶点也包含边或弧). 含有 n 个元素的割集称为 n-割. 注意：一个非空的边界是一个分离边 (或弧) 集.

2) 对于 $|K_0|=1$ 且 K_0 分离 H 的特殊情况，称 K_0 的元素为一个 **桥**. 类似地，若 $V_0=\{v_0\}$ 分离 H 或者 $0<\lambda_{v_0}\neq d(v_0)-1$，则称 v_0 为 **割点** (注意：$\lambda_{v_0}=d(v_0)-1$ 意味着 v_0 或者是端点，或者是关联一条环的 2 次顶点).

3) 一个混合图，如果它不含割点，则称它为**不可分离的**[②]. H 的极大不可分离 (有向混合) 子图 B，称为 H 的**块**. H 中包含顶点 v 的块的个数称为 v 的**块数**，记为 $b_n(H,v)$. 若 H 的块 B 恰含 H 的一个割点，则称 B 为 H 的**端块**. 若 H 是不可分离的，则 H 自身为一个块 (图 3.10).

① 多数作者不区分圈 (路) 与圈 (路) 的导出子图.

② 注意，H 的不可分离的子图 B 可能包含 H 的割点，但它不是 B 的割点.

桥与割点有如下刻画：

定理 3.18 对混合图 $H=V\cup K$，下述结论成立：

1) $k\in K$ 是 H 的一个桥，当且仅当 G_H 中没有圈包含 $e_k\in E(G_H)$ (若 $k\in E\subseteq K$，则 $e_k=k$).

2) $k\in K$ 是 H 的一个桥，当且仅当 V_H 能划分为两部分 V' 和 V''，使得对任意的 $v'\in V'$ 和 $v''\in V''$，G_H 中的每一条路 $P(v',v'')$ 必包含 $e_k\in E(G_H)$(若 $k\in E\subseteq K$，则 $e_k=k$). 此外，若 k 是一个桥，则 $H-k$ 恰有两个 (弱连通) 分支 C'，C'', 使得 $V'=V(C')$，$V''=V(C'')$.

3) 一个桥的端点是割点当且仅当 $d(v)>1$. 顺便说明，一个端边是一个桥，而一个桥不一定是端边.

4) 顶点 v 是割点当且仅当 $b_n(H,v)>1$.

5) 如果 H 无环，则顶点 v 是割点当且仅当 $V(H)-v$ 可以划分为两部分 V',V''，使得对任意的 $v'\in V'$，$v''\in V''$，G_H 中每一条路 $P(v',v'')$ 必包含 v.

6) $v\in V(H)$ 是一割点，当且仅当 H 包含 (有向混合) 子图 H_1 和 H_2，使得

$$H=H_1\cup H_2,\quad H_1\cap H_2=\{v\},$$

$d_{H_1}(v)\neq 0\neq d_{H_2}(v)$.

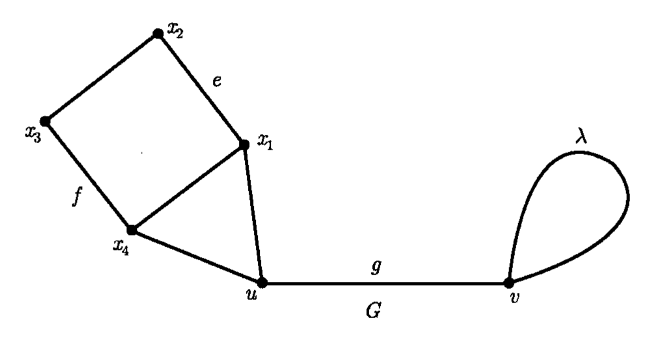


图 3.10 G 有 2- 割 $E_0=\{e,f\}$ 和桥 g，E_0 是 G 的极小割集，但不是最小割集. u,v 是 G 割点，$B_1=\langle\{\lambda\}\rangle$，$B_2=\langle\{g\}\rangle$，$B_3=\langle\{x_1,x_2,x_3,x_4,u\}\rangle$ 是 G 的块，B_1 和 B_3 是 G 的端块，B_2 不是端块

下述结果显示了块与桥和割点之间的关系：

引理 3.19 设 H 是至少有两个块的混合图，B 和 B' 是 H 的两个不同的块，则下述结论成立：

1) $B=\langle V(B)\rangle_H$，即当 H 无环时，块是没有割点的极大顶点导出子图.

2) 若 $|K(B)|>1$，则 G_B 的每一条边在 G_B 的一个圈上；若 $|K(B)|=1$，则 $K(B)$ 的元素是 H 的桥或者环.

3) 或者 $B \cap B' = \varnothing$，或者 $B \cap B' = \{v\}$ 且 v 是 H 的割点.

4) 每一个 $k \in K(H)$ 属于 H 的一个块，因此，H 的块的集合覆盖 H.

下面定义一类重要的图 (图 3.11).

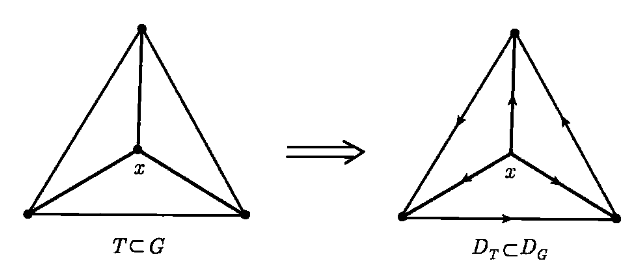


图 3.11　T 是 G 的支撑树，T 对应于 G 的定向图 D_G 中以 x 为根的出树 D_T

定义 3.20　设 H 是一个混合图.

1) 若 H 不含圈，则称 H 为**无圈的**. 若 G_H 不含圈，则称 H 为**森林**. (弱) 连通森林为树. 若 $H_0 \subseteq H$ 支撑 H (即 $V(H_0) = V(H)$) 且 H_0 是一棵树，则称 H_0 为 H 的**支撑树**.

2) 设 $H = D$ 是有向图. 树 $T \subseteq D$, $v_0 \in V(T) \subseteq V(D)$，若对每个 $v \in V(T) - \{v_0\}$，T 中存在路 $P(v_0, v)$ $(P(v, v_0))$，则称 T 为**以 v_0 为根的出树形图 (入树形图)** (或者简称 T 为**以 v_0 为根的出树 (入树)**). 如果以 v_0 为根的出树 (入树)T 支撑 H，则称 T 为**以 v_0 为根的支撑出树 (入树)**.

支撑出树 (入树) 有以下经典结果：

定理 3.21　每一个连通的混合图有一个支撑树. 对每一个强连通有向图 D 及任意 $v_0 \in V(D)$，都有一棵以 v_0 为根的支撑出树 (入树).

特别地，定理 3.21 适用于弱连通欧拉有向图，因为弱连通欧拉有向图是强连通的. 当然，不是每一个强连通有向图 D 都是欧拉的，这是因为 G_D 可能不是欧拉的 (图 3.2). 但是对于图的定向有下述结果 [ROBB39a]：

引理 3.22　一个图 G 有一个强连通定向 D_G 当且仅当 G 连通且无桥.

证明　若 D_G 强连通，则 G 连通. 以下证明 G 不可能有桥. 若不然，则对 G 的某一个桥 e，$D_G - a_e$ 和 $G - e$ 都不连通. 根据定理 3.18 的 2)，存在顶点 $x, y \in V(G) = V(G - e)$，使得每一条路 $P(x, y)$ 都包含 e. 这就意味着 D_G 不可能同时包含 x 到 y 和 y 到 x 的路，与 D_G 强连通矛盾. 因此，G 必定无桥，这就证明了必要性.

构造底图为 G 的强连通图 D 如下：由于 G 是无桥的，故 G 的每一条边必属于 G 的某一个圈，即 G 有圈覆盖 $S = \{C_1, \cdots, C_m\}$($q_G = 0, p_G = 1$ 的情形是平凡的). 因为 G 是连通的，不失一般性，假定 S 中的元素满足以下条件：对一切

$1 \leqslant i \leqslant m-1$ 有

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i} C_j\right) \cap C_{i+1} \neq \varnothing. \tag{1}$$

令 D_1 是以 C_1 为底图的有向图，这里 C_1 已变换为定向圈 C_1^D，使得 D_1 是强连通的. 假定对 $i \geqslant 1$，D_i 是强连通的有向图且 $G_{D_i} = \bigcup_{j=1}^{i} C_j$. 把 $C_{i+1} \in S$ 变换为定向圈 C_{i+1}^D (选取两种可能的定向之一)，然后定义

$$D_{i+1} = D_i \cup \left\{ a_e \in A(C_{i+1}^D) \middle| e \notin \bigcup_{j=1}^{i} E(C_j) \right\}.$$

假定存在 $v \in V(D_{i+1}) - V(D_i)$，否则，$D_{i+1}$ 就已经强连通了. 由 (1) 可知，D_{i+1} 是弱连通的. 按引理 3.15，只要证明对每一顶点 $w \in V(D_{i+1})$，$w \neq v$，D_{i+1} 中存在 v 到 w 的路 $P(v,w)$ 和 w 到 v 的路 $P(w,v)$ 即可. 我们只证明 $P(v,w)$ 的存在性，因为 $P(w,v)$ 的存在性可以类似地证明.

从 v 出发沿 C_{i+1}^D 行走，设 x 为到达 D_i 的第一个顶点，用 $P(v,x) \subset C_{i+1}^D$ 表示这条路. 如果只需考虑不在 $P(v,x)$ 上的点 w，$w \in V(C_{i+1}^D) - V(D_i)$，设 $y \in V(C_{i+1}^D) \cap V(D_i)$ 满足在 D_i 中有自 x 到 y 的路，并且 y 是 C_{i+1}^D 中自 v 到 w 的唯一路上最靠近 w 的顶点. 然后自 y 沿 C_{i+1}^D 走到 w，这样就构造出路 $P(x,w)$. 如果 $w \notin V(C_{i+1}^D) - V(D_i)$，那么 $\{x,w\} \subseteq V(D_i)$，按归纳假设，存在路 $P(x,w)$. 在任何情况下，

$$W(v,w) := P(v,x), P(x,w)$$

是 D_{i+1} 中的一条从 v 到 w 的开途径，因此，按引理 3.11，存在路 $P(x,w)$. 引理证毕.

我们还将讨论一些特殊的 (有向) 圈，它们介于定义 3.20 和引理 3.22 之间. 如果一个图恰有一个圈，则称为**单圈图**. 若一个图 G 的定向 D_G 至少含一个圈，则称 D_G 为 G 的一个**有圈定向**.

引理 3.19 尚未完全描述混合图的块和割点的结构. H 的**块–割点图** $\text{bc}(H)$定义为

$$V(\text{bc}(H)) = \{B, v \mid B \text{ 是 } H \text{ 的块}, v \text{ 是 } H \text{ 的割点}\},$$

$xy \in E(\text{bc}(H))$ 当且仅当存在 H 的某割点 v 和块 B，使得 $\{x,y\} = \{B,v\}$ 且 $v \in V(B)$.

命题 3.23 $\text{bc}(H)$ 无圈，$\text{bc}(H)$ 是树当且仅当 H 是弱连通的.

对于有向图和它的强连通分支，命题 3.23 也有相应的结果. 但与图不同的是，有向图的一条弧不必属于一个强连通分支. 有向图的一些性质总结如下：

命题 3.24　设 D 是有向图且 $V(D) \neq \varnothing$，则下述结论成立：

1) 如果 D 无圈，则 D 至少有一个源且至少有一个汇.

2) 如果 $S := \{D_1, \cdots, D_r\}$ 是 D 的所有强连通分支的集合，则 $\{V(D_1), \cdots, V(D_r)\}$ 是 $V(D)$ 的一个划分 (注意：D_i 可能是一个顶点，此时称 D_i 为平凡的).

3) S 如 2) 中所定义，$A(S) := \bigcup\limits_{i=1}^{r} A(D_i)$，那么 D 的一弧 a 不属于 D 的任一个圈当且仅当 $a \in A(D) - A(S)$.

4) S 和 $A(S)$ 分别如 2) 和 3) 所定义，记 $V^i := V(D_i)(1 \leqslant i \leqslant r)$，$H^- := H - A(S)$，并构造**约化有向图**

$$D_{\text{red}} := (\cdots((H^-_{V^1})_{V^2})\cdots)_{V^r},$$

则 D_{red} 无圈，并且 D_{red} 与集合 V^i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 的收缩顺序无关.

5) D 包含强连通分支 D' 和 D''，使得 $a^+(V(D')) = 0 = a^-(V(D''))$. 如果 D 既无源也无汇，则它们是非平凡的.

6) 如果 D 恰有一个强连通分支 D'，使得 $a^+(V(D')) = 0$，则对任意 $v \in V(D')$，D 有一棵以 v 为根的支撑入树.

图 $\text{bc}(H)$ 与以下定义的交图很相似 (但交图不是 $\text{bc}(H)$ 的特殊情形)：令 $S = \{M_1, \cdots, M_k\}(k \geqslant 1)$ 是 (不必不同的) 集合 M_i 的有限族，定义**交图** $I(S)$ 如下：

$$V(I(S)) = S, \quad E_{M_i} \cap E_{M_j} \cap E(I(S)) \neq \varnothing \leftrightarrow (i \neq j \wedge M_i \cap M_j \neq \varnothing).$$

这里假定 $|E_{M_i} \cap E_{M_j}| \leqslant 1$，因此，$I(S)$ 是简单图. 在某些情况下，允许 $I(S)$ 是多重图，此时假定 $|M_i \cap M_j| < \infty$，并且对 $i \neq j$，$e_{i,j} \in E_{M_i} \cap E_{M_j}$ 定义

$$\lambda(e_{i,j}) = |M_i \cap M_j|.$$

对于交图有下述结论：

命题 3.25　设 H 是混合图，$S = \{H_1, \cdots, H_m\}$ 是 H 的弱连通子图 H_i 构成的集族，$m \geqslant 1$. 如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i = H$ (即 S 覆盖 H)，那么 H 的弱连通分支与 $I(S)$ 的分支之间存在一一对应. 这个命题对 $I(S)$ 的两种可能的定义都成立.

一个简单图 G 的线图可以解释为 $M_i := \{\bar{e}_i\}$ 的 (简单) 交图，其中 $E(G) = \{e_1, \cdots, e_q\}$.

下述结果被许多作者频繁使用，它将在本书中起到重要作用. 对于图的情形，其最早的证明见 [FLEI76a, Satz 1].

引理 3.26(分裂引理)　设 H 是 (弱) 连通无桥 (混合)(有向) 图. 假定存在 $v \in V(H)$，使得 $d(v) > 3$. 分别分裂 $b_1, b_2 \in K_v$ 和 $b_1, b_3 \in K_v$，以形成 $H_{1,2}$ 和

$H_{1,3}$(见 3.3 节), 若 v 是 H 的割点, 则假定 b_1 和 b_3 在 H 的不同块里, 那么 $H_{1,2}$ 和 $H_{1,3}$ 中至少有一个 (弱) 连通且无桥. 特别地, 当 v 是割点时, $H_{1,3}$(弱) 连通且无桥. 最后, 若 $B \subseteq H$ 是一个块且满足 $\{b_1, b_2, b_3\} \subseteq K_v \cap K(B)$, 则 $H_{1,2}$ 和 $H_{1,3}$ 都是连通的.

证明 以下只讨论 $G = H$ 为一个无向图的情形. 置 $e_i := b_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$, 若这些边中有一条是环 λ, 那么对 $j = 2$ 或 $j = 3$, $G_{1,j}$ 等同于细分 $G - \lambda$ 中的一条边. 而在一个连通无桥的图里去掉一个端块或细分一条边, 所得的图仍连通无桥 (见命题 3.23) (注意: 一个环是一个端块). 因此, 不失一般性, 假定 $e_i \notin \Lambda(G) (i = 1, 2, 3)$. 另外, 由于在 G 或 $G_{1,j}$ 中, 去掉或增加环既不产生桥, 也不改变桥的个数, 更不影响 G 或 $G_{1,j}$ 的连通性, 因此, 可以假定 $\Lambda(G - \{e_1, e_2, e_3\}) = \varnothing$, 从而 $\Lambda(G) = \varnothing$. 因为 G 是无桥的, 每一边 $e \in E(G)$ 包含于某一个圈 $C(e) \subset G$ (见定理 3.18 的 1)). 这就意味着当且仅当 $e_j \notin C_1 := C(e_1)$ 被变换为 $G_{1,j}$ 中连接 $v_{1,j}$ 和 v 的一条路 P_1. 由这一事实可以得到下述结果:

1) 若 $P_1 \subset G_{1,j}$ 存在, 则 $G_{1,j}$ 的连通性意味着对任意 $x \in V(G) - \{v\}$, 存在路 $P(x, v) \subset G$, 它或者是 $G_{1,j}$ 中连接 x 和 v 的路, 或者在 $P(x, v) \cup P_1$ 中包含 $G_{1,j}$ 连接 x 和 v 的一条路 (见引理 3.11、引理 3.12 和引理 3.15).

由 1) 可推出如下结论:

2) 或者 $G_{1,2}$ 连通, 或者 $v_{1,2}$ 和 v 属于 $G_{1,2}$ 的不同分支, 并且 e_1, e_2 都不是 $G_{1,2}$ 的桥 (注意: 在后一种情况下 $e_1, e_2 \in C_1$, 从而可以应用定理 3.18 的 1)). 故 $\{e_1, e_2\}$ 是 G 的 2- 割当且仅当 $G_{1,2}$ 不连通.

3) 在任何情况下, $G_{1,3}$ 是连通的; 否则, $\{e_1, e_3\}$ 是 G 的 2- 割 (见 2) 中最后一句), 这就蕴涵着 v 是 G 的一个割点且包含在块 $B_1 \supset \{e_1, e_3\}$ 和 $B_2 \supset \{e_2\}$ 中, 这与 e_1 和 e_3 的选取矛盾 (见定理 3.18 的 4) 和 5) 以及上述结论 2) 的第一句话).

$G_{1,j}$ 的另一个性质表述如下:

4) 若 $G_{1,j}$ 连通且有桥, 那么每一条 $P(v_{1,j}, v)$ 路内包含 $G_{1,j}$ 的所有桥. 若不然, 即有一条 $P(v_{1,j}, v)$ 路 P_0 不含 $G_{1,j}$ 的一个桥, 那么这个桥也是 G 的一个桥 (见定理 3.18 的 2), 并注意到收缩 $v_{1,j}$ 和 v 得到 G, 并且将 P_0 变换为 G 的一个圈. 这与 G 无桥矛盾.

以下分两种情况讨论:

I) v 是 G 的割点. $G_{1,3}$ 是连通的 (见 3)). 由假设 e_1 和 e_3 属于 G 的不同块, 存在圈 $C_1 \supset \{e_1\}$ 和 $C_3 \supset \{e_3\}$. 由定理 3.18 的 5)、引理 3.19 的 3) 和命题 3.23 推出 $C_1 \cap C_3 = \{v\}$. C_r 对应于 $G_{1,3}$ 中的路 $P_r (r = 1, 3)$ (见前面 1) 的证明), 并且 $P_1 \cap P_3 = \{v_{1,j}, v\}$, 从而由 4) 推出 $G_{1,3}$ 无桥. 故当 v 是割点时, 引理成立.

II) v 不是割点. 由 2), 3) 和定理 3.18 的 6) 知, $G_{1,2}$ 和 $G_{1,3}$ 都是连通的. 由定理 3.18 的 6) 还能推出 $G - v$ 连通. 因此, 对 $v_i \in h(e_i) - \{v\} (i = 1, 2)$, 存在路

$P(v_1,v_2) \subset G-v$. 于是 $P(v_1,v_2) \cup \{e_1,e_2\}$ 是 G 和 $G_{1,2}$ 中的圈 $C_{1,2}$. 现在假定 $G_{1,2}$ 有桥，设 $P=P(v_{1,2},v)$ 是 $G_{1,2}$ 的一条路，由 4) 知，它包含 $G_{1,2}$ 的所有桥. 当沿 P 行走时，令 z 是关联于 $G_{1,2}$ 的桥的最后一个顶点，并称这个桥为最后桥，记为 e_z，$z \neq v$; 否则，$G_{1,2}-e_z$ 恰有两个分支 C' 和 C''，使得 $v_{1,2} \in C'$ 和 $v \in C''$ (见定理 3.18 的 2)). 考虑 G 的子图 $G_1=\langle E(C') \cup \{e_z\} \rangle$ 和 $G_2=\langle E(C'') \rangle$，由定理 3.18 的 6) 可推出 v 是一个割点，这与假设矛盾. 再考虑 $G_{1,2}-e_z$ 的分支 $C' \supset \{v_{1,2}\}$ 和 $C'' \supset \{v\}$，断定 $e_3 \in E(C'')$ 不是 C'' 的桥；否则，模仿前述证明 (用 e_3 替换 e_z)，可再次断定 v 是割点. 由 e_3 不是 C'' 的桥可知，C'' 有一个圈 $C_3 \supset \{e_3\}$，而 C_3 也是 $G_{1,2}$ 和 G 的圈. 由于 $G' := \langle E(C') \rangle_G$ 和 $G'' := \langle E(C'') \rangle_G$ 满足 $G' \cap G'' = \{v\}$，因此，$C_1 := C_{1,2} \subset G'$ 和 $C_3 \subset G''$ 满足 $C_1 \cap C_3 = \{v\}$. 然后按情况 I) 中所需知的那样，可以证明引理在这种情况下也成立.

然而，若 $H=D$ 是强连通的，则 $D_{1,2}$ 和 $D_{1,3}$ 未必是强连通的. 事实上，如果 $\{a_1,a_2,a_3\} \subseteq A_v^+$ (A_v^-)，则 $v_{1,2}$ 和 $v_{1,3}$ 分别是 $D_{1,2}$ 和 $D_{1,3}$ 的源 (汇). 即使 $a_1 \in A_v^+$，而 $a_2,a_3 \in A_v^-$，$D_{1,2}$ 和 $D_{1,3}$ 也可能不是强连通的. 另一方面，因为一个弱连通欧拉有向图事实上是强连通的. 因此，上述讨论将不会给我们的研究带来麻烦.

当分裂有向图的弧时，还需要另一个结果，这里的符号 $D_{i,j}$ 为分裂弧 $a_i^- \in A_v^-$ 和 $a_j^+ \in A_v^+$ 得到的有向图.

引理 3.27(双分裂引理)　令 D 是一个弱连通无桥有向图，v 是 D 的一个顶点且满足 $d_1 := \mathrm{id}(v) > 3$，$d_2 := \mathrm{od}(v) > 3$，令 $A_v^- = \{a_1^-,\cdots,a_{d_1}^-\}$，$A_v^+ = \{a_1^+,\cdots,a_{d_2}^+\}$，并假定 $D_{1,3}$ 和 $D_{1,4}$ 是无桥弱连通的①. 如果 $(D_{1,3})_{4,2}$ 和 $(D_{1,3})_{2,4}$ 均不连通，则 $(D_{1,4})_{2,3}$ 和 $(D_{1,2})_{4,3}$ 中至少有一个是弱连通无桥的.

证明　为了尽可能缩短证明，应用引理 3.26 中某些部分的证明. 为此，考虑图 $G := G_D$，$G_{1,3} := (G_D)_{1,3}$，$e_i := e_{a_i^-}$，$f_j := e_{a_j^+}$ 等. 假定 $(G_{1,3})_{4,2}$ 和 $(G_{1,3})_{2,4}$ 均不连通，如引理 3.26 的证明，假定 G 无环. 由 2) 的结论推出 $\{e_4,f_2\}$ 和 $\{e_2,f_4\}$ 都是 $G_{1,3}$ 的 2- 割. 还可以断定 $G_{1,3}$ 的块 $B_{4,2} \supset \{e_4,f_2\}$ 和 $B_{4,2} \supset \{e_2,f_4\}$ 是不同的. 换句话说，它们对应于 $(G_{1,3})_{4,2}$ 和 $(G_{1,3})_{2,4}$ 中的块 $B'_{4,2} := \langle E(B_{4,2}) \rangle$ 和 $B'_{2,4} := \langle E(B_{2,4}) \rangle$. 由定义 3.17 的 3) 及 $c((G_{1,3})_{4,2}) = c((G_{1,3})_{2,4}) = 2$ 可知，$(G_{1,3})_{4,2}$ 和 $(G_{1,3})_{2,4}$ 中有 $B'_{4,2} \cap B'_{2,4} = \varnothing$，因此，在 $G_{1,3}$ 中有 $B_{4,2} \cap B_{2,4} = \{v\}$. 但是后一个等式和引理 3.19 的 3) 保证了 $B_{4,2} \neq B_{2,4}$，并且 v 是一个割点. 由于 $G_{1,3}$ 是无桥和无环的，故由引理 3.19 的 2) 可推出 $B_{4,2}$ $(B_{2,4})$ 包含一个圈 $C_{4,2} \supset \{e_4,f_2\}$ $(C_{2,4} \supset \{e_2,f_4\})$，使得在 $G_{1,3}$ 中，$C_{4,2} \cap C_{2,4} = \{v\}$ 成立.

现在在 $G_{1,3}$ 中讨论块 $B_{1,3} \supset \{e_1,f_3\}$，并把它在 $\mathrm{bc}(G_{1,3})$ 里的地位与 $B_{4,2}$，$B_{2,4}$

---

① 由分裂引理，可假定若 $D_{1,j}$ 不连通或者有桥，那么 $j=2$.

及 v 的地位相比较. 为此，构造 $F := \mathrm{bc}(G_{1,3}) - \{vB_{2,4}\}$，其中 $vB_{2,4} \in E(\mathrm{bc}(G_{1,3}))$ 是连接 v 和 $B_{2,4}$ 的边. 由命题 3.23 知,$\mathrm{bc}(G_{1,3})$ 是棵树，从而 $vB_{2,4}$ 是一个桥. 因此，F 是恰有两个分支 T_1 和 T_2 的森林. 不失一般性，设 $B_{2,4} \in V(T_2)$. 因为 $vB_{4,2} \in E(F)$，而 v 和 $B_{2,4}$ 属于 F 的不同分支 (见定理 3.18 的 2))，所以 $B_{4,2} \in V(T_1)$. 因为 $B_{2,4}$ 和 $B_{4,2}$ 是对称的，我们可以在讨论中用 $vB_{4,2}$ 代替 $vB_{2,4}$. 可以不失一般性地假定 $B_{1,3} \in V(T_1)$，故 $B_{1,3} \neq B_{2,4}$，但是 $B_{1,3} = B_{4,2}$ 有可能成立. $B_{1,3}$ 包含一个圈 $C_{1,3} \supset \{e_1, f_3\}$，使得 $C_{1,3} \cap C_{2,4} \subseteq \{v\}$，并且仅当 $v \in V(B_{1,3})$ 时，等式成立. 由于 $\{e_2, f_4\}$ 和 $\{e_4, f_2\}$ 是 2- 割，故有 $d_{B_{2,4}}(v) = d_{B_{4,2}}(v) = d_{B_{1,3}}(v_{1,3}) = 2$.

对 $V_0 = \{v_{2,4}, v_{1,3}\} \subset V((G_{1,3})_{2,4})$，定义 $G_0 := ((G_{1,3})_{2,4})_{V_0}$ ($v_{2,4}$ 是分裂 e_2 和 f_4 得到的新的顶点). 事实上，$\mathrm{bc}(G_0)$ 满足等式 $\mathrm{bc}(G_0) = F \cup \{v_0, v_0B_{1,3}, v_0B_{2,4}\}$，其中 v_0 是收缩 V_0 得到的顶点，并且在由 $G_{1,3}$ 变换到 G_0 时，块的符号保持不变. 按以上构造，$T_1, T_2 \subseteq \mathrm{bc}(G_0)$，因此，$T_1$ 的每一个顶点能用一条路连接到 v. 这一事实对 v_0 也是对的，因为把 $v_0, v_0B_{1,3}$ 连接到路 $P(B_{1,3}, v)$ 即可，由于 $B_{2,4} \in V(T_2)$，故 T_2 的每一个顶点能用 T_2 的一条路连接到 $B_{2,4}$，这条路能进一步延伸，通过 v_0 和 $P(B_{1,3}, v)$，终止于 v. 因此，$\mathrm{bc}(G_0)$ 连通 (见引理 3.15)，并且这些块边组成的集合在 $G_{1,3}$ 和 G_0 中是相同的 (只是块的位置改变了).

$(G_{1,4})_{2,3}$ 等同于适当地分裂 v_0 为 $v_{1,4}$ 和 $v_{2,3}$，使得 $E_{v_{1,4}} = \{e_1, f_4\}$，$E_{v_{2,3}} = \{e_2, f_3\}$. 为简单起见，保持所用的符号. 在 G_0 中，由于 $B_{2,4} \cap B_{1,3} = \{v_0\}$，所以有 $C_{2,4} \cap C_{1,3} = \{v_0\}$. 在构成 $(G_0)_{1,4} = (G_{1,4})_{2,3}$ 时 (在 v_0 执行分裂运算)，就把 $C_{2,4}$ 和 $C_{1,3}$ 变换为两条路 $P_{2,4}$ 和 $P_{1,3}$，使得 $P_{2,4} \cap P_{1,3} = \{v_{1,4}, v_{2,3}\}$. 由分裂引理证明中的 2) 可知，$(G_{1,4})_{2,3}$ 是连通的. 由分裂引理证明中最后的等式和结论 4) 可以推出 $(G_0)_{1,4} = (G_{1,4})_{2,3}$ 是无桥的. 证毕.

我们定义与割集有关的另一混合图.

定义 3.28 设 $H = V \cap K$ 是一弱连通混合图，设 K_0 是形如 $K_0 = K(X)$ 的割集，其中 $X \subset V$. 令 $H_0 := H - K_0$，$H_1' = \langle X \rangle_{H_0}$，$H_2' = \langle V - X \rangle_{H_0}$ (注意：H_0 的每一个分支在 H 中至少关联于 K_0 中的一个元素，这就意味着 H_0 的每一分支或者完全包含在 H_1' 中，或者完全包含在 H_2' 中). 对 $i = 1, 2$ 和 $z_i \notin V(H)$，定义混合图

$$H_i := (V(H_i') \cup \{z_i\}) \cup (K(H_i') \cup K_0),$$

其中 $V(H_i')$ 上的关联关系与 H 中的关联关系相同，而 $K_{z_i} = K_0$ (因为 H 是弱连通的，所以 H_i 弱连通). 称 $H_1 \cup H_2$ 为 ***H* 关于 K_0 的联结**，**记作** $H(K_0)$ (图 4.2).

我们继续刻画树. 当 $V = K = \varnothing$ 时，称 $H = V \cup K$ 为**空图**. 当 $K = \varnothing, V = \{v\}$ 时，称 H 为**平凡图**. 定义 $c(\varnothing) = 0$.

定理 3.29 对非空混合图 T，下述结论等价：

1) T 是一棵树.

2) T 弱连通且 $q_T = p_T - 1$.

3) T 弱连通且每个 $k \in K(T)$ 是 T 的一个桥.

4) 或者 $q_T = p_T - 1$，并且对每个 $k \in K(T)$ 有 $c(T-k) = 2$，或者 T 是平凡图.

5) T 弱连通且对每个 $v \in V(T)$ 有 $c(T-v) = d(v)$.

6) $A(T) = \varnothing$ 且对任意固定顶点 $v_0 \in V(T)$ 和每个 $v \in V(T) - \{v_0\}$，存在唯一的路 $P(v_0, v) \subseteq G_T$.

由定理 3.29 的 2) 可以推出以下结论：

推论 3.30 若 F 是森林，则 $q_F = p_F - c(F)$.

入树和出树刻画如下：

定理 3.31 设 T 是弱连通的有向图，则下述结论等价：

1) T 是以 v_0 为根的入 (出) 树.

2) $\mathrm{od}(v) = 1$ $(\mathrm{id}(v) = 1)$ 对每个 $v \in V(T) - \{v_0\}$ 成立，而 $\mathrm{od}(v) = 0$ $(\mathrm{id}(v) = 0)$ 对 (根) $v_0 \in V(T)$ 成立.

3) T 无圈且恰有一个顶点 $v_0 \in V(T)$，使得对每个 $v \in V(T) - \{v_0\}$ 有唯一的路 $P(v_0, v) \subseteq T$.

不可分离混合图的连通度比树的连通度高，因为每一棵树都有割点 (除非 $|V| \leqslant 2$ 且 $|K| \leqslant 1$)，而相同顶点集上不可分离的混合图 H 不含割点. 事实上，对每个 $v \in V(T) - V_1(T)$，$T - v$ 都不连通，而 $H - v$ 连通. 这一事实对每个 $k \in K(T)$ 和 $k \in K(H)$ 也是对的. 在这方面我们还有更强的结果. 为此，引进**块–链**的概念：称混合图 H 为一个块–链，如果 $\mathrm{bc}(H)$ 是一条 (可能是平凡) 路.

定理 3.32([DIRA67a, 定理 1]) 设 $H = V \cup K$ 是不可分离的混合图，$|K| > 1$，对每个 $k \in K$，$H - k$ 是一个块–链. 如果 $p_{\mathrm{bc}(H-k)} > 1$，那么 k 的两个端点属于 $H - k$ 的两个不同的端块，并且不是 $H - k$ 的割点.

即使在不可分离的混合图中，人们仍能区分各种不同的连通度. **完全图** K_n，**完全二部图** $K_{m,n}$ 和**完全对称有向图** $K_n^*(n \geqslant 1, m \geqslant 1)$ 都可视为具有最高连通度的 (有向) 图. 这些图定义如下.

$$K_n: \ p_{K_n} = n, \ q_{K_n} = \binom{n}{2}, \ h(E(K_n)) = \mathcal{P}_2(V(K_n)),$$

$$K_n^*: \ p_{K_n^*} = n, \ q_{K_n^*} = 2\binom{n}{2},$$

$$h(A(K_n)) = V(K_n^*) \times V(K_n^*) - \{(x,x) \mid x \in V(K_n)\},$$

$$K_{m,n}: \ V(K_{m,n}) = V' \cup V'', \ V' \cap V'' = \varnothing, \ |V'| = m, \ |V''| = n,$$

$$q_{K_{m,n}} = mn,\ h(E(K_{m,n})) = \{\{x,y\} \mid x \in V', y \in V''\}.$$

图 3.9 中 G 的块的集合是由一个 K_2 和两个 K_3 组成，而图 3.11 中 G 是一个 K_4.

如果两个 n 阶图 G 和 $\overline{G}$ 满足 $E(G) \cap E(\overline{G}) = \varnothing$, $\overline{G} \cup G = K_n$ 和 $V(\overline{G}) = V(G) = V(K_n)$，则称 $\overline{G}$ 为 G 的**补图**. G 和 $\overline{G}$ 都是简单图，并且 $\overline{\overline{G}} = G$.

定义 3.33 一个 p 阶简单混合图 $H = V \cup K$，如果对每个子集 $V' \subset V$, $|V'| < k < p$，$H - V'$ 都连通，则称 H 为 **k-连通的**. 如果 H 是 k- 连通的，但不是 $(k+1)$-连通的，则称 H 的**连通度为** k，并用 $\kappa(H)$ 表示 H 的连通度. 当 H 不是简单图时，若 H 有环，则定义 $\kappa(H) = 1$; 若 G 是多重图，则定义 $\kappa(G) = 2$.

由定义 3.33 可见，若 H 不连通，则 $\kappa(H) = 0$; 若 H 连通，则 H 是 1- 连通的; 若 T 是非平凡的树，则 $\kappa(T) = 1$; 若 H 是不可分离的且无桥，则 $\kappa(H) \geqslant 2$. 特别地，$\kappa(K_n) = \kappa(K_n^*) = n - 1$，$\kappa(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$. 另外，若 $\kappa(H) = k > 2$，则或者存在 k 个顶点的割集 V_c，或者 $G_H \supseteq K_{k+1}$ 且 $k + 1 = p_H$. 因此，连通度可用最小顶点割来定义. 下面的结果需要引进另一个概念.

定义 3.34 1) 两条路 P_1 和 P_2，若 $P_1 \cap P_2 \subseteq V_1(P_1) \cap V_1(P_2)$，则 P_1 和 P_2 为**内部不交的**，或简称为**不交的** (或称为**独立的**). 若 $P_1 \cap P_2 = \varnothing$，则称 P_1 和 P_2 为**完全不交的**.

2) 设 x 和 y 是混合图 H 的两个不相邻的顶点 (从而 $K_p \nsubseteq G_H$, $p = p_H$). **局部连通度**$\kappa(x,y)$ 定义为使得 x 和 y 处于 $H - V_c$ 的不同分支的最小顶点割 V_c 的顶点数，称 V_c **分离** x 和 y.

下述定理在图中起着重要作用:

定理 3.35 对简单混合图 H，$k \in \mathbb{N}$，$k \leqslant p_H - 1$，下述结论成立:

1) 对每一对不相邻的顶点 $x, y \in V(H)$，$\kappa(x,y)$ 等于 G_H 中连接 x 和 y 的两两不交路的最大个数，并且 $\kappa(x,y) \geqslant \kappa(H)$ (**Menger 定理** [MENG27a]).

2) H 是 k- 连通的当且仅当对每一对不同的顶点 $x, y \in V(H)$，G_H 中存在连接 x 和 y 的 k 条两两不交的路 [WHIT32a][①].

Menger 定理有若干不同的证明，有兴趣的读者可参见文献 [DIRA66a] 和 [McCU84a]. 前一个文献中列出了这一著名定理早期的一些证明，而后一个文献给出了这一定理在有向图情况下的一个很短的证明，并由此导出了原始定理 (但在有向图的情况下，[McCU84a] 中分离 x 和 y 的顶点集的定义不同于定义 3.34 的 2)).

另外，我们还将使用其他类型的连通度.

---

① 叙述 1) 中的不等式常常被省略，因为它是定义 3.33 和定义 3.34 的直接推论. 不失一般性，我们只对图 (而非混合图) 考虑 1) 和 2) 以及定义 3.33 和定义 3.34.

定义 3.36 1) 设 H 是混合图，$\mathcal{E}_s$ 为 H 的边和 (或) 弧割的集合. 定义

$$\lambda(H) := \min\{|K_s| \mid K_s \in \mathcal{E}_s\},$$

称 $\lambda(H)$ 为 H 的**边连通度**. 若 $\lambda(H) \geqslant k$，则 H 为 **k-边连通的**. 局部边连通度 $\lambda(x,y)$ 等于分离 x 和 y 的最小 $K_s \in \mathcal{E}_s$ 的基数 (即 x 和 y 属于 $H - K_s$ 的不同分支).

2) 设 H 和 $\mathcal{E}_s$ 如 1) 中所定义. 对 $K_c \in \mathcal{E}_s$，如果 G_{H-K_c} 有两个分支均含有圈，则称 K_c 为 H 的 **圈边** (**或弧割**) **或圈割集**. 令 $\mathcal{E}_c := \{K_c \in \mathcal{E}_s \mid K_c \text{ 为圈割集 }\}$，若 $\mathcal{E}_c \neq \varnothing$，则定义

$$\lambda_c(H) := \min\{|K_c| \mid K_c \in \mathcal{E}_c\};$$

否则，定义

$$\lambda_c(H) := \min\{|K_s| \mid K_s \in \mathcal{E}_s \text{ 且 } H - K_s \text{ 有两个非平凡的分支}\},$$

若这样的 K_s 存在；否则，$\lambda_c(H) = \lambda(H)$.

称 $\lambda_c(H)$ 为**圈边连通度**①. 类似地，如果 $\lambda_c(H) \geqslant k$，则称 H 为圈 k- 边连通的.

最小度、连通度和边连通度有下述关系：

引理 3.37 对任意混合图 H 有

$$\kappa(H) \leqslant \lambda(H) \leqslant \delta(H), \quad \lambda(H) \leqslant \lambda_c(H).$$

$\lambda_c(H) > \delta(H)$ 可能成立. 另一方面，在 3- 正则图 (也称为三次图) 的情况下，$\lambda_c(H)$ 的一个合理的上界是 G_H 的**围长** $g(G_H)$，即 G_H 的最短圈的长度. 对于 3- 正则图的情形有以下结论：

引理 3.38 设 G 是 3- 正则图且 $\kappa(G) < 3$，那么 $\kappa(G) = \lambda(G) = \lambda_c(G)$.

证明 若 G 不连通，则 G 的每一个分支是 3- 正则的，并因此含有圈，从而 $0 = \kappa(G) = \lambda(G) = \lambda_c(G)$.

若 $\kappa(G) = 1$，那么 G 的每一个割点 v_c 关联于 G 的一个桥. 如果包含 v_c 的块中有一个是环，那么引理显然成立. 在 $G - v_c$ 中有两个或两个以上分支的情形，至少有一个分支 C_1 满足恰有一条边 $e \in E_{v_0}$ 在 G 中将 v_c 与 C_1 连接，即 e 分离 C_1 和 $G - V(C_1)$，故 $\lambda(G) = 1$. $G - e$ 的任一个分支不可能是树，否则，这样的树是非平凡的，从而有两个悬挂点由 4 条边连接到 $G - V(C_1)$，显然，这是不可能的. 因此，$G - e$ 的每一个分支都有圈，故 $1 = \kappa(G) = \lambda(G) = \lambda_c(G)$.

① 见 [FLEI89a]. 注意 $\mathcal{E}_c = \varnothing$ 当且仅当对 G_H 的任意两个圈 C_1 和 C_2 有 $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \varnothing$.

最后，假定 $\kappa(G)=2$，此时 G 无环，并且有一个顶点割 $\{x,y\}$. $G-\{x,y\}$ 的一个分支 C 在 G 中有边与 x 和 y 相连. 因此，C 至少与 $E_x\cup E_y$ 中的两条边相关联. 令 C' 是 $G-\{x,y\}-C$ 的一个分支. 如果 C 或 C' 是由两条边连接到 x 和 y 的，那么这两条就边构成一个 2- 割 E_c. 假如 C 和 C' 均至少由三条边 (因此，恰有三条边) 连接到 x 和 y，则不失一般性地可以假设 C 到 x 恰有一条边 e，C' 到 y 也恰有一条边 f，那么 $\{e,f\}$ 是一个 2- 割 E_c，使得 x 和 y 属于 $G-E_c$ 的不同分支. 因此，$2=\kappa(G)=\lambda(G)$. 对 G 的任意一个 2- 割 E_0，$G-E_0$ 的任一个分支 C_0 都不可能是树；否则，C_0 至少由 4 条边连接到 $G-V(C_0)$，这是不可能的. 这样一来，就有 $\lambda(G)\leqslant\lambda_c(G)\leqslant 2$. 由此得到 $2=\kappa(G)=\lambda(G)=\lambda_c(G)$. 证毕.

注意：如果 3- 正则改为 4- 正则，那么引理 3.38 不再成立，如图 3.12 所示.

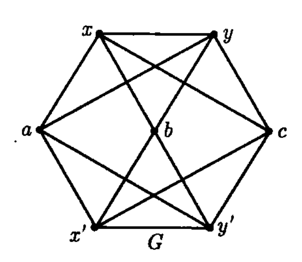


图 3.12 一个 4 正则图 G，$\kappa(G)=3,\lambda(G)=4,\lambda_c(G)=6$

关于边连通度有一个与定理 3.35 对应的结果 (见 [HARA69a，定理 5.11]，它是由不同的作者独立发现的).

定理 3.39 设 H 是一个混合图，下述结论成立:

1) 对 $x,y\in V(H)$，$\lambda(x,y)$ 等于 G_H 中连接 x 和 y 的两两边不交的路的最大个数，并且 $\lambda(x,y)\geqslant\lambda(H)$.

2) H 是 k- 边连通的，当且仅当 H 的每一对顶点之间在 G_H 中至少有 k 条边不交的路.

在本节结束前再介绍一个不等式，它与边连通度及两两边不交的支撑树的最大个数有关. 在塔特 (W.T.Tutte) 和威廉姆斯 (C.St.J.A.Nash-Williams) [TUTT61a, NASH61a] 的工作基础上 (在 [NASH64a] 中将此结果推广到两两不交的森林)，[KUND74a，定理 2]证明了以下引理.

引理 3.40(库达引理 (Kundu's Lemma)) 设 $k\in\mathbb{N}$，G 是 k- 边连通的无环图，那么 G 的两两不交的支撑树的最大个数至少为 $\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil$，其中 $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数.

证明 证明的基础是 W. T. Tutte 和 C. St. J. A. Nash-Williams 的下述结果 (见 [TUTT61a,NASH61a])：对无环图 G，令 $\mathbf{P}=\{V',V'',\cdots,V^{(r)}\}$ 是 $V(G)$ 的一个划分. 记 $q_{\mathbf{P}}=q_{G_{\mathbf{P}}}$，其中 $G_{\mathbf{P}}=(\cdots(G_{V'})_{V''}\cdots)_{V^{(r)}}$ 是无环的，那么 G 有 k 个边不交的支撑树，当且仅当

$$q_{\mathbf{P}}\geqslant k(r-1) \qquad (*)$$

对 G 的每一个划分 $\mathbf{P}$ 都成立 ($r=|\mathbf{P}|$ 随 $\mathbf{P}$ 的变化而变化).

令 $n_T(G)$ 表示 G 中两两边不交的支撑树的最大个数，那么式 $(*)$ 意味着存在 $V(G)$ 的划分 $\mathbf{P}_0(|\mathbf{P}_0|=r_0)$，使得

$$q_{\mathbf{P}_0} \leqslant (n_T(G)+1)(r_0-1)-1. \tag{**}$$

考虑 $G_{\mathbf{P}_0}$，并应用引理 3.4 得到

$$2q_{\mathbf{P}_0} = \sum_{x\in V(G_{\mathbf{P}_0})} d(x) \leqslant 2((n_T(G)+1)(r_0-1)-1) =: \sigma_0. \tag{1}$$

因此，$G_{\mathbf{P}_0}$ 有一个顶点 x_0，它的度最大为 $\Delta_0=\dfrac{\sigma_0}{r_0}$. 由 $G_{\mathbf{P}_0}$ 的定义，$E_{x_0}\subset E(G_{\mathbf{P}_0})$ 可解释为上边界 $E(V^{(i)})\subseteq E(G)$，其中 $V^{(i)}\in\mathbf{P}_0$ 对应于 x_0. 由 G 是 k 边连通的得

$$k\leqslant |E(V^{(i)})| = |E_{x_0}| \leqslant \Delta_0. \tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 得

$$k\leqslant \frac{\sigma_0}{r_0} = 2(n_T(G)+1)\cdot\frac{r_0-1}{r_0}-\frac{2}{r_0} < 2(n_T(G)+1),$$

即 $n_T(G)>\dfrac{k}{2}-1$. 引理证毕.

3.5　相容性，K_v^* 的循环序和对应的欧拉迹

相容性的概念是本书的中心课题之一，它是我自 1975 年以来研究工作的主要部分. 另外几个同事 (B.Jackson, F.Jaeger, A.Bouchet 等) 也被这一专题所吸引. 这一概念首先是由科特齐格 (A.Kotzig) 提出来的 (欧拉迹)，此后，撒比达斯 (G.Sabidussi) 也讨论过 (圈分解). 以下的相容性术语遵从 Sabidussi 的定义①：

定义 3.41　1) 考察混合图 $H=V\cup K$ 中的 K_v^* $(v\in V(H))$，某集合 $M_v^*\subseteq K_v^*$ 的一个划分 $P(v)$ 称为 ***v* 点的 (部分) 划分系**，若 $M_v^*=K_v^*$ $(M_v^*\neq K_v^*)$. 如果对每个 $v\in V(H)$ 都有 $M_v^*=K_v^*$(至少对某个 $v\in V(H)$ 有 $M_v^*\neq K_v^*$)，则称 $P(H):=\bigcup\limits_{v\in V(H)}P(v)$ 为 ***H* 的 (部分) 划分系**，其中 $M_v^*=\bigcup\limits_{C_i\in P(v)}C_i$. 如果 $P(v)$ 中每个成员恰有两个元素，则称它为 ***v* 点的 (部分) 转移系统** $X(v)$，相应地，$X(H):=\bigcup\limits_{v\in V(H)}X(v)$ 为 ***H* 的 (部分) 转移系统**.

2) 两个 (部分) 划分系 $P_1(H)$ 和 $P_2(H)$ 称为**可相容的**，当且仅当对每个 $v\in V(H)$ 和 $\{i,j\}=\{1,2\}$，以及每个 $C_i\in P_i(v)\subseteq P_i(H)$ 和 $C_j\in P_j(v)\subseteq P_j(H)$ 都

① 有人建议用“正交”一词会更合适，但是 Sabidussi 等决定仍然使用可相容这一术语.

有 $C_i \not\subseteq C_j$. 如果文中偏重于 $P_1(H)$，那么就把 $P_1(H)$ 和 $P_2(H)$ 是可相容的称为 $P_2(H)$ 是 $P_1(H)$ 可相容的 (如下文中，当 H 是 (有向) 图且 $P_2(H)$ 是一条欧拉迹时就属于这种情况).

两个 (部分) 转移系统 $X_1(H)$ 和 $X_2(H)$ 是可相容的，当且仅当 $X_1(H) \cap X_2(H) = \varnothing$. 因为若对 $t_1 \in X_1(v)$，$t_2 \in X_2(v)$ 且 $t_1 \leqslant t_2$，则 $t_1 = t_2$. 事实上，这常常是定义转移系统相容性的一种方法. 转移系统的存在蕴涵着对每个 $v \in V(H)$ 都有 $d(v) \equiv 0 \pmod 2$，即 G_H 是欧拉图，进而转移系统 $X(H)$ 和 G_H 的迹分解 S 之间存在 1-1 对应，即 $t \in X(H)$ 当且仅当 t 对应于 S 中某一元素的一段. 因此，当提到 G_H 的某一迹分解 S 时，用 X_S 表示其对应的转移系统. 另外，如果 X_{S_1} 和 X_{S_1} 是可相容的，就称 S_1 和 S_2 为相容的迹分解. 在相容性研究中，将着重于 (有向) 图，并且着重于以下情况：

a) $S_i(i \in \{1,2\})$ 中恰有一个元素 (即 $T \in S_i$ 是 $G(D)$ 的一条欧拉迹，此时用 X_T 代替 X_{S_i})

或

b) S_i 的元素都是 $G(D)$ 的圈和 (或) 路.

如果 $\delta(H) = 2$，那么由于对 $v \in V_2(H)$，$X(v)$ 是唯一确定的，此时 G_H 的相容迹分解不可能存在. 因此，我们将或者假定 $\delta(H) > 2$，或者认为转移 (或划分) 系统定义在 $V(H) - V_2(H)$ 上 (严格地说，后者是部分转移 (划分) 系统)，若 $X = X_S$ 是 (部分) 转移系统，其中 S 是 G_H 的一个迹分解，$S' \subset S$ $(H' \subset H)$，用 $X|_{S'}$ $(X|_{H'})$ 表示 **X 在 S' (H') 上的限制**，即 $X|_{S'} = X \cap X_{S'}$ $(X|_{H'} = \{t \in X \mid t \subset E^*(H') \cup A^*(H')\})$.

为了介绍其他类型的欧拉迹，需要下述概念：

定义 3.42 设 $H = V \cup K$ 为混合图，$v \in K$ 且假定设 $K_v^* \neq \varnothing$. 令 $d = |K_v^*| = d(v)$，给 K_v^* 中的元素任意固定一种标号为 $K_v^* = \{b'_1, b'_2, \cdots, b'_d\}$，称任一个 d 维向量

$$O^+(K_v^*) := O^+(v) \in \{(b'_i, b'_{i+1}, \cdots, b'_{d+i-1}) \mid i = 1, \cdots, d, \text{ 置 } d+1 = 1\}$$

为 **v 的半边和 (或) 半弧的 (正) 循环次序**，称 b'_i 和 b'_{i+1} 在 $O^+(v)$ 中相邻，$i = 1, \cdots, d$. 通常记 $O^+(v) = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_d)$. 对给定的 $O^+(v) = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_d)$，定义 K_v^* 的负 (或反) 循环次序为 $O^-(v) = (b'_1, b'_d, \cdots, b'_2)$. 置

$$O^+(H) := \{O^+(v) \mid v \in V(H)\}, \quad O^-(H) := \{O^-(v) \mid v \in V(H)\}^{①}.$$

$O^+(H)$ 的概念是研究图嵌入曲面的有用工具，也是确定两类不同欧拉迹的基础.

① $O^+(v)$ 与古典的"旋转嵌入方式"的概念基本相同，其定义和参考文献见 [BEHZ79a, p.104].

定义 3.42a　令 $T = v_0, k_1, v_1, \cdots, k_n, v_n$ $(v_n = v_0)$ 是混合图 H 的一条欧拉迹，并假定 $O^+(H)$ 已给定，称 T 为 A- 迹，当且仅当对每一个 $v \in V(H)$ 和每一个 $t \in X(v) \subseteq X_T$ 有 $t = \{b'_j, b'_{j+1}\}$，其中 b'_j 是 $O^+(v)$ 中的第 j 项，即 T 中 v 的相继边和 (或) 弧对应于 $O^+(v)$ 的相邻元素. T 称为非交叉欧拉迹，当且仅当对任意 $v \in V(H)$，$t_1, t_2 \in X(v) \subseteq X_T$ 且 $t_1 = \{b'_i, b'_j\} \neq t_2 = \{b'_r, b'_s\}$，若 (不失一般性)$i < j$，$r < s$，$i < r$，则或者 $s < j$，或者 $j < r$，其中 $1 \leqslant i, j, r, s \leqslant d = d(v)$. 如果两个转移 t_1 和 t_2 满足上述性质，则称它们为非交叉转移；否则，称为**交叉转移** (图 3.13).

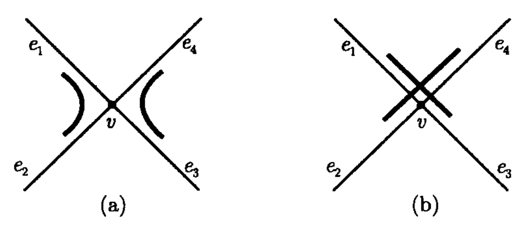


图 3.13　v 为 4- 次顶点，$O^+(v) = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$；(a) 非交叉转移 $\{e'_1, e'_2\}$，$\{e'_3, e'_4\}$；(b) 交叉转移 $\{e'_1, e'_3\}$，$\{e'_2, e'_4\}$

观察下述事实：若给定 $O^+(H)$ 且 $\Delta(H) = 4$，那么 A- 迹和非交叉欧拉迹是等价的. 这是因为若 $d = d(v) = 4$，则或者 $i = 1$，$j = 4$，$r = 2$，$s = 3$，或者 $i = 1$，$j = 2$，$r = 3$，$s = 4$，从而 b'_i 和 b'_j 以及 b'_r 和 b'_s 在 $O^+(v)$ 中相邻. 在 $d = 2$ 的情况只有一个转移，并且按定义 $O^+(v) = O^-(v)$ 中的两项是相邻的. 在 $\Delta(H) = 4$ 的情况下，若给定 $O^+(H)$，则 A- 迹 (非交叉欧拉迹) 可以定义为 $P(H)$ 可相容的欧拉迹，即若 $d(v) = 2$，$K_v^* = \{e(v), f(v)\}$，令 $\{e(v)\}, \{f(v)\} \in P(H)$；若 $d(v) = 4$ 且 $O^+(v) = (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4)$，令 $\{b'_1, b'_2\}, \{b'_3, b'_4\} \in P(H)$，这样构成的 $P(H)$ 是一个正常的划分系.

在 H 是简单图的情况下，$P(H), X(H), O^+(H)$ 的定义不需要用半边和 (或) 半弧的概念，此时可通过 K_v 的划分和循环次序定义这些概念. 但在有多重边的情况下，即存在 $e, f \in E_x \cap E_y$ 的情况下，可能会有 $\{e, f\} \in X(x) \cap X(y)$，此时会使某些证明变得复杂. 由于一般允许有环和多重边，所以在上述定义中使用半边和半弧是很有必要的.

3.6　匹配、1- 因子、2- 因子、1- 因子分解、2- 因子分解、二部图

定义 3.43　设 $H = V \cup K$ 是混合图. 集合 $M \subseteq K$ 或 $M \subseteq V$. 若 M 中

任何两个元素都不相邻，则称 M 为**独立集** (也称为独立边集或独立点集). 边和(或) 弧的独立集也称为**匹配**. 对于一个匹配 M，如果不存在另一个匹配 M'，使得 $M \subset M' \subseteq K$，则称 M 为**极大匹配**，若 $V(\langle M\rangle) = V(H)$，则称 M 为**完美匹配**. 若 $H = G$ 是一个图，并且 M 是 G 的完美匹配，则称 M 为 G 的 **1- 因子或线因子**. 一个 k- 因子是 H 的一个 k- 正则支撑子图. H 的 ***k*- 因子分解**是将 H 分解为一些 k- 因子的并 (即 $K(H)$ 的划分)，此时称 H 为**可 *k*- 因子化的**.

一个图的 2- 因子分解 (有向图的 1- 因子分解) 是圈分解的一种特殊类型. G(或 D) 的哈密顿圈是 G 的一个 2- 因子 (D 的一个 1- 因子). 以下是两个经典结果 [PETE91a]，前一个定理可用分裂引理 (引理 3.26) 证明:

定理 3.44 每一个 3- 正则无桥图有 1- 因子.

证明 我们来证一个更强的结果：对任意给定的 $f \in E(G)$，G 有 2- 因子 $Q \subset G$，使得 $f \in Q$ (因此，$E(G) - E(Q)$ 是 G 的 1- 因子)，其中 G 是无桥 3- 正则图. 如果 G 是两个顶点的多重图，那么这一结果显然是对的. 因此，假定 $p := p_G > 2$. 设 $a, u \in V(G)$，$f \in E_a \cap E_u$，则存在 $e \in E_u \cap E_v$，其中 $v \in V(G) - \{a, u\}$. 在 G 中收缩边 e 为一顶点 $v_0 \notin V(G)$ 得图 $G' = G_e$，那么 $d_{G'}(v_0) = 4$，而 G' 的其他顶点仍是三次的，并且 $E_{v_0} = E_u \cup E_v - \{e\}$. 显然，$G'$ 连通无桥，但 v_0 可能是割点. 记 $f = b_1 \in E_{v_0}$ 及 $\{b_2, b_3\} = E_{v_0} \cap E_v$. 若 v_0 是 G' 的割点，那么 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 不可能包含在 G' 的同一个块里. 应用分裂引理 (引理 3.26) 就能保证 $G'_{1,2}$ 和 $G'_{1,3}$ 中至少有一个是连通无桥的. 不失一般性，设 $G'_{1,2}$ 连通无桥 (图 3.14)①. 按归纳假设，$G'_{1,2}$ 有一个 2- 因子 $Q' \supset \{b_{1,2}\}$，其中 $b_{1,2}$ 是由 b_1 和 b_2 产生的边. $E(G'_{1,2}) - (E(G) \cup \{b_{1,2}\})$ 中有唯一的一条边 g'. 若 Q' 不含 g'，那么 Q' 对应于 G 的一个 2- 因子 Q，使得 $f, e, b_2 \in Q$. 以下设 Q' 中有一个圈 C' 包含 $b_{1,2}$ 和 g'. 此时 C' 或者对应于 G 的圈 C，使得 $E_{v_0} \subset E(C)$，或者可以转化为两个圈 C_1, C_2，使得 $f \in E(C_1)$，$\{b_2, b_3\} \subset E(C_2)$. 在前一种情形，令 $Q_1 = \{C\}$，在后一种情形，令 $Q_1 = \{C_1, C_2\}$，那么 $Q = (Q' - \{C'\}) \cup Q_1$ 是 G 的一个 2- 因子且包含 f (但不含 e). 证毕.

可惜的是定理 3.46 中的 2- 因子改为 1- 因子就不成立了. 不过对于这一类重要的图类，二部图是成立的.

定义 3.45 一个混合图 $H = V \cup K$，若顶点集 V 能划分为两部分 V_1 和 V_2，使得 $V = V_1 \cup V_2$，$V_1 \cap V_2 = \varnothing$，并且 $K(\langle V_1\rangle) = K(\langle V_2\rangle) = \varnothing$，则称 H 为**二部图**.

类似于一个图的补图的定义，设 G 是一个二部图，若图 G_1 满足 $E(G_1) \cap E(G) = \varnothing$，$G_1 \cup G = K_{m,n}$ 和 $V(G_1) = V(G) = V(K_{m,n})$，则称 G_1 为二部图 G 的**二部补图**.

① 通过分裂 e (这里结合了边的收缩和分裂两个过程) 把 G 直接转化为连通无桥的 $G_{1,2}$ 是 Frink 定理的核心 (见 [KÖNI36a, p182~186]).

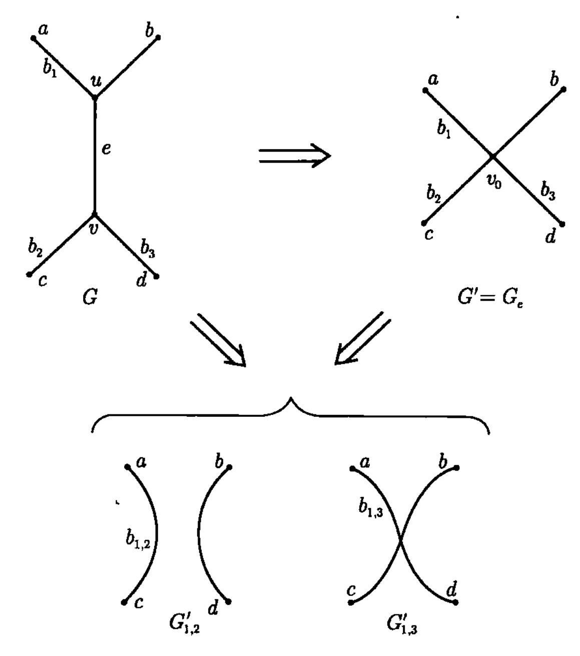


图 3.14　分裂边 e 的两种可能方式：先收缩边 e 得到 G'，再适当分裂 v_0

定理 3.46　每一个 $2k$- 正则图都有 2- 因子可分解.

二部混合图可刻画如下：

定理 3.47　一个混合图 H 是二部的，当且仅当 G_H 的每一个圈的长度为偶数.

下面是 D. König [KÖNI16a] 的一个经典结果 (也见 [KÖNI36a, p170-171]).

定理 3.48　每一个 k- 正则二部图是 1- 因子可分解的.

J. Petersen 已举例说明，不是每一个 3- 正则图都有 1- 因子分解，如彼特森图 P_5 是这类图中最小的例子 (图 3.15).

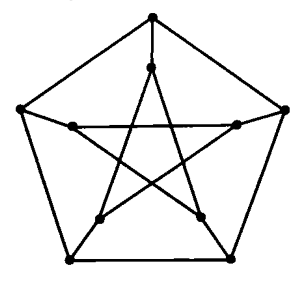


图 3.15　彼特森图 P_5

事实上，定理 3.46 和定理 3.48 是等价的，我们将在本书的第二部分给予证明. 现在讨论完全图的一些特殊的 1- 因子和 2- 因子分解的问题 (见 [KÖNI36a, p157~163]，在那里可以找到下述两个定理的文献，包括 [LUCA83a]，也可见 [HARA69a, 定理 9.1 和定理 9.6])：

定理 3.49　对每一个整数 $n>1$，K_{2n} 有 1- 因子分解 $\mathcal{L}=\{L_0,L_1,\cdots,L_{2n-2}\}$，使得当 $1\leqslant|i-j|\leqslant 2$，或 $i\in\{2n-2,2n-3\}$ 且 $j=0$，或 $i=2n-2$ 且 $j=1$ 时，$L_i\cup L_j$ 是一个哈密顿圈.

证明 记 K_{2n} 的顶点为

$$2n-1, 0, 1, 2, \cdots, n-1, -(n-1), \cdots, -2, -1. \tag{*}$$

定义 K_{2n} 的 1- 因子 L_0 为

$$L_0 := \{(2n-1)0\} \cup \{i(-i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\}. \tag{**}$$

其他的 $2n-2$ 个 1- 因子可以通过旋转式 (*) 中除 $2n-1$ 外的顶点标号而得. 设想除 $2n-1$ 外，其他标号按顺时针表示正 $2n-1$ 边形 C_{2n-1} 的顶点. 把 $2n-1$ 放在 C_{2n-1} 的中心，这样就得到 $2n-1$ 个 1- 因子 $L_0, \cdots, L_{2n-2}$，每一个都具有式 (**) 的形式. 我们首先证明对 $i \neq j$ 有 $L_i \cap L_j = \varnothing$. 不失一般性，设 $i=0$，因此，$1 \leqslant j \leqslant 2n-2$.

假设一边 $e = r(-r) \in L_0$ 也属于 $L_j, r \geqslant 1, j \geqslant 1$. 若 $r+j \leqslant n-1$，那么顶点 $r \in V(\langle L_0 \rangle)$ 在 $V(\langle L_j \rangle)$ 中的标号为 $r+j$；否则，它的标号为 $-(2(n-1))-(r+j-1) = r+j+1-2n$. 类似地，若 $-r+j \leqslant n-1$，那么顶点 $-r \in V(\langle L_0 \rangle)$ 在 $V(\langle L_j \rangle)$ 中的标号为 $-r+j$；否则，它的标号为 $-((n-1)-(-r+(j-n))) = j-r+1-2n$. 因为 $e \in L_0 \cap L_j$，那么 e 在 L_j 中具有形式为 $k(-k)$ (注意：关联于 $2n-1$ 的每一边恰在一个 $L_i (0 \leqslant i \leqslant 2n-2)$ 中). 由此推出

$$r+j = -(-r+j) = r-j$$

或

$$r+j+1-2n = -(j-r+1-2n) = r-j-1+2n,$$

从而 $j=0$ 或 $j=2n-1$，这与 $1 \leqslant j \leqslant 2n-2$ 矛盾 (k 和 $(-k)$ 的其他两种可能的组合导致 $2j = 2n-1$ 的矛盾). 因此, $\mathcal{L} = \{L_0, L_1, \cdots, L_{2n-2}\}$ 是 K_{2n} 的 1- 因子.

下面证明定理所描述的哈密顿圈的存在性. 由于旋转的对称性，只要证明 $L_0 \cup L_1$ 和 $L_{2n-2} \cup L_1$ 均是哈密顿圈即可. 首先讨论 $L_0 \cup L_1$. 对 $\delta = 0, 1$，令 $P_{1+\delta}$ 是 $L_0 \cup L_1$ 中起始于 $2n-1$，沿边 $(2n-1)\delta$ 行走的一条路，则 $P_{1+\delta}$ 的顶点序列如下：

当 n 为奇数时有

$$P_1 = 2n-1, 0, 2, -2, 4, -4, \cdots, -(n-3), (n-1), -(n-1),$$
$$P_2 = 2n-1, 1, -1, 3, -3, 5, \cdots, (n-2), -(n-2);$$

当 n 为偶数时有

$$P_1 = 2n-1, 0, 2, -2, 4, -4, \cdots, -(n-4), (n-2), -(n-2),$$
$$P_2 = 2n-1, 1, -1, 3, \cdots, (n-3), -(n-3), (n-1), -(n-1).$$

因为 $(n-1)(-(n-1)) \in L_0$，从而 $(-(n-1))(-(n-2)) \in L_1$. 故对任意的 $n > 1$，P_1, P_2^{-1} 是 K_{2n} 的一个哈密顿圈的顶点序列.

最后讨论 $L_{2n-2}\cup L_1$. 现在考虑 4 条路：P_1 和 P_2 起始于顶点 0，它们的第一条边分别为 02 和 0(−2). P_3 和 P_4 起始于顶点 $2n-1$，它们的第一条边分别为 $(2n-1)1$ 和 $(2n-1)(-1)$. 根据 n 的模 4 剩余，分以下两种情况讨论：

情况 1 若 $n\equiv 1 \pmod 4$，定义 $r_n=1$；若 $n\equiv 3 \pmod 4$，定义 $r_n=-1$. 仍然把路记为顶点序列，则

$$
\begin{aligned}
P_1&=0,+2,-4,+6,\cdots,(-r_n)(n-1),\\
P_2&=0,-2,+4,-6,\cdots,(+r_n)(n-1),\\
P_3&=2n-1,+1,-3,+5,\cdots,(-r_n)(n-2),\\
P_4&=2n-1,-1,+3,-5,\cdots,(+r_n)(n-2).
\end{aligned}
$$

注意到 $(n-1)(-(n-1))\in L_0$ 蕴涵着 $(n-2)(n-1)\in L_{2n-2}$ 和 $(-(n-1))(-(n-2))\in L_1$. 由此可推出无论 r_n 为何值，$P_1,P_3^{-1},P_4,P_2^{-1}$ 是 K_{2n} 的一个哈密顿圈的顶点序列.

情况 2 若 $n\equiv 0 \pmod 4$，定义 $s_n=1$；若 $n\equiv 2 \pmod 4$，定义 $s_n=-1$. 于是有

$$
\begin{aligned}
P_1&=0,+2,-4,+6,\cdots,(+s_n)(n-1),\\
P_2&=0,-2,+4,-6,\cdots,(-s_n)(n-1),\\
P_3&=2n-1,+1,-3,+5,\cdots,(-s_n)(n-1),\\
P_4&=2n-1,-1,+3,-5,\cdots,(+s_n)(n-1).
\end{aligned}
$$

类似于情况 1，我们断言对每一个 $s_n\in\{1,-1\}$，$P_1,P_4^{-1},P_3,P_2^{-1}$ 定义了 K_{2n} 的一个哈密顿圈. 定理证毕.

定理 3.50 对每一个 $n\geqslant 1$，K_{2n+1} 有一个 2 - 因子分解，使得分解中每一个圈都是一个哈密顿圈 (等价地说，K_{2n+1} 可以分解为 n 个哈密顿圈).

证明 当 $n=1$ 时，定理显然成立，因此，假定 $n\geqslant 2$. 将 K_{2n+1} 的顶点标号为 $1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,2n+1$，并且考虑 $K_{2n+1}-\{2n+1\}$ 的一条哈密顿路 P_1，

$$P_1=1,-1,2,-2,\cdots,n,-n. \tag{*}$$

类似于定理 3.49 的证明，把顶点 $2n+1$ 视为正 $2n$ 边形 C_{2n} 内部的一个点，而其他顶点顺时针标号为 $1,2,\cdots,n,-n,-(n-1),\cdots,-2,-1$. 将 C_{2n} 的顶点标号作 $n-1$ 次旋转 (也可定义第 i 次旋转为 $1\to i(2\leqslant i\leqslant n)$)，这样得到 $K_{2n+1}-\{2n+1\}$ 的 $n-1$ 条哈密顿路，而每一条都具有式 (*) 的形式，连同于 P_1，则共有 $K_{2n+1}-\{2n+1\}$ 的 n 条哈密顿路，第 k 条路 P_k 起始于 k，终止于 $-(n-k+1)$，而 $P_k\cup\{(2n+1)k,(2n+1)(-(n-k+1))\}$ 是 K_{2n+1} 的一个哈密顿圈. 这样就得到了 K_{2n+1} 的 n 个哈密顿圈. 如果有两条不同的哈密顿圈有公共边，那么它们所对应的路 P_i 和 P_j 有一条公共边. 由对称性，不妨设 $i=1$，因此，$2\leqslant j\leqslant n$. 假设

$e=r(-r)\in E(P_1)\cap E(P_j)(1\leqslant r\leqslant n)$ 或者 $f=(-(r-1))r\in E(P_1)\cap E(P_j)(2\leqslant r\leqslant n)$. 若 $j\leqslant r$，则 P_1 中标号 r 的顶点在 P_j 中的标号为 $r-j+1$；若 $j>r$，则 P_1 中标号 r 的顶点在 P_j 中的标号为 $-(j-r)$. 相应地，如果 $r+j-1-\delta\leqslant n$，那么顶点 $-(r-\delta)\in V(P_1)$ 在 P_j 中的标号为 $-(r+j-1-\delta)$；否则，它在 P_j 中的标号为 $2n-(r+j-2-\delta)$ $(\delta=0,1)$.

假定 $g\in\{e,f\}\cap E(P_j)$ 存在，注意到 g 在 P_j 中具有形式 $k(-(k-\delta_1))(\delta_1\in\{0,1\})$，故可断定下述两个等式之一成立：

$$r-j+1=r+j-1-\delta+\delta_1$$

或

$$j-r+\delta_1=2n-r-j+2+\delta.$$

由第一个等式得 $j<2$，由第二个等式得 $j>n$，它们均与 $2\geqslant j\geqslant n$ 矛盾. 因此，上述构造的 n 个哈密顿圈两两边不交. 定理证毕.

定理 3.51 (TILL80a) 对每一个 $n\geqslant 1$，K_n^* 有 $n-1-\varepsilon$ 个两两弧不交的 (有向) 哈密顿圈，其中当 $n=4,6$ 时，$\varepsilon=1$；其余情况下，$\varepsilon=0$.

匹配理论自身是一个研究专题 (见罗瓦兹和普拉默的专著《匹配论》[LOVA86a])，许多经典结果都建立在 1- 因子存在性定理 (塔特 1- 因子定理) 和二部图 1- 因子存在性定理 (霍尔定理) 的基础上. 在本书的第二部分将讨论这些结果.

另一方面，应指出，这些定理构成了图的因子理论的根基. 设 G_1 和 G 是两个图，若 $G_1\subseteq G$ 且 $V(G_1)=V(G)$，则称 G_1 是 G 的一个 **因子**. 图的因子理论研究具有给定顶点次的因子的存在性问题. 这部分内容涉及塔特的文章 [TUTT81a] 和 [BERO84a]，后一篇文章用塔特的 f- 因子定理导出了 k- 因子的某些结果 (见 [TUTT81a, 6.1]).

在本节的最后，我们给出图 G 的某些特殊类型的收缩. 设 $L=\{e_1,\cdots,e_r\}$ $\left(r=\frac{1}{2}p_G\right)$ 是 G 的一个 1- 因子，$Q=\{C_1,\cdots,C_s\}$ $(s\geqslant 1)$ 是 G 的一个 2- 因子. 定义 $V_i=h(e_i)(e_i\in L,\ i=1,\cdots,r)$ 和 $W_j=V(C_j)$ $(C_j\in Q,\ j=1,\cdots,s)$. 令

$$G/L:=(\cdots(G_{V_1})\cdots)_{V_r}\quad 和\quad G/Q:=(\cdots(G_{W_1})\cdots)_{W_s},$$

称 G/L 为 G 的 L **收缩**，G/Q 为 G 的 Q **收缩**.

3.7 图的曲面嵌入、同构

在曲面上，嵌入图是**拓扑图论**的专题之一，最新的专著 [GROS87a] 说明这一领域的研究已成为图论的一个分支. 事实上，拓扑图论是图论最古老的专题之一，

因为四色问题就可以视为它的起源之一. 尽管拓扑图论和图的 (点、边、面) 着色有相当大部分的重叠，但它们彼此是互不包含的. 这里只限于描述图的曲面嵌入的方法，见 [BEHZ79a].

曲面 (在拓扑意义下) 是指一个可定向的或不可定向的闭的连通曲面 $\mathcal{F}$. 称一个图 G **被嵌入在曲面 $\mathcal{F}$ 上**，如果它的顶点是 $\mathcal{F}$ 的点，而它的开边 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ 是开区间 $(0,1)$ 的同胚映象，使得

a) $V(G) = \bigcup\limits_{\mathcal{C} \in E(G)} \mathrm{bd}(\mathcal{C})$，其中 $\mathrm{bd}(\mathcal{C}) := \partial\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} - \mathcal{C}$ ($\overline{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的 (拓扑) 闭包).

b) 对任意 $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in E(G)$，$\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$ 有 $\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{C}'} = \mathrm{bd}(\mathcal{C}) \cap \mathrm{bd}(\mathcal{C}')$，即两条闭边最多相交于它们的一个或两个端点.

换句话说，把 G 画在 $\mathcal{F}$ 上，使得 G 的任何两条边最多相交于 G 的顶点.

一个图 G 是可嵌入在 $\mathcal{F}$ 上的，如果存在一个被嵌入在 $\mathcal{F}$ 上的图 G_1 和两个双射

$$\varphi:\ V(G) \ \to V(G_1), \quad \psi:\ E(G) \ \to E(G_1),$$

使得 $\varphi(h(e)) = h_1(\psi(e))$，其中 h 和 h_1 分别为 G 和 G_1 的关联函数，并且 $\varphi(\{x,y\}) = \{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

一般地，若 G 和 G_1 是两个图，φ 和 ψ 是上述定义的双射，那么称 φ, ψ 为从 G 到 G_1 的**同构**，也称 G 和 G_1 为**同构的**，并记为 $G \simeq G_1$. 如果 $G = G_1$，则称这个同构为**自同构**. 注意：(φ, ψ) 可以用一个双射 $\varphi:\ V(G) \cup E(G) \ \to V(G_1) \cup E(G_1)$ 代替，其中

$$\varphi(V(G)) = V(G_1), \quad \varphi(E(G)) = E(G_1), \quad \varphi(h(e)) = h_1(\varphi(e)),$$

也称 φ 为一个同构映射.

将同构的概念与边 (弧) 收缩的概念结合起来，若对混合图 H 和 H_0, 存在边和弧的序列 $k_1, k_2, \cdots, k_r \in K(H)$，使得 $(\cdots((H_{k_1})_{k_2})\cdots)_{k_r} \simeq H_0$，则称 H **可收缩到** H_0. 在图的情况下，收缩和同构可视为特殊类型的**同态**. 类似于上述概念，同态也是由一对映射 (φ, ψ) 定义的，不过这里的 φ 和 ψ 不必是双射. 注意：在 G_1 无环的情况下，要求相邻的 x, y 满足 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$，或者可以将 ψ 限制到 $E(G) - \{e \in E(G) \mid |\varphi(h(e))| = 1\}$ 上. 一个同态 (φ, ψ)，若 φ 和 ψ 是满射，则称 (φ, ψ) 为**满同态**. 在满同态的情况下，称 G_1 为 G 的**同态象**，并记为 $G \sim G_1$.

当 $\mathcal{F}$ 是球时 (等价于一个平面)，可嵌入 $\mathcal{F}$ 的图称为**平面图**，嵌入在 $\mathcal{F}$ 上的图称为**平图**.

除顶点和边外，被嵌入在某曲面 $\mathcal{F}$ 上的图还有面的概念. 一个**面**是 $\mathcal{F}$ 上一个极大连通点集 F，使得 $F \cap G = \varnothing$. F 对应着 G 的唯一一个子图称为 F 的**边界**，记为 $\mathrm{bd}(F)$. 实际上，$\mathrm{bd}(F)$ 是拓扑边界 ∂F，即 $\mathrm{bd}(F) = \overline{F} - F$. 若 G 的每一个面

都同构于开圆盘，则 G 在曲面 $\mathcal{F}$ 上的嵌入称为 **2- 胞腔嵌入**. 外可平面图是一类有趣的图，它可以嵌入在平面里，使得对某一面 $F \in F(G)$ (用 $F(G)$ 表示被嵌入图 G 的面的集合) 有 $V(G) = V(\mathrm{bd}(F))$，此时称这种嵌入为 G 的**外平面嵌入**.

除了面和面的边界外，嵌入在 $\mathcal{F}$ 上的图 G 确定了某个 $O^+(G)$，它由关联于每个顶点的边按其嵌入的逆时针顺序给出. 若 G 可嵌入 $\mathcal{F}$，G_1 和 G_2 是 G 在 $\mathcal{F}$ 上的两个嵌入 (即 G_1 和 G_2 被嵌入在 $\mathcal{F}$ 中且 $G_1 \simeq G \simeq G_2$)，那么可能有 $O^+(G_1) \neq O^+(G_2)$. G 在 $\mathcal{F}$ 上的两个嵌入 G_1 和 G_2 称为 **O^+ 同构 (O^- 同构)**，如果 $G_1 \simeq G_2$ 且对每一个顶点 $v \in V(G_1)$，$O^+(v) = (e_1(v), \cdots, e_d(v)) \in O^+(G_1)$ 蕴涵着 $O^+(\varphi(v)) = (\psi(e_1(v)), \cdots, \psi(e_d(v))) \in O^+(G_2)$ ($O^-(\varphi(v)) = (\psi(e_1(v)), \cdots, \psi(e_d(v))) \in O^-(G_2)$)，并记为 $G_1 \simeq \oplus G_2$ ($G_1 \simeq \ominus G_2$). 如果图 G 在 $\mathcal{F}$ 上的任意两个嵌入 G_1 和 G_2 都有 $G_1 \simeq \oplus G_2$ 或 $G_1 \simeq \ominus G_2$，则称图 G 在 $\mathcal{F}$ 上是**唯一可嵌入的**.

一般地，给定曲面 $\mathcal{F}$，我们不知道哪些图是唯一可嵌入在 $\mathcal{F}$ 上的. 但是当 $\mathcal{F}$ 是平面时，这些图是可以刻画的 [FLEI73a, 定理 3.5]. 除路、圈和其他一些平凡的图类外，只有下面定理中的一类非平凡图.

定理 3.52 每一个 3- 连通平面图在平面上是唯一可嵌入的①.

定理 3.52 很早就由惠特尼借助于著名的 (组合) 对偶理论证明了 [WHIT32a](不要把组合对偶与几何对偶图混淆). 惠特尼证明了一个 3- 连通平面图的任意两个平面嵌入的组合对偶是同构的，而这个同构是确定嵌入唯一性的基础. 惠特尼还证明了平面图存在 (组合) 对偶. 因此，上述唯一可嵌入性的概念比惠特尼的概念更一般化，因为它可以应用于任何曲面.

定理 3.52 也可以解释为平面嵌入集合 $\{O^+(G), O^-(G)\}$ 是唯一确定的. 嵌入在一个曲面上的图可以从曲面的“外部”看，也可以从“里面”看，此时 $O^+(G)$ 变为 $O^-(G)$. 这一观察说明为什么唯一可嵌入性的定义涉及 O^+ 同构和 O^- 同构.

但是如果一个可平面的 3- 连通图 G 在环面上有一个嵌入 G_1，那么对应的 $O^+(G)$ 可能出现 $O^+(G) \neq O^+(G_1) \neq O^-(G)$，其中 $O^+(G)$ 和 $O^-(G)$ 适用于 G 的任一个平面嵌入. 事实上，G 在环面上不是唯一可嵌入的. 因此，提出这样的问题: G 在各种曲面上的嵌入能得到 E_v^* 的哪些循环顺序. 下面定理给出了一般性回答.

定理 3.53 给定非平凡的连通图 G 及 $O^+(G)$，存在曲面 $\mathcal{F}$ 及 F 上的 2- 胞腔嵌入 G_1，使得 $G \simeq \oplus G_1$.

我们将经常用到平面图的下述一些结果:

引理 3.54 设 G 是一个平面图，则下述结论成立:

① 可平面图能嵌入在环面上，一般地，如果 G 能嵌入到具有 p 个环柄的球上，则对任意的 $q > p$，它也可以嵌入具有 q 个环柄的球.

1) 如果 G 是 2- 连通图，则 G 的每一个面的边界都是 G 的一个圈.

2) 如果 $\kappa(G)=1$，则 G 的任一个面 F 的边界 $\mathrm{bd}(F)$ 是连通的，并且 G 有一个面 F_0，使得 $\mathrm{bd}(F_0)$ 的每一条覆盖途径 W_0 通过一个顶点至少两次，这样的顶点是 G 的割点. 如果 W_0 通过 $e\in E(\mathrm{bd}(F_0))$ 至少两次，那么 e 是 G 的桥. 反之，若 v (e) 是 G 的一个割点 (桥)，那么存在一个面 F_0，使得 $v\in V(\mathrm{bd}(F_0))$ $(e\in E(\mathrm{bd}(F_0)))$，并且 $\mathrm{bd}(F_0)$ 的每一条覆盖途径通过 v (e) 至少两次.

3) $\kappa(G)=0$ 当且仅当存在面 F_0，使得 $\mathrm{bd}(F_0)$ 不连通.

注意：引理 3.54 不能扩充到环面图 (即嵌入在环面上的图).

如果一个图 G 可嵌入具有 r 个环柄 (r 个交叉套) 的球上，但不能嵌入具有 $s<r$ 个环柄 (s 个交叉套) 的球上，则称 G 具有**可定向亏格 r (非可定向亏格 r)**. 用 $\gamma(G)$ 表示 G 的可定向亏格，用 $\overline{\gamma}(G)$ 表示 G 的非可定向亏格. 事实上，每一个图有一个可定向亏格，也有一个非可定向亏格. 对平面图 G 有 $\gamma(G)=\overline{\gamma}(G)=0$. 可平面图刻画如下.

定理 3.55 (库拉托夫斯定理 (Kuratowski's Theorem))　一个图 G 是可平面的当且仅当它不含同态于 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图.

文献 [THOM81b] 给出了定理 3.55 的一个简短证明. 定理 3.55 的其他证明以及可平面图的各种特征的刻画见 [ROSS76b, HOLT81a, CHEN81a]. 库拉托夫斯基定理的一个精炼形式见 [THOM84a].

一般地，给定一个图 G，它可 2- 胞腔嵌入在恰有 r 个环柄但没有交叉套的曲面 $\mathcal{F}$ 上 (记为 $\gamma(\mathcal{F})=r$)，或者 2- 胞腔嵌入恰有 r 个交叉套但没有环柄的曲面 $\mathcal{F}$ 上 (记为 $\overline{\gamma}(\mathcal{F})=r$)，那么 G 的顶点数 p_G，边数 q_G 和面数 f_G 之间的关系可由**欧拉多面体公式**给出.

定理 3.56　设 $\mathcal{F}$ 是满足 $\gamma(\mathcal{F})=r$ 或 $\overline{\gamma}(\mathcal{F})=r$ 的曲面. G 为可 2- 胞腔嵌入 $\mathcal{F}$ 的连通图，则有

$$p_G-q_G+f_G=\begin{cases}2-2r, & \mathcal{F}\ \text{是可定向的},\\ 2-r, & \mathcal{F}\ \text{是非可定向的}.\end{cases}$$

数 $2-2r$ $(2-r)$ 称为可定向 (非可定向) 曲面 $\mathcal{F}$ 的 欧拉示性数$\chi(\mathcal{F})$. 对 G 在 $\mathcal{F}$ 上的 2- 胞腔嵌入，定义 $\chi_{\mathcal{F}}(G):=\chi(\mathcal{F})$. 注意：$\chi(\mathcal{F})\geqslant 0$ 的曲面只有 4 类：可定向的球面和环面、非可定向的射影平面 (有一个交叉套) 和克雷瓶 (有两个交叉套).

由欧拉多面体公式 (定理 3.56) 和连通图 G_0 在曲面 $\mathcal{F}$ 上的 2- 胞腔嵌入 G 可得出一些重要的结论. 观察 G 的面 F 的边界的最短覆盖途径 $W(\mathrm{bd}(F))$ 的集合，可以看到每一条边 e 被使用了两次：或者它属于 G 的两个不同的面 F_1 和 F_2 的边界 $\mathrm{bd}(F_1)$ 和 $\mathrm{bd}(F_2)$，并且在 $W(\mathrm{bd}(F_1))$ 和 $W(\mathrm{bd}(F_2))$ 中各被使用了恰好一次，或者 e 的“两侧”的面是同一个面 F，此时 e 在 $W(\mathrm{bd}(F))$ 中恰出现了两次. 用

$F(G)$ 表示 G 的面的集合，定义 $F_i := \{F \in F(G) \mid l(W(\mathrm{bd}(F))) = i\}$ 和 $f_i := |F_i|$，那么有

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i = f_G, \quad \sum_{i=1}^{\infty} i f_i = 2q_G$$

(注意：G 是有限的，因此，上述和中使得 $f_i \neq 0$ 的 i 只有有限多个). 对于 $F \in F_i$，F 称为 **i- 边形面**. 有时也用 σ_i 代替 f_i. 若 $\delta(G) \geqslant 3$ 且 $f_i = 0(1 \leqslant i \leqslant 6)$，则 $p := p_G$，$q := q_G$，$f := f_G$ 满足

$$3p \leqslant \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2q = \sum_{i=1}^{\infty} i f_i \geqslant 7 \sum_{i=1}^{\infty} f_i = 7f.$$

应用定理 3.56 可得

$$21\chi_{\mathcal{F}}(G) = 21p - 21q + 21f \leqslant 14q - 21q + 6q = -q.$$

由此可得 $\chi_{\mathcal{F}} < 0$，从而 $q \leqslant 21|\chi_{\mathcal{F}}(G)|$. 类似可证，若 $\delta \geqslant 3$，$\chi_{\mathcal{F}}(G) \geqslant 0$ 且 $f_i = 0(1 \leqslant i \leqslant 5)$，则 $\chi_{\mathcal{F}}(G) = 0$，$f = f_6$，$3p = 2q$，即 G 是 3- 正则的. 总结以上讨论，可得下述结果：

推论 3.57 设 $\mathcal{F}$ 是一个曲面，$\chi(\mathcal{F})$ 是它的欧拉示性数，那么存在有限多个 $\delta(G_0) \geqslant 3$ 的连通图 G_0 (也可能没有)，使得 G_0 在 $\mathcal{F}$ 上的 2- 胞腔嵌入 G 无 i- 边形面 $(1 \leqslant i \leqslant 6)$. 特别地，当 $\chi_{\mathcal{F}}(G) \geqslant 0$ 时，对某个 $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$，G 必有一个 i- 边形面. 更进一步，若 $\chi_{\mathcal{F}}(G) > 0$，对某个 $i \in \{1,2,3,4,5\}$，G 必有一个 i- 边形面.

把上述讨论应用于 3- 正则连通图 G，则有

$$6\chi_{\mathcal{F}}(G) = 6p - 6q + 6f = -2q + 6f = \sum_{i=1}^{\infty}(6-i)f_i.$$

由上式可知，即使 $\chi_{\mathcal{F}}(G)$ 和所有的 $f_i (i \neq 6)$ 都已知，这个方程也不能提供关于数 f_6 的任何线索. 事实上，我们有下述引理：

引理 3.58 设 $\mathcal{F}$ 是可定向或不可定向的亏格为 r 的曲面，$\mathcal{G}_3(\mathcal{F})$ 表示可 2- 胞腔嵌入 $\mathcal{F}$ 的所有连通无桥 3- 正则图的集合，那么存在一个无限子集 $\mathcal{G}_3^0(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}_3(\mathcal{F})$，使得对任意 $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_3^0(\mathcal{F})$，$G_1 \neq G_2$ 都有 $G_1 \ncong G_2$，而对每一个 $i \neq 6$，G_1 和 G_2 中 i- 边形面的个数都相等.

证明概要 任意选定 $G_1 := G \in \mathcal{G}_3(\mathcal{F})$，每一条边 $e = xy$ 用一个六边形 C^e 替换，C^e 的顶点依反时针方向标号为 x_1, x, x_2, y_1, y, y_2，其中对 $x_i, y_i \notin V(G) (i = 1, 2)$. 把 C_6 中连接 x_i 和 y_{i+1} 的边视为长边，而其余的边视为短边，$i = 1, 2$ (置 $3 = 1$). 对 $e, f \in E_x$，把 $x \in C^e$ 与 $x \in C^f$ 等同起来，并把恰好一个 $x_i \in C^e$ 与 $x_{i+1} \in C^f$ 等同起来，$i = 1, 2$(置 3=1). 把 C^e 与 C^f 的对应边也等同起来，这样得到的图 G_2

是 3- 正则的，并且对 $i \neq 6$ 的 G_1 的 i- 边形面与 G_2 的 i- 边形面之间存在 1-1 对应. 事实上，G_1 的一个 6- 边形面 (如果存在). 对应于 G_2 的一个 6- 边形面，而这个面不同于任何 $C^e(e \in E(G))$. 因为 $p_{G_2} = 4p_{G_1}$，所以也有 $G_1 \not\simeq G_2$. 重复上述过程，能构造出引理所要求的集合 $\mathcal{G}_3^0(\mathcal{F})$ (也可能还有其他的构造方法).

欧拉多面体公式以及数 $d_i := |V_i(G)|$ 和 $f_i(1 \leqslant i \leqslant \infty)$ 暗示着一种对偶性，并引出下述定义:

定义 3.59 设 G 是嵌入在曲面 $\mathcal{F}$ 上的图. 定义 G 的嵌入于 $\mathcal{F}$ 的**几何对偶图** $D(G)$ 如下：存在双射 $\alpha : V(D(G)) \to F(G)$ 和 $\beta : E(D(G)) \to E(G)$，使得

a) 当 $\alpha(v_F) = F$ 时有 $v_F \in F$.

b) 当 $\beta(e_{FF'}) = e$ 时，$|e_{FF'} \cap \overline{e}| = |e_{FF'} \cap (\overline{e} - h(e))| = 1$，而 $\beta(e_{FF'}) \neq e$ 时有 $e_{FF'} \cap \overline{e} = \varnothing$，其中 β 满足 $e_{FF'} \in E_{v_F} \cap E_{v_{F'}}$ 当且仅当 $\beta(e_{FF'}) \in E(\mathrm{bd}(F) \cap \mathrm{bd}(F'))$. 这个定义包括下述情形：$F = F'$ 位于 e 的两侧，此时 $e_{FF'}$ 是一个环.

由定义 3.59 可得 $G \simeq \oplus D(D(G))$，简记为 $G = D(D(G))$. 特别地，α 使 $D(G)$ 的 i 次顶点对应于 G 的 i- 边形面. 因此，$D(G)$ 的 j 边形面对应于 G 的 j 次顶点. 即使 G 是简单图，$D(G)$ 也可能有环和多重边. 若 G 是 3- 连通的平面图，那么 $D(G)$ 是简单图. 如果 $G \neq K_4$ 是 3- 正则连通的平面图，并且 $p_G > 2$，则 $\kappa(D(G)) = \lambda_c(G)$. $v_F \in V(D(G))$ 通常称为 F 的**柱冠**. 当 $G = K_4$ 时，$G \simeq D(G)$. 如果 $G \simeq D(G)$，则称 G 为**自对偶**的.

下面由一个嵌入图导出另一个 (嵌入) 图的概念.

定义 3.60 设 G 是嵌入在某一曲面 $\mathcal{F}$ 上的图，并且它的每一个面的边界都是一个圈. 按下述方式定义 G 的放射图 $R(G)$，并将它嵌入 $\mathcal{F}$ 上：$V(G) \subset V(R(G))$，双射 $\alpha : V(R(G)) \to V(G) \cup F(G)$，对每个 $F \in F(G)$ 双射 $\beta_F : E_{v_F} \to V(\mathrm{bd}(F))$，并且

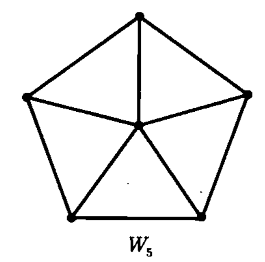
a) 对 $v \in V(G)$ 有 $\alpha(v) = v$，而当 $\alpha(v_F) = F$ 时有 $v_F \in F$.

b) 对满足 $\alpha(v_F) = F$ 和 $e \in E_{v_F}$ 的 v_F 有 $h_R(e) = \{v_F, \beta_F(e)\}$ (h_R 表示 $R(G)$ 的关联函数). 换句话说，v_F 与每一个顶点 $v \in V(\mathrm{bd}(F))$ 恰有一条边相连.

注意：$R(G)$ 是二部图.

下面介绍另外一些图类：嵌入在曲面 $\mathcal{F}$ 上的图 G，若满足 $F_3(G) = F(G)$，则称 G 为 $\mathcal{F}$ 上的**三角剖分**. 注意：平图的三角剖分未必是简单图. 另外，三角剖分是 3- 次图的对偶，而平图的欧拉三角剖分是 3- 次二部平图的对偶. 我们把四面体、六面体、八面体、十二面体、二十面体以及其他三维凸多面体的一维骨架的平面嵌入等同于相应的凸多面体. 由斯坦尼兹 (Steinitz) 和拉德马赫 (Rademacher) 定理 (见 [HARA69a，定理 11.6] 或 [BOND76a，p135]) 知，这种等同是合理的. 特别地，K_4 就是四面体，用 O_6 表示八面体 (图 3.3)，W_n 表示 n- 边棱锥图，W_n 也称为 $\boldsymbol{n}$**- 轮** (图 3.16). 类似地，有 n- 边双棱锥图，O_6 就是 4- 边双棱锥图. 嵌入在平面上的

长为 n 的圈 C 称为 **n- 边形**. 一个平面图 G，如果对 G 的某个面 $F_0 \in F(G)$ 有 $C = \mathrm{bd}(F_0)$ 且 $F_3(G) = F(G) - \{F_0\}$，则称 G 为 **n- 边形 C 的三角剖分**. 因此，平面的三角剖分可视为一个三角形的三角剖分，而 n- 轮是 n- 边形的一个特殊的三角剖分.



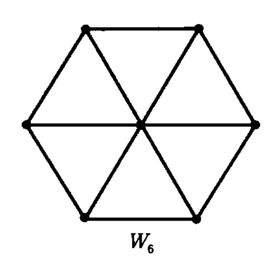


图 3.16 5- 轮和 6- 轮. 注意，$W_3 = K_4$

关于平面图的若干讨论 (和前述的一些结果)，隐含地应用了下述 (拓扑) 结果：

定理 3.61(若尔当曲线定理 (Jordan Curve Theorem)) (欧氏) 平面 E^2 上的每一条简单闭曲线 C 将 E^2 划分为三个集合

$$E^2 = \mathcal{C} \cup \mathrm{int}\,\mathcal{C} \cup \mathrm{ext}\,\mathcal{C},$$

其中 $\mathrm{int}\,\mathcal{C}$ ($\mathrm{ext}\,\mathcal{C}$) 是一个有界 (无界) 区域，并且对连接 $x \in \mathrm{int}\,\mathcal{C}$ 和 $y \in \mathrm{ext}\,\mathcal{C}$ 的每一条 (连续) 曲线 $\mathcal{C}_1$ 必有 $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C} \neq \varnothing$.

如果 G 是 2- 连通的平面图，那么除 G 的一个面外，其余面均是有界区域，剩下的那个面称为**无界面**，并记为 F_∞. 事实上，每一个平面图都有这个性质. 对于外平面图，在大部分情况下，我们将假定 $V(G) = V(\mathrm{bd}(F_\infty))$.

推论 3.61a 设 C 是平面图 G 的一个圈，$v \in V(G)$，如果开边 $e, f \in E_v$ 位于 C 的两侧，那么 e 和 f 属于 G 的不同面的边界.

定义 3.62 设 C 是图 G 的一个圈. 若 $V(C)$ 是 G 的顶点割集，或者 G 被嵌入在平面上且 $\mathrm{int}\ C$ 和 $\mathrm{ext}\ C$ 均包含 G 的一条开边，则称 C 为**分离圈** (C 可视为一条简单闭曲线). 如果 $\mathcal{C}$ 是平面上的一条简单闭曲线，使得 $\mathcal{C} \cap G \subseteq V(G)$，并且 $\mathrm{int}\ \mathcal{C}$ 和 $\mathrm{ext}\ \mathcal{C}$ 均包含 G 的开边，那么也称 $\mathcal{C}$ 为分离圈.

对于 2- 连通平面图 G 中，满足 $C \notin \{\mathrm{bd}(F) \mid F \in F(G)\}$ 的每一个圈 $C \subset G$ 是分离圈.

结束本节之前，观察平面三角剖分的下述结果：

命题 3.63 设 G 是平面三角剖分，$\{V_1, V_2\}$ 是 $V(G)$ 的一个划分，那么下面结论成立：

1) $\langle V_1 \rangle$ 和 $\langle V_2 \rangle$ 不含圈当且仅当它们均是树.

2) 若 $\langle V_1 \rangle$ 不连通，则 $\langle V_2 \rangle$ 包含分离圈.

证明 假设 $\langle V_1\rangle$ 不连通，令 G_1 是 $\langle V_1\rangle$ 的一个分支. 将 G_1 直接看成平面，它的无界面的边界 C 是确定的. 考虑 $V(G_1)$ 的邻点集 $V'\subset V(G)$，由于 G_1 是 $\langle V_1\rangle$ 的一个分支，所以 $V'\subseteq V_2$. 因为 G 是有限的，可以选取 G_1 满足 $\langle V_1\rangle - G_1\subset \text{ext } C_1$, 其中 C_1 是满足 $G_1\subset \text{int } C_1$ 且 $C_1\cap V(G)=\varnothing$ 的若尔当曲线. 可以选取 C_1 为 $D(G)$ 的一个圈，使得 $e\in E(C_1)$ 蕴涵着对 $v_1\in V(G_1)$ 和 $v_2\in V'$ 有 $e\in E(\text{bd}(F_{v_1}))\cap E(\text{bd}(F_{v_2}))$. 由 C_1 的选取可推出，若 $\Delta=\text{bd}(F_\Delta)$，$F_\Delta\in F(G)$ 且 $C_1\cap\Delta\neq\varnothing$，则 $C_1\cap\overline{F}_\Delta$ 是一条开曲线 C_Δ，C_Δ 的端点位于 $E(\Delta)$ 上且 $1\leqslant |V(\Delta)\cap V'|\leqslant 2$. 连续地移动曲线 C_Δ 直到或者 C_Δ 收缩为 $V(\Delta)\cap V'$ 的唯一顶点，或者 C_Δ 变换为 $E(\Delta)\cap E(\langle V'\rangle)$ 的唯一元素. 此时 C_1 被变换为一个子图 $G_2\subseteq\langle V'\rangle$. 由 C_1 的选取，这一变换可以使得 G_2 的一个面 (视 G_2 为一个平面)，如 F_1，恰好包含集合 $\langle V(G)\cap\text{int } C_1\rangle\cup\{e=xy\in E(G)\mid x\in V(G_1), y\in V'\cap V(\text{bd}(F_1))\}$ (这些 e 被视为开边). 因为 $\langle V_1\rangle - G_1\subset\text{ext } C_1$，故 G_2 必有另一个面 $F_2(\neq F_1)$，它包含 $\langle V_1\rangle - G_1$ 的一个分支 G_1'，从而 G_2 不可能是无圈的. 由此得 $\text{bd}(F_2)$ 的一个圈，记为 C_3，使得 G_1 和 G_1' 位于 C_3 的不同侧面. 但 $C_3\subseteq G_2\subseteq\langle V'\rangle\subseteq\langle V_2\rangle$，故 C_3 是 $\langle V_2\rangle$ 的一个圈，它分离分支 G_1，$G_1'\subset\langle V_1\rangle$. 这就证明了命题 2). 上述证明隐含地应用了定理 3.61.

命题 1) 的证明是一个简单的推论. 如果 $\langle V_1\rangle$ 和 $\langle V_2\rangle$ 都是树，显然，它们不含圈. 如果 $\langle V_1\rangle$ 无圈且不连通，则由上一段的证明可知，$\langle V_2\rangle$ 包含一个圈分离 $\langle V_1\rangle$ 的两个分支，与 $\langle V_2\rangle$ 不含圈矛盾，故 $\langle V_1\rangle$ 是树. 类似地，可以证明 $\langle V_2\rangle$ 也是树. 证毕.

3.8 平面图的着色

自从四色问题及希伍德 (Heywood) 地图着色问题提出后，着色问题已成为图论工作者的重点之一. 尽管这两个问题已经解决，但许多其他的着色问题还尚待解决. 本书的第二部分将讨论欧拉图的着色问题，在此只需要可平面图的某些着色性质. 首先给出一般定义. 不失一般性，此处只限于讨论图.

定义 3.64 设 G 是一个图，$\mathcal{P}(V(G))=\{V_1,\cdots,V_k\}(k\geqslant 1)$ 是 $V(G)$ 的一个划分，并且满足对一切的 $i=1,\cdots,k$ 有 $E(\langle V_i\rangle)=\varnothing$，则称 $\mathcal{P}(V(G))$ 为 G 的 **k-(点) 着色**，并且 V_i 为第 i **色类**，即每个 $v\in V_i$ 有颜色 i. 把数 $\chi(G):=\min\{k\mid G$ 有 k- 着色$\}$称为 G 的**色数**. **k- 边着色和色指标** $\chi'(G)$可以用类似方法定义，也可以通过线图 $L(G)$ 的点着色来定义 $\chi'(G)=\chi(L(G))$. 如果 G 被嵌入在某曲面 $\mathcal{F}$ 上，使得每一边 $e\in E(G)$ 属于两个不同面的边界，那么 G 的 **k- 面着色**可由 $D(G)$ 的 k- 着色确定: G 的**面色数** $\chi_F(G)=\chi(D(G))$. 给定 G 的一个面着色，如果 G 的面 $F\in F(G)$ 有颜色 i，则称 F 为 i- 面.

因此，四色问题 (定理) 可叙述为：对每一个平面图 G 都有 $\max\{\chi(G), \chi_F(G)\} \leqslant 4$. 事实上，对于 $\chi(G)$ 只需考虑平面三角剖分，或等价地，对于面着色只需考虑平面 3- 正则图. 在这种情况下，有一个独立于四色定理的重要结果.

定理 3.65(泰特等价性定理 (Tait's Equivalence Theorem)) 对于三次平面图 G，下述结论等价：

1) G 有 4- 面着色.

2) G 有 3- 边着色.

3) G 有 1- 因子分解.

有趣的是，在推论 3.57 的基础上，可以相当容易地证明下述定理：

定理 3.65a (五色定理) 对每一个 2- 连通三次平面图 G 有 $\chi_F(G) \leqslant 5$.

四面体 K_4 表明，$\chi_F(G) < 4$ 并非普遍成立. 另一方面，$\chi_F(G) = 3$ 的三次平面图有简洁的刻画.

定理 3.66(3- 面着色定理 (Three-Face-Coloring Theorem)) 一个三次平面图有 3- 面着色，当且仅当它是二部图.

注意：一个三次平面二部图必有一个 2- 边形面或 4- 边形面，这可由推论 3.57 得到. 另外，按定理 3.48，G 是 1- 因子可分解的，并且任意两个不交的 1- 因子就组成一个 2- 因子，所以 G 必定无桥. 定理 3.65 和定理 3.66 并未揭示出 G 的 3- 面着色和 3- 边着色之间的具体关系. 但是当 $\kappa(G) > 0$ 时，从 G 的一个 3- 面着色 $\mathcal{P}(F(G)) = \{F^1, F^2, F^3\}$ 出发，可推出色类 $\mathcal{P}(F(G))$ 在允许置换的意义下是唯一确定的. G 的 1- 因子分解 $\mathcal{L} := \mathcal{P}(F(G)) := \{L_1, L_2, L_3\}$ 称为**自然的 1- 因子分解**，如果 $e \in L_i$ 当且仅当包含 e 的两个面 F' 和 F''(即 $e \in \mathrm{bd}(F') \cap \mathrm{bd}(F'')$) 满足 $\{F', F''\} \subseteq F^j \cup F^k$ 且 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$，其中 $i \neq j, k$. 因此，若 $F \in F^j$，则 $E(\mathrm{bd}(F))$ 是一个 L_i 和 L_k 中的边构成的交错圈. 由于 3- 面着色 $\mathcal{P}(F(G))$ 可以通过 G 的自然的 1- 因子分解来定义，因此得到以下结果：

定理 3.67 对于连通的三次平面二部图 G，以下结论等价：

1) G 有 3- 面着色 (由定理 3.66 可知，这种 3- 面着色是存在的).

2) G 有自然的 1- 因子分解.

3) G 有 2- 因子 Q，Q 中的每一个圈 C 是 G 的一个面的边界，并且 $l(C)$ 为偶数.

4) $D(G)$ 有 3- 着色.

我们也能刻画 $\chi_F(G) = 2$ 的平面图.

定理 3.68(2- 面着色定理 (Two-Face-Coloring Theorem)) 一个平面图是 2- 面可着色的，当且仅当它是欧拉的.

定理 3.68 可由以下事实推出：对于平面图 G，$D(G)$ 是二部图当且仅当 G 是欧拉的，而 2- 点着色和二部图是等价的. 另外，定理 3.68 和定理 3.66 的等价

性可由定理 3.67 和 G/Q 的构造推出. 事实上，对 G 是三次平面二部图 G，设 $Q = L_i \cup L_j$ $(i \neq j)$，其中 $L_i, L_j \in \mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3\}$，而 $\mathcal{L}$ 是 G 的自然 1- 因子分解. 我们有 G/Q 是平面欧拉图 (反之，若 G/Q 是平面欧拉图，那么通过相反的操作由 G/Q 得到的 G 是三次平面二部图). 在这里，G/Q 或 G/L(其中 G 是平面图，Q 是 G 的 2- 因子，Q 的元素为面的边界，L 是 G 的 1- 因子) 是按平面拓扑及 $O^+(v)(v \in V(G))$ 的自然方式确定的. 此处，我们不给出其形式化定义，而是用图 3.17 来说明.

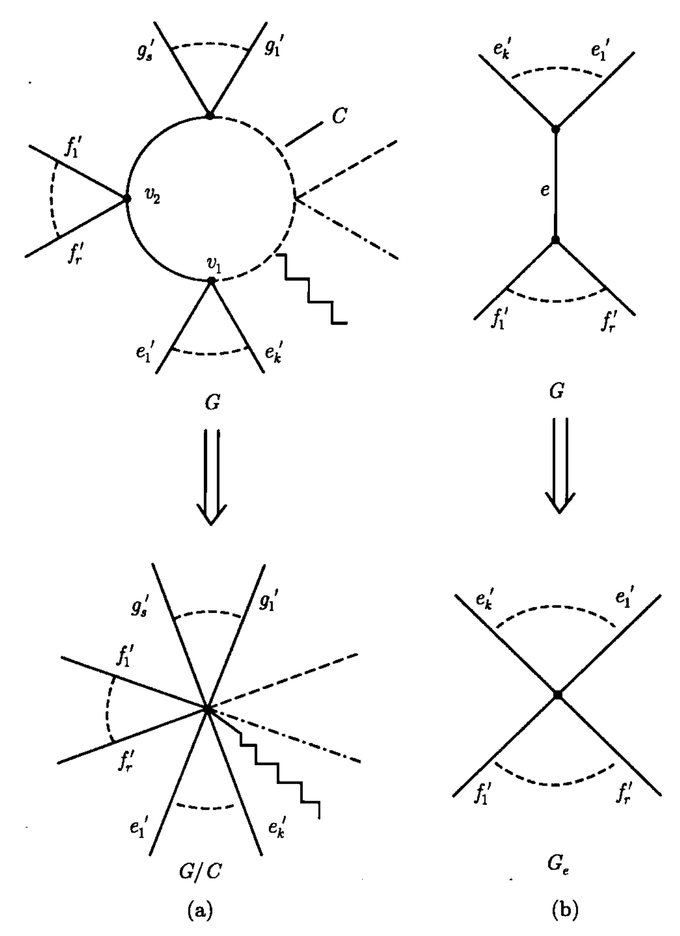


图 3.17　(a) 在平面图 G 中收缩面的边界 C; (b) 在平面图 G 中收缩边 e

实际上，定理 3.68 给出了平面欧拉图的一种特殊类型的欧拉定向. 设 G 是一个平面欧拉图，假设给出了 G 的 2- 面着色，使无界面的颜色为 1，从而第二色类 $F_2(G)$ 的面均是有界面. 因为每一边 $e \in E(G)$ 恰好属于一个面 $F \in F_2(G)$ 的边界 $\mathrm{bd}(F)$，因此，$S = \{\mathrm{bd}(F) \mid F \in F_2(G)\}$ 是 G 的迹分解. 用弧 a_e 替换 e，使得当从

a_e 的尾通过 a_e 到达 a_e 的首时，面 F 位于左侧，对每一边 e 作上述定向，就得到每一个面 $F \in F_2(G)$ 的边界 $\mathrm{bd}(F)$ 的逆时针定向，从而得到 G 的定向图 D_G. 因为对每一个 $t=\{e',f'\} \in X(u) \subseteq X_S$，$v$ 是 a_e 的首当且仅当 v 是 a_f 的尾，因此，D_G 是欧拉的. 另外，由 D_G 的定义可得在 $O^+(v)=(e_1(v),e_2(v),\cdots,e_d(v))$ 中，v 是 e_i 的首当且仅当 v 是 $e_{i+1}(v)$ 的尾，其中 $d=d(v)$, $i=1,2,\cdots,d$ (令 $d+1=1$). 因此，在 $O^+(v) \in O^+(D_G)$ 中，进入和出去的半弧是交替的. 我们把 D_G 和 D_G^{R} 均称为 G 的**规范定向**.

3.9 哈密顿圈

我们从哈密顿圈和控制圈之间的关系开始. 图 $K_{1,n}$ 称为 ***n*- 星**(或星).

引理 3.69(HARA69a, p83) 无环图 G 有非平凡的控制迹，当且仅当 $L(G)$ 有哈密顿圈并且当 $n=p_G-1$ 时 G 不是 n- 星.

哈密顿圈是图论研究中的中心课题之一. 由于泰特的错误假设，使四色猜想的研究极大地推动了可平面图的哈密顿圈的研究. 实际上，泰特深信每一个 3- 连通三次可平面图 G 有哈密顿圈 (泰特猜想). 如果泰特猜想是正确的，那么四色定理就解决了. 因为若 H 是三次可平面图 G 的哈密顿圈，那么 G 有 1- 因子分解 $\mathcal{L}=\{L_1,L_2,L_3\}$，使得 $L_1 \cup L_2 = E(H)$ 且 $L_3=E(G)-E(H)$(由引理 3.4 及 G 的 3- 正则性知，p_G 必是偶数). 由泰特等价性定理 (定理 3.65) 可知，G 在平面上的任一嵌入是 4- 面可着色的. 注意: 哈密顿圈的存在性和 1- 因子分解的存在性均与图的嵌入无关，而面着色却与实际的嵌入有关.

1946 年，塔特否定了泰特的猜想，并证明了每一个 4- 连通可平面图是哈密顿的①. 这个结果是下述更一般定理的直接推论. 为了介绍这个定理，需要引进另一些概念. 设图 G 不是森林，C 是 G 的一个圈. 令 $G_1 := G - V(C)$，并对 G_1 的每一分支 $B_1 \subseteq G_1$，令

$$B := \langle E(B_1) \cup E(V(B_1)) \rangle.$$

换句话说，B 是由 B_1 加上 C 中与 B_1 相邻的点及连接这些点与 $V(B_1)$ 的边组成的. 称点 $v \in V(B) \cap V(C) = V(B) - V(B_1)$ 为 ***C*- 附着点** (在不引起混淆的情况下，也简称为附着点)，而称 B 为 ***C*- 桥**(或桥)②. 注意: 对任意两个 C- 桥 B_1 和 B_2，我们有 $E(B_1) \cap E(B_2) = \varnothing$，而每一个 $v \in B_1 \cap B_2$(若这样的 v 存在) 都是附着点. C 的**弦**或**对角线**是一条边 e，满足 $e \notin E(C)$ 且 $h(e) \subseteq V(C)$(h 是 G 的关联函数)，e 也称为 C- 桥. 考虑边 $e \in E(G)$ 以及使得 $e \in \mathrm{bd}(F') \cap \mathrm{bd}(F'')$ 的两个面

① 此后发现了许多 3- 连通三次可平面图没有哈密顿圈 [ZAKS82a].

② 显然，C- 桥与前面定义的桥毫无共同之处. 塔特的这一术语使得某些图论工作者 (包括本人) 感到头痛，不过最好的解决方法是仅仅着眼于对他的奇妙结果的欣赏.

F' 和 F''，如果一个圈 C_0 满足：① $e \in E(C_0)$，② $F' \in \text{int}C_0$ 和 $F'' \in \text{ext}C_0$，或者 $F'' \in \text{int}C_0$ 和 $F' \in \text{ext}C_0$，③ C_0 包含 F' (F'') 的那一侧所含的面数尽可能得少，那么 C_0 称为关于 F' (F'') 的 e 的**端圈**. 如果 G 是 2- 连通图，则这样的 C_0 就是 $\text{bd}(F')$ ($\text{bd}(F'')$).

下述结果通常称为**塔特桥定理 (Tutte's "Bridge Theorem")**(见 [TUTT77a, 定理 1]. 它是 [TUTT56b] 的改进，并包含推论 3.71).

定理 3.70 对于平面图中每一条位于某一个圈上的边 e，都存在一个圈 C 满足

1) C 包含 e;

2) 每一 C- 桥至多有三个附着点;

3) 如果对一个 C- 桥 B 和 e 的一个端圈 C_0 有 $E(B) \cap E(C_0) \neq \varnothing$，那么 B 恰有两个附着点.

此外，由定理 3.70 容易导出与本书有关的下述结果:

推论 3.71 每一个 (简单) 可平面的 4- 连通图 G 有哈密顿圈 H.

证明 设 C 是定理 3.70 所描述的圈，并设 B 是一个 C- 桥，但 B 不是 C 的弦，那么 $B \cap C$ 是一个顶点割 V_s 且 $|V_s| < 4$，除非 $B \cap C = V(C)$ 且每一边 $e \in E(G) - (E(C) \cup E(B))$ 是 C 的弦 (定理 3.70 的 2)). 但 G 是 4- 连通的，故"除非"的情况发生，由定理 3.70 的 2) 知，C 是三角形，G 中包含 e 的两个面的边界 C' 和 C'' 是端圈且满足

$$(E(C') \cap E(B)) \cup (E(C'') \cap E(B)) \neq \varnothing.$$

由定理 3.70 的 3)，B 恰有两个附着点，这一事实蕴涵着 C 含有一个 2- 边形，从而与 G 是简单图的假设矛盾. 因此，每一边 $e \in E(G - C)$ 是 C 的一条弦，从而 $H := C$ 是 G 的哈密顿圈.

推论 3.71 推广了惠特尼 (H. Whitney)[WHIT31a] 的下述结果:

推论 3.72 设 D 是平面简单三角剖分，使得 D 的每一个三角形是一个面的边界，那么 D 是哈密顿的.

注意：推论 3.72 的假设相当于对 $D \neq K_4$ 有 $\kappa(D) \geqslant 4$. 事实上；设 $G \neq K_4$ 是一个可平面三次图，则 $\lambda_c(G) = \kappa(D) \geqslant 4$，其中 $D = D(G)$. 我们重叙推论 3.72 并应用推论 3.71 及引理 3.69，得到下述结果 (对于三次图 G，若 $\kappa(L(G)) < 4$，则 $\kappa(L(G)) = \lambda_c(G)$):

推论 3.73 令 G 是可平面的三次图且 $\lambda_c(G) \geqslant 4$，那么 $D(G)$ 和 $L(G)$ 都是哈密顿的，并且 G 有塔特圈.

上述结果 (包括塔特桥定理)，也可由汤姆森 (C.Thomassen) 的一个更一般的结果得出，它推广了推论 3.71(见 [THOM83a] 和 [CHIB86a]，后一篇文章纠正了前

一篇文章中的一个小错误).

下述结果考察三次平面图的哈密顿圈和 $D(G)$ 中的树的关系：

引理 3.74 对于三次平面图 G，下述结论等价：

1) G 是哈密顿的.

2) $V(D(G))$ 有一个划分 $\{V_1, V_2\}$，使得 $\langle V_1\rangle$ 和 $\langle V_2\rangle$ 都是树.

进一步，给定 2) 中的划分和 $F' := \{F_v \in F(G) \mid v \in V_1\}$，那么 G 中恰好属于 F' 中一个元素的边界的边确定了 G 的一个哈密顿圈.

证明 1)⇒2) 设 H 是 G 的一个哈密顿圈，把 H 视为一条若尔当曲线. 因此，H 确定了它的弦的集合的一个划分

$$E(G) - E(H) := E_b \cup E_u,$$

使得每一 $e \in E_b$ 位于 H 的内部 $\text{int}\, H$，而每一 $f \in E_u$ 位于 H 的外部 $\text{ext}\, H$ (这里 e 和 f 均为开边). 类似地，H 确定了 G 的面的集合的一个划分

$$F(G) = F_b \cup F_u,$$

其中 F 的下标 b 和 u 的意义同上. 令 $V_1 \subset V(D(G))$ 是对应于 $F_b \subset F(G)$ 的顶点集，$V_2 \subset V(D(G))$ 是对应于 $F_u \subset F(G)$ 的顶点集. 考虑子图 $\langle V_1\rangle, \langle V_2\rangle \subset D(G)$. 如果 $\langle V_1\rangle$ 和 $\langle V_2\rangle$ 中有一个含有圈，不妨设 $\langle V_1\rangle$ 含有圈 C. C 可视为由 F_b 的某些面的柱冠和对应于 E_b 的某些 (拓扑) 弧 $e_{FF'}$ 所组成的若尔当曲线. 按定义，$e_{FF'} \cap e \neq \varnothing$ 当且仅当 $e \in E(\text{bd}(F)) \cap E(\text{bd}(F')) \cap E_b$，在这种情况下，$|e_{FF'} \cap e| = |e_{FF'} \cap \overline{e}| = 1$. 由这个等式和定理 3.61 可以推出：关联于边 e 的两个顶点 x 和 y 位于在 C 的不同的侧面 (注意：按定义，$V(G) \cap D(G) = \varnothing$). 不失一般性，假设 $x \in \text{int}\, C$，但是 $V(H) = V(G) \supset \{x, y\}$ 蕴涵着 H 中有一条路 P 连接 x 和 y. 因此，由定理 3.61 有 $H \cap C \neq \varnothing$. 另一方面，由 $D(G)$ 和 $\langle V_1\rangle$ 的定义推得 $C \subset \text{int}\, H$，但这和 $C \cap H \neq \varnothing$ 不可能同时成立. 因此 $\langle V_1\rangle$ 是无圈的. 类似可证 $\langle V_2\rangle$ 也是无圈的. 因为 G 是三次图，故 $D(G)$ 是平面三角剖分，从而由命题 3.63 的 1) 推知，$\langle V_1\rangle$ 和 $\langle V_2\rangle$ 都是树.

2)⇒1) 假设 $V(D(G))$ 的某个划分 $\{V_1, V_2\}$ 满足 $\langle V_1\rangle, \langle V_2\rangle \subset D(G)$ 均是树. 设 $F' \subset F(G)$ 如引理所定义. 用归纳论证 (证明省略) 可知，F' 确定一个圈 $H \subset G$，使得 $e \in E(H)$ 当且仅当恰有一个 $F_v \in F', v \in V_1$，使得 $e \in E(\text{bd}(F_v))$. 把 H 视为一条若尔当曲线，并不失一般性，设 $\langle V_1\rangle \subset \text{int}\, H$ (注意：对每一个 $F_v \in F'$，$F_v \cap \text{int}\, H \neq \varnothing$ 当且仅当 $F_v \cap (\text{ext}\, H \cup H) = \varnothing$，此时有 $F_v \subset \text{int}\ H$). 假设 H 不是哈密顿圈，那么由 H 的构造和假设知，存在 $x \in (V(G) - V(H)) \cap \text{ext}\, H$ (注意：$G_0 := \langle \bigcup_{F_v \in F'} E(\text{bd}(F_v))\rangle$ 是 2- 连通外平面图). 因此，对某个 $w \in V_2$ 有 $x \in V(\text{bd}(F_w))$. 因为对每个 $v \in V_1$ 都有 $F_v \subset \text{int}\, H$，所以对每个满足 $x \in V(\text{bd}(F_w))$

的面 F_w 都有 $F_w \subset \operatorname{ext} H$ 且 $w \in V_2$. 这意味着 $\langle\{w \in V_2 \mid x \in V(\operatorname{bd}(F_w))\}\rangle$ 包含 $\langle V_2\rangle$ 的一个圈. 这与 $\langle V_2\rangle$ 是一棵树的假设矛盾. 因此，H 是哈密顿圈. 引理证毕.

现在讨论任意简单图的哈密顿圈问题. 首先，介绍奥锐 (O.Ore) 的一个著名定理，它推广了狄拉克 (G.A.Dirac) 的结果，并且对图的哈密顿问题的研究有很大影响.

定理 3.75(奥锐定理 (Ore's Theorem)) 如果 G 是 p 阶简单图，并且对任意不相邻的顶点 x 和 y 都有 $d(x)+d(y) \geqslant p$，则 G 是哈密顿的.

证明 显然，当 $G \simeq K_p$ 时，定理正确. 设 G 是使定理不成立的极大 p 阶图 ($p_G = p$ 固定，边数 q_G 达到最大)，那么存在 $x, y \in V(G)$，使得 $E_x \cap E_y = \varnothing$，从而 $G_1 = G \cup \{xy\}$ 是简单图. 由 G 的选择，G_1 有哈密顿圈 $H_1 \supset \{xy\}$. 记 $P := H_1 - \{xy\}$ 为顶点序列 $(x = v_1, y = v_p)$，

$$P = v_1, v_2, \cdots, v_p$$

对一切 $1 \leqslant j \leqslant p-1$，若 $v_1 v_{j+1} \in E(G)$，则 $v_p v_j \notin E(G)$；否则，$\langle E(P - \{v_j v_{j+1}\}) \cup \{v_1 v_{j+1}, v_p v_j\}\rangle$ 是 G 的一个哈密顿圈，与 G 的选取矛盾. 因此有 $d(v_p) \leqslant p - 1 - d(v_1)$，即 $d(v_1) + d(v_p) < p$. 这与假设矛盾.

应用与证明定理 3.75 相同的方法可得关于二部图的哈密顿圈的下述结果:

推论 3.76 令 G 是简单二部图，其顶点集的二部划分为 $\{V_1, V_2\}$(即 $E(\langle V_1\rangle) = E(\langle V_2\rangle) = \varnothing$)，$|V_1| = |V_2| = k > 1$. 如果存在 $\alpha \in N \cup \{0\}$，使得 $k > 2\alpha$ 和 $\delta(G) \geqslant k - \alpha$，则 G 是哈密顿的.

证明 显然，当 $G \simeq K_{k,k}$ 时，推论成立. 选取使推论不成立且使得 q_G 最大的图 G. 设 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ 且 v_1 和 v_2 不相邻. 令 $G_1 := G \cup \{v_1 v_2\}$. 由 G 的选择知，G_1 是哈密顿的，并且 G_1 的每一个哈密顿圈都包含 $v_1 v_2$. 因此，G 有哈密顿路 P，其顶点序列记为

$$P = v_{1,1}, v_{2,1}, v_{1,2}, v_{2,2}, \cdots, v_{1,k}, v_{2,k},$$

其中 $v_1 = v_{1,1}, v_2 = v_{2,k}$，对 $1 \leqslant j \leqslant k, i = 1, 2, v_{ij} \in V_i$. 显然，$\{v_1 v_{2,j}, v_2 v_{1,j}\} \not\subseteq E(G)$；否则，$(E(P) - \{v_{1,j} v_{2,j}\}) \cup \{v_1 v_{2,j}, v_2 v_{1,j}\}$ 是 G 的一个哈密顿圈，这与 G 的假设矛盾. 因此，

$$2k - 2\alpha \leqslant d(v_1) + d(v_2) \leqslant d(v_1) + (k - d(v_1)),$$

从而 $k \leqslant 2\alpha$，这与假设矛盾. 证毕.

关于有向图的哈密顿圈，有类似于定理 3.75 的结果 [MEYN73a], [BOND77a] 中给出了这个结果的一个简短证明.

定理 3.77(米内定理 (Meyniel's Theorem)) 设 D 是 p 阶强连通简单有向图，若对每一对不相邻顶点 $x,y \in V(D)$ 有 $d(x)+d(y) \geqslant 2p-1$，则 D 是哈密顿的.

推论 3.78 如果 D 是 p 阶简单有向图，并且对每一对不相邻顶点 x 和 y 有 $d(x)+d(y) \geqslant 2p-3$，则 D 有哈密顿路.

感兴趣的读者可参见哈密顿问题的综述文章 [BEIN78a，第 6 章].

3.10 关联矩阵和邻接矩阵、流和张力

图论与数学的其他分支之间存在着各种联系 (见 [WILS79a]). 为了本书的目的 (特别是第 2 卷中的第 8, 9 章)，把图与线性代数及线性规划联系起来是很有意义的，这不仅是为了实施图的算法，也为图论中某些理论结果的证明提供了工具. 这里只讨论图与有向图，并从图的矩阵表示开始.

定义 3.79 1) 设图 G 的顶点集 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_p\}$ 和边集 $E(G)=\{e_1,\cdots,e_q\}$. 令 $B(G)$ 是 $p\times q$ 阶矩阵，它的第 r 行对应 $v_r\,(1\leqslant r\leqslant p)$，第 s 列对应 $e_s(1\leqslant s\leqslant q)$，并且 $b_{r,s}=1$ 当且仅当 $e_s\in E_{v_r}$；否则，$b_{r,s}=0$. 类似地，如果 D 是无环有向图，设 $V(D)=\{v_1,\cdots,v_p\}$，$A(D)=\{a_1,\cdots,a_q\}$，那么 $p\times q$ 阶矩阵 $B(D)$ 的元素 $b_{r,s}=1$ 当且仅当 $a_s\in A^+_{v_r}$，$b_{r,s}=-1$ 当且仅当 $a_s\in A^-_{v_r}$，否则，$b_{r,s}=0$. 上述定义的 $B(G)$(或 $B(D)$) 称为 G(或 D) 的**关联矩阵**.

2) 设 G 和 D 为 1) 中所定义，但 D 不必无环. $A(G)$ 和 $A(D)$ 均是 $p\times p$ 阶矩阵，它们的第 i 行和第 i 列均对应 v_i. 对于 $i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant p$，$A(G)$ 的元素 $a_{i,j}(G)=|E_{v_i}\cap E_{v_j}|$，$A(D)$ 的元素 $a_{i,j}(D)=|A^+_{v_i}\cap A^-_{v_j}|$，而 $a_{i,i}(G)=a_{i,i}(D)=\lambda_{v_i}$. $A(G)$(或 $A(D)$) 称为 G(或 D) 的**邻接矩阵**.

由观察可得下述结论：

1) $B(G)$ (或 $B(D)$) 的第 i 行元素的和等于 $d(v_i)$ $(\mathrm{od}(v_i)-\mathrm{id}(v_i))(1\leqslant i\leqslant p)$，而当 G(或 D) 不含环时，$B(G)$(或 $B(D)$) 的第 j 列元素的和，等于 2(或 0) $(1\leqslant j\leqslant q)$.

2) $A(G)$ 是对称矩阵，而 $A(D)$ 满足等式 $A(D)=(A(D^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{T}}$，其中上标 T 表示矩阵转置. 因此，在 $A(G)$ 中第 i 行的和等于第 i 列的和等于 $d(v_i)-\lambda_{v_i}$ (注意：一个环在 $A(G)$ 和 $A(D)$ 中只算一次)，而在 $A(D)$ 中第 i 行的和等于 $\mathrm{od}(v_i)$，第 i 列的和等于 $\mathrm{id}(v_i)$ (这里 $a\in A_{v_i}$ 在第 i 行和第 i 列中分别计算一次).

下面讨论弧上具有实数权的有向图.

定义 3.80 设 D 是有向图.

1) 一个映射 $\varphi: A(D)\to\mathbb{R}$，若它满足对每一个 $v\in V(D)$ 都有 $\sum\limits_{a\in A^+_v}\varphi(a)=\sum\limits_{a\in A^-_v}\varphi(a)$，则称 φ 为一个**流**.

2) 映射 $\psi_V : V(D) \to \mathbb{R}$ 称为**位势**. 给定一个位势 ψ_V，定义另一个映射 $\psi : A(D) \to \mathbb{R}$, 其中 $\psi(a) = \psi_V(g(a)) - \psi_V(f(a))$ (g 和 f 分别为 D 的首函数和尾函数), 称这样的 ψ 为**位势差或张力**. 设 $C \subseteq D$ 使得 $G_C \leqslant G_D$ 是一个圈, 又 C_0 是一个有向圈, 满足 $G_{C_0} = G_C$. 记 $A^+(C) := A(C) \cap A(C_0)$ 和 $A^-(C) := A(C^{\mathrm{R}}) \cap A(C_0)$

引理 3.81 设 D 是有向图，给定两个映射 $\varphi, \psi : A(D) \to \mathbb{R}$. φ 是流当且仅当对任意 $X \subseteq V(D)$ 的上边界 $A(X)$ 有 $\sum\limits_{a \in A^+(X)} \varphi(a) = \sum\limits_{a \in A^-(X)} \varphi(a)$. ψ 是张力当且仅当对每一个满足 G_C 为圈的 $C \subseteq D$ 有 $\sum\limits_{a \in A^+(C)} \psi(a) = \sum\limits_{a \in A^-(C)} \psi(a)$.

引理 3.81 指出了流和张力之间的紧密关系. 用 $a_1, \cdots, a_q$ 表示 D 的弧，设 q 维向量 $\varphi_A, \psi_A \in \mathbb{R}^q$ 的第 i 个分量分别为 $\varphi(a_i)$ 和 $\psi(a_i)$. 令 $R_\varphi, R_\psi \subseteq \mathbb{R}^q$ 分别表示所有流向量 φ_A 和张力向量 ψ_A 的集合.

定理 3.82 R_φ 和 R_ψ 均是 $\mathbb{R}^q$ 的子空间，并且 R_ψ 是 R_φ 的正交补.

但是在许多理论和实际问题 (如运筹学) 中，人们对任意的流和张力不太感兴趣，感兴趣的是满足某些边界条件的流和张力. 为此，引进另一概念. 如果 $\alpha, \beta : A(D) \to \mathbb{R}$ 满足对每一个 $a \in A(D)$ 有 $\alpha(a) < \beta(a)$ (或 $\alpha(a) \leqslant \beta(a)$), 则记 $\alpha < \beta$(或 $\alpha \leqslant \beta$).

定义 3.83 设 D 是有向图，令给定的映射 $\alpha, \beta : A(D) \to \mathbb{R}$ 满足 $\alpha \leqslant \beta$. 如果流 $\varphi : A(D) \to \mathbb{R}$ 满足 $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$，则称流 φ 为 (α, β)-**可行的**，如果对每一弧 $a \in A(D)$ 有 $\alpha(a) = 0$，则称 $\beta(a)$ 为弧 a 的**容量**，此时 (α, β)- 可行流 φ 简称为 β-**可行**.

定理 3.84(霍夫曼定理 (Hoffman's Theorem)) 设 D 是有向图，给定映射 $\alpha, \beta : A(D) \to \mathbb{R}$ 满足 $\alpha \leqslant \beta$，那么 D 中存在 (α, β)- 可行流当且仅当对每一个上边界 $A_X := A(X)(X \subseteq V(D))$ 有不等式

$$\sum_{a \in A_X^+} \alpha(a) \leqslant \sum_{a \in A_X^-} \beta(a), \quad \sum_{a \in A_X^-} \alpha(a) \leqslant \sum_{a \in A_X^+} \beta(a).$$

假设有向图 D 和映射 (α, β) 有下述性质：① 存在 $a_0 \in A(D)$，使得 $f(a_0)$ 是一个汇，而 $g(a_0)$ 是 $D - a_0$ 的一个源，② 对每一个 $a \in A(D)$ 有 $\alpha(a) = 0$，③ $\beta(a_0) \geqslant \sum\limits_{a \in A(D) - \{a_0\}} \beta(a)$，则称 D 为一个**网络**[①]. 由 ② 知，平凡流 $\varphi \equiv 0$ 也是 β- 可行的，因此，有意义的是搜索一个使 $\varphi(a_0)$ 最大的 β- 可行流，这就是最

① 网络有很多种定义，除了条件 ③ 以外，本书中的定义与 [BERG62a,p191] 中的定义一致. 那里没有定义 $\beta(a_0)$，从而 $\varphi(a_0)$ 可以任意大. 另一方面，$\varphi(a_0) \leqslant \sum\limits_{a \in A(D) - \{a_0\}} \beta(a)$ 这一条件是平凡的. 因此，条件 ③ 只是为了在整个 $A(D)$ 上定义 β.

大流问题. 为了刻画最大流，考虑 $V' \subset V(D)$，使得 $f(a_0) \in V'$ 而 $g(a_0) \notin V'$，称 $A^-(V')$ 为一个**网络割**. $\beta(A^-(V')) := \sum\limits_{a \in A^-(V')} \beta(a)$ 称为**网络割的容量或值**.

定理 3.85(福特–富克逊最大流–最小割定理 (Ford-Fulkerson's MaxFlow-MinCut Theorem)) 设 D 是一个网络，那么最大流 $\varphi(a_0)$ 等于网络中所有可能割的最小值.

由定理 3.85 直接可以得到流理论中的一个很重要的性质如下：

推论 3.86([WILS79a,p243]) 设 D 是一个网络. 对每一个 $a \in A(D)$ 都有 $\beta(a) \in N \cup \{0\}$，那么最大流 $\varphi(a_0)$ 为整数.

考虑 $D_1 = D - \{f(a_0), g(a_0)\}$ 是二部图的特殊情形，其中 $V(D_1) = V_1 \cup V_2$ 且 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$，并满足 ① $N(g(a_0)) \cap D_1 = V_1$，$N(f(a_0)) \cap D_1 = V_2$；② 若 $a \in A(D_1)$，则 $f(a) \in V_1$，$g(a) \in V_2$；③ 若 $a \in A(D) - A(D_1) \cup \{a_0\}$，则 $\beta(a) \geqslant 0$；④ 若 $a \in A(D_1)$，则 $\beta(a) \geqslant \sum\limits_{b \in A^+_{g(a_0)} \cup A^-_{f(a_0)}} \beta(b)$ 且 $\beta(a_0) \geqslant \sum\limits_{a \in A(D) - \{a_0\}} \beta(a)$①.

给定一个费用函数 $c : A(D) - \{a_0\} \to \mathbb{R}^+$，要求一个可行最大流 φ，使得对一切的 $a \in A^+_{g(a_0)} \cup A^-_{f(a_0)}$ 都有 $\varphi(a) = \beta(a)$，并且 $\sum\limits_{a \in A(D) - \{a_0\}} c(a)\varphi(a)$ 最小.

这种限制下的最大流问题称为**运输问题或希奇柯克问题** [BERG62a, p207]，它的一个特殊情况为**分派问题** [PAPA82a, p248]，这些问题将在第 8 章中讨论. 注意：最大流问题可以扩充到 $\alpha(a) \geqslant 0 (a \in A(D) - \{a_0\})$ 的情况，这种情况可以转化为前述情形 (见 [BERG62a, p204–205]).

对流和张力，特别是对运筹学有兴趣的读者，请参见文献 [BERG62a, FORD62a, EVEN79a] 和 [WILS79a] 中艾文多–波第那 (Avondo-Bodina) 的综述文章. 这些最大流问题都可以归结为线性规划 LP 问题，本书中把各种情形的问题归结为 LP 问题后，都将不再详细讨论.

3.11 算法及其复杂性

20 世纪 60 年代至 80 年代末期，图的算法及其复杂性研究已成为飞速发展的研究领域，关于这一专题的著作 (或至少包含了这方面专题的书) 已出版了很多. 虽然我们在某些章节 (不只是在第 10 章) 中考察了一些算法，并对其复杂性进行了研究，但这并不是本专著的主要任务. 因此，为了缩短本章篇幅，感兴趣的读者可以参见文献 [WILS79a] 中里德 (R.C.Read) 的综述文章以及 [EVEN79a, PAPA82a, JUNG87a]. 这些参考文献或多或少地包含了复杂性讨论，介绍了 NP- 完全理论. 对 NP- 完全问题研究感兴趣的读者，可以参见经典著作 [GARE79a]. 虽然在本

① 对这样的弧 a，通常假定其容量无穷大. $\beta(a)$ 的下界对流没有约束作用.

专著里得不到“莎士比亚问题”(“To P or to NP? That is the question!”) 的明确答案，但是假设读者已熟悉 NP 类和它的子类 P 及 NPC，其定义见 [GARE79a, EVEN79a, PAPA82a]. [EVEN79a] 中还引述了库克 (Cook) 和艾浩 (Aho)、浩普克罗特 (Hopcroft) 和乌尔曼 (Ullman) 关于 NP- 完全性的另外两个概念.

下面概述 (而不证明) P 类中某些图论的判定问题. 对于 NPC 中的问题，本书将在适当的地方陆续介绍. 多项式算法的复杂度也将在相应的章节中予以叙述.

定理 3.87　设 H 是混合图，下述问题有多项式时间算法：

a) 确定 $\kappa(H), \lambda(H)$.

b) 确定 H 是否强连通 (若 H 中含有向图).

c) 求支撑树.

d) 如果 $H = D$ 是强连通的有向图，求以 $v_0 \in V(H)$ 为根的入树或出树 *.

当 $\mathbb{Q}$ 是实数集时，记 $\mathbb{Q}^+ := \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$.

定理 3.88　设 G 是一个图，给定 $f: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. 对于 $E_0 \subseteq E(G)$，定义 $f(E_0) = \sum_{e \in E_0} f(e)$. 下述问题有多项式时间算法：

a) 确定所有点对 $u, v \in V(G)$ 之间的距离 (即路 $P = P(u, v)$，使得 $f(E(P))$ 最小)①.

b) 求最小费用支撑树 (即使费用 $f(E(T))$ 最小的树 T).

c) 如果 G 有完美匹配，求最小费用的完美匹配 (即使 $f(L)$ 最小的 1- 因子 L)②.

确定给定的边、弧、顶点集合是否是分离集的问题 (特别是 $k \in K(H)$ 是否是桥，或 $v \in V(H)$ 是否是割点)，可以归结为确定相应子图的连通性的问题，因此，bc(H) 能在多项式时间内构造出来.

前一节的流问题也有多项式时间算法，即使容量是无理数. 但原始的福特–富克逊算法当容量是无理数时，不是多项式时间算法 (见 [EVEN79a, p96, 97]).

结束本节前对可平面图的有关问题进行讨论，内容主要来自于文献 [NISH88a].

定理 3.89　确定一个图是否是 a) 可平面的；b) 外可平面的，都有线性时间算法 (见 [WIEG87a]).

定理 3.90　设 G 是一个可平面图，G_1 是 G 在平面上的一个嵌入. 下述问题有线性时间算法：

---

* 这里不必要求 $H = D$ 为强连通图. —— 译者

① 这个问题的第一个算法就是广度优先搜索法，它是穆尔 (E.F.Moore)[MOOR59a] 在“穿过迷宫的最短路”一文中提出的，请读者不要被这一标题所迷惑，因为迷宫就是一个已知的图. 本书第 10 章把迷宫视为顶点具有局部信息的图.

② 确定 G 是否有一子图，其顶点具有指定的次的问题，有一个复杂性为 $O(p^3)$ 的算法 [ANST85a].

a) 画出 G 的平面嵌入 (即使要求边是直线段以及面的边界是凸多边形 [CHIB84a]).

b) 确定 $O^+(G_1)$①.

c) 若 G_1 无桥，确定 G_1 的面的边界.

d) 由 G_1 画出 $D(G_1)$.

e) 在 G_1 的某个面 $F \in F(G_1)$ 内嵌入一个可平面图 G_0，并将 $\mathrm{bd}(F)$ 上某些指定的顶点与 $\mathrm{bd}(F_\infty) \subseteq G_0$ 中某些指定的顶点等同起来.

实际上，当 G 有可定向亏格 1 或不可定向亏格 1 时 (即 G 可嵌入环面上或射影平面上)，都有多项式时间的嵌入算法 (见 [PERU84a] 中的结果和引文).

定理 3.91 设 G 是一个连通的平面图，下述着色问题是多项式时间可解的：

a) G 是欧拉时的 2- 面着色.

b) G 是三次二部图时的 3- 面着色.

b′) G 是平面欧拉三角剖分时的 3- 点着色 (通过对偶等价于 b)).

c) G 是三次图时的 5- 面着色.

因此，一个连通平面欧拉图的规范定向能在多项式时间内构造出来.

3.12 注 记

与欧拉 (混合)(有向) 图没有直接关系的一些定义，将在研究欧拉 (混合)(有向) 图的各专题时逐渐展开. 在一些场合，我们会回顾本章的定义和结果. 本章最初列出的参考文献比较广泛，但是随着读者对它们的熟悉，以后所列的文献就相对较少了.

本书的主题主要有两个方面：一是欧拉迹和闭覆盖途径；二是圈分解和圈覆盖. 它们的一般性讨论占去了很大篇幅，而某些特殊图类 (除可平面图外) 的讨论则没有充分展开. 下述文献：[WALL69a, LEWS72a, MITC72a, JOLI73a, JOLI75a, HAMA76a, BOUC78a, AKIY79a, KULL80a] 是某些特殊图类的欧拉性质的近期结果，它们再次说明了欧拉图专题的吸引力. 与欧拉有向图有关的概念见 [FUCH77a].

此外，本章给出的许多参考文献主要是为了阐明图论的发展现状，而不是为了使图论入门者展翅飞翔.

① 给定 $O^+(G)$，在 [READ86a] 中给出了 G 嵌入的一个线性时间算法. 定理 3.89 和定理 3.90 a) 的前一部分的证明见 [VOKI85a].

第4章　特征定理和推论

4.1　图

第一个特征定理总结了欧拉、赫拉兹和外伦等的文章中的实质.

定理 4.1　对任意一个连通图 G，下述结论等价:

1) 对每一个顶点 $v \in V(G)$，$d(v)$ 是偶数，即 G 是欧拉的.

2) G 有欧拉迹 T.

3) G 有圈分解 S.

证明　1) $\Rightarrow$ 2)　令 $\sigma(G) = \sum\limits_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = 2q - 2p$, 对 $\sigma(G)$ 进行归纳证明.

显然，若 $\sigma(G) = 0$ 且 $q > 0$，那么 G 的每一个顶点的次为 2. 由 G 的连通性知，G 是一个圈 C. 因此, C 就是 G 的一条欧拉迹. 若 $\sigma(G) = 0$ 且 $q = 0$，则 $G = K_1 = \{v\}$ 且 $T = v$ 是 G 的唯一欧拉迹.

若 $\sigma(G) > 0$，那么有顶点 v 满足 $d(v) > 2$. 令 e_1, e_2, e_3 是关联于 v 的三条边; 由分裂引理知，$G_{1,2}$ 和 $G_{1,3}$ 中至少有一个是连通的，不妨设 $G_{1,2}$ 连通. 由于 $\sigma(G_{1,2}) < \sigma(G)$，故由归纳假设可知，$G_{1,2}$ 有欧拉迹 $T_{1,2}$. 因为 $E(G_{1,2}) = E(G)$，并且 $G_{1,2}$ 中任意一对相邻的边也是 G 中相邻的边，因此, $T_{1,2}$ 对应于 G 的一条欧拉迹 T. 这就证明了 1) 蕴涵 2).

1) $\Rightarrow$ 3)　对 $\sigma(G)$ 进行归纳证明. 当 $\sigma(G) = 0$ 时，结论是显然的 (或者 G 是一个圈，或者 $G = K_1$ 且 $S = \varnothing$ 是 G 的唯一圈分解). 当 $\sigma > 0$ 时，类似于上面的证明, 假设 $G_{1,2}$ 连通. 按归纳假设, $G_{1,2}$ 有圈分解 $S_{1,2}$. 对 $S_{1,2}$ 中的每一个圈 C，若 C 不含顶点 $v_{1,2}$，则 C 也是 G 的圈. 若 C 包含顶点 $v_{1,2}$，记 C 为 $C_{1,2}$. 当 $v \notin V(C_{1,2})$ 时，$C_{1,2}$ 对应于 G 的一个圈 $C'_{1,2}$ 且 $v \in V(C'_{1,2})$; 否则, $V(C_{1,2}) \supset \{v_{1,2}, v\}$，并且与 $C_{1,2}$ 对应的 G 的子图 H 有这样的性质: v 在 H 中为 4-次顶点，H 中其他顶点的次均为 2. 因此, H 可分为两个圈 C_1 和 C_2，使得 $e_i \in E(C_i)\,(i = 1, 2)$. 从 v 出发，起始边为 e_1，沿 C 行走，直至回到 v，这就构成了 C_1，而 $C_2 = H - C_1$. 因此，我们得到 G 的圈分解如下: 若 $v \notin V(C_{1,2})$，则

$$S := (S_{1,2} - \{C_{1,2}\}) \cup \{C'_{1,2}\};$$

若 $v \in V(C_{1,2})$，则

$$S := (S_{1,2} - \{C_{1,2}\}) \cup \{C_1, C_2\}.$$

2) $\Rightarrow$ 1) 设 T 是自 v 出发的 G 的一条欧拉迹. 当 $T=v$ 时，$G=K_1$，因此，结论成立. 假定 $q>0$, 对于每一个 $x\in V(G), x\neq v$ (若这样的 x 存在)，那么自 v 沿 T 每次到达 x 都有一条入边，离开 x 时有一条出边. 因为沿 T 行走经过每一条边恰好一次，所以关联于 x 的边能配对，使得每一对边都是一条进入 x 的边和一条离开 x 的边. 因此, $d(v)$ 为偶数. 对顶点 v 也是一样，只是关联于 v 的边在配对时，有一对边是由 T 的第一条边和最后一条边组成的.

3) $\Rightarrow$ 1) 设 $S=\{C_1,\cdots,C_t\}$ 是 G 的一个圈分解 (可能 $S=\varnothing$). 对每一个 $v\in V(G)$ 和每一个 $i=1,2,\cdots,t$ 有 $d_{C_i}(v)=0$ 或 2. 因为

$$E(G)=\bigcup_{i=1}^{t}E(C_i),$$

所以

$$d(v)=\sum_{i=1}^{t}d_{C_i}(v)\equiv 0 \pmod 2).$$

定理 4.1 证毕.

注意：在上述证明中，环 vv 或 xx 被计算了两次，这符合我们的约定，即一个环对一个顶点次的贡献为 2.

当 G 不连通时, 下述结论仍然成立：G 是欧拉的当且仅当 G 有圈分解 (见练习 4.1). 因此，与欧拉迹的概念相比，圈分解的概念更加一般. 另一方面，当 G 连通时，这两个概念是等价的 (见练习 4.1 的 b) 和 c)).

欧拉图的下述两个特征可用类似于定理 4.1 的证明方式导出，其证明留给读者作为练习.

推论 4.2 ([KOTZ68a, 引理 1]) 一个图 G 是欧拉的，当且仅当 G 能分解为闭迹.

推论 4.3 一个图 G 是欧拉的，当且仅当 G 有欧拉定向.

利用一个图中奇次点的个数为偶数这一事实，可证明欧拉图的另一个特征 (见练习 4.4).

推论 4.4 一个图 G 是欧拉的，当且仅当 G 的每一割集有偶数条边.

陶达 (Toida)[TOID73a] 和迈克 (McKee)[McKE84a] 独立地得到欧拉图的下述特征，它的另一证明见 [WOOD88a]：

定理 4.5 一个图 G 是欧拉的，当且仅当 G 的每一条边在 G 的奇数个圈上.

证明 充分性 假设 G 的每一条边 e 在 G 的奇数个圈上，记这个奇数为 γ_e.

因为一个环恰在一个圈上，并且去掉这个环后，各点次的奇偶性不变，包含边 $e=uv$ $(u\neq v)$ 的圈的个数的奇偶性也不变，故可假定 G 是无环的.

令 $S=\{C_1,\cdots,C_t\}$ 是 G 的圈的集合. 在 G 中, 用 γ_e 条边替换边 e，并且把包含 e 的每一个圈中的 e 用这 γ_e 条边中的一条去替换，这样得到一个新图 G_0 和

圈集合 $S_0 = \{C_1^0, \cdots, C_1^m\}$. 按上述替换过程，$S_0$ 是 G_0 的圈分解. 由定理 4.1，G_0 是欧拉的，即对每一顶点 $v \in V(G_0) = V(G)$ 有 $d_{G_0}(v) \equiv 0 \pmod 2$.

按假设，对 $E_v = \{e_1, \cdots, e_d\} \subset E(G)$ 及 $i = 1, \cdots, d$ 有

$$\gamma_{e_i} \equiv 1 \pmod 2,$$

从而

$$0 \equiv d_{G_0}(v) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_{e_i} \equiv d \pmod 2.$$

因此, 对每一个 $v \in V(G)$，$d = d(v)$ 是偶数, 即 G 是欧拉的.

必要性　假设 G 是欧拉的, 对 $p = |V(G)|$ 进行归纳证明. 当 $p = 1$ 时，G 的每一条边是一个环，因此, 每一条边恰在一个圈上，结论成立. 不失一般性，以下假设 G 连通.

假定 $p > 1$. 由于 G 是连通的，所以有一边 $e = xy$，使得 $x \neq y$ 及 $\lambda(e) \geqslant 1$ ($\lambda(e)$ 表示边 e 的重数). G 收缩边 e 后的图记为 G_e，其收缩点记为 z. 由于 G 是欧拉图，所以 G_e 是欧拉图. 在 G_e 中, 与 z 相关联的边可分为三类: $E_z(x)$，$E_z(y)$ 和 $E_z(xy)$, 其中 $E_z(x)$ 是 G 中关联于 x 而不关联于 y 的边的集合，$E_z(y)$ 是 G 中关联于 y 而不关联于 x 的边的集合，$E_z(xy)$ 是 G 中同时关联于 x 和 y 的不同于 e 的 $\lambda - 1$ 条边的集合，它们对应于 G_e 中 z 点的一些环 (图 4.1).

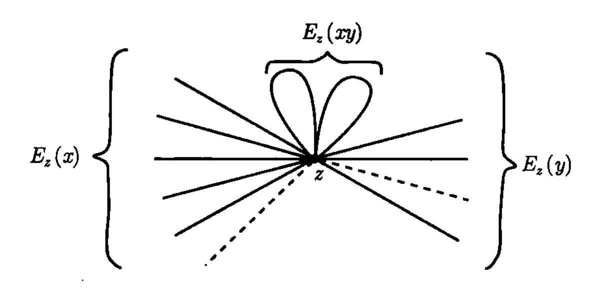


图 4.1　图 G_e

G 中包含 e 的每一个圈 $C(e)$，或者对应于 G_e 中 $E_z(xy)$ 里的一个环，或者包含 $E_z(x)$ 中某个边 e_i 及 $E_z(y)$ 的某一边，用 $C(e_i, E_z(y))$ 表示这类圈，进而令 $k = |E_z(x)|$，$C(e_i, e_j)$ 表示 G_e 中包含 $E_z(x)$ 里两条不同的边 e_i 和 e_j 的圈，并令 $\gamma_G(e)$(或 $\gamma_{G_e}(e_i)$) 表示 G(或 G_e) 中包含边 e(或 $e_i \in E_z(x)$) 的圈的个数. 由假设条件有

$$k + \lambda = d_G(x) \equiv 0 \pmod 2.$$

由归纳假设有

$$\gamma_{G_e}(e_i) \equiv 1 \pmod 2.$$

注意到 $|E_z(xy)| = \lambda - 1$，故

$$\begin{aligned}\gamma_G(e) &= \sum_{i=1}^{k} |\{C(e_i, E_z(y))\}| + |E_z(xy)| \\ &= \lambda - 1 + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{G_e}(e_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} |\{C(e_i, e_j)\}| \\ &\equiv \lambda - 1 + k \equiv 1 \pmod 2\end{aligned}$$

(注意：在 $\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_{G_e}(e_i)$ 中，每一个圈 $C(e_i, e_j)$ 在 $\gamma_{G_e}(e_i)$ 和 $\gamma_{G_e}(e_j)$ 中各计算了一次). 因此，G 中包含 $e \in E(G)$ 的圈数是奇数. 定理证毕.

利用定理 4.5，可以刻画欧拉图圈分解数目的奇偶性 (见 [BOND86a, 推论 3.4]).

推论 4.6 一个图 G 是欧拉的，当且仅当 G 有奇数个圈分解.

证明 如果 G 有奇数个圈分解，那么它至少有一个圈分解. 把定理 4.1 应用到 G 的每一个分支可知，G 是欧拉的. 反之，设 G 是欧拉的，令 $e \in E(G)$ 是任一边，$C_1, \cdots, C_r$ 是包含 e 的圈. 按定理 4.5，$r \equiv 1 \pmod 2$. 现在对边数 $q = |E(G)|$ 进行归纳证明.

如果 $q = 0$，则 $S = \varnothing$ 是 G 的唯一圈分解. 设 $q > 0$.

如果对某个 i 有 $G_i = G - C_i = \varnothing$，那么 $r = 1$ 且 G 是一个圈，$S = \{C_1\}$ 是 G 的唯一圈分解. 以下假定 $G_i \neq \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. 由归纳假设，$G_i$ 有奇数个圈分解 (注意：即使 G 连通，G_i 也未必连通)，从而包含 C_i 的 G 的圈分解数为奇数，记为 $s(C_i)$. 用 $s(G)$ 表示 G 的圈分解的个数，则

$$s(G) = \sum_{i=1}^{r} s(C_i) \equiv r \equiv 1 \pmod 2.$$

推论证毕.

正是读了文章 [LESN86a] 后，我才熟悉了文章 [TOID73a] 和 [McKE84a]，并对山克 (Shank) 的以下刻画 [SHAN79a] 有了透彻的了解. 下面给出一个不同于山克的证法.

定理 4.7 一个连通图 G 是欧拉的，当且仅当 $E(G)$ 中能包含在 G 的某个支撑树里的边子集 (含空集) 的个数为奇数.

证明 设 G 是任一连通图. 用 τ_G 表示定理中所定义的子集数，$\tau_G(e)$ 表示这 τ_G 个子集中包含边 e 的子集的个数. 下面对 $q = |E(G)|$ 进行归纳证明. 因为环不可能包含在任何支撑树里，故可假定 G 是无环的. 当 $p = |V(G)| = 1$ 时，$G = K_1$，$q = 0$，从而 $E(G) = \varnothing$ 是唯一包含在 G 的支撑树 K_1 中的集合. 以下设 $p > 1$，$q > 0$ (注意：K_1 是欧拉的).

设 $e = xy$ 是 G 的任一边，在 G 中收缩边 e 得到图 G_e，则 G_e 的边数小于 G 的边数. $G - e$ 的边数也小于 G 的边数. 因为 G 是连通的，所以 G_e 也是连通的，而 $G - e$ 不连通当且仅当 e 是 G 的一个桥.

$E(G)$ 包含在 G 的支撑树中的子集可分为两类：包含边 e 的子集称为第一类的，不含边 e 的子集称为第二类的.

设集合 M 是 G 中一个第一类的子集，那么 $M' := M - \{e\}$ 对应着 G_e 中的一个边子集，并且含在 G_e 的某个支撑树中. 因此有

$$\tau := \tau_{G_e} = \tau_G(e), \tag{1}$$

$$\tau \equiv 1 \pmod 2 \text{ 当且仅当 } G_e \text{ 是欧拉的}. \tag{2}$$

若 $N \subset E(G)$ 是 G 第二类子集，则 N 包含在 $G-e$ 的支撑树中当且仅当 $G-e$ 连通，即 e 不是 G 的桥. 以下分两种情况讨论：

1) e 不是 G 的桥，则有

$$\tau_G = \tau_{G_e} + \tau_{G-e}. \tag{3}$$

2) e 是 G 的桥. 此时 e 包含在 G 的每一个支撑树中 (见定理 3.18 的 2) 和定理 3.21)，并且第二类的每一个子集 $N \subset E(G)$ 都包含在 G_e 的支撑树中，反之亦然. 因此，我们有

$$\tau_G = 2\tau_{G_e}. \tag{4}$$

在情况 2) 中恒有 $\tau_G \equiv 0 \pmod 2$. 此时不管 G_e 是否是欧拉的，G 都不是欧拉的 (由推论 4.4 知，欧拉图是无桥的).

在情况 1) 中，若 G 是欧拉的，那么 G_e 是欧拉的，但 $G-e$ 不是欧拉的. 由归纳假设和等式 (2) 和 (3) 有

$$\tau_G \equiv 1 + 0 = 1 \pmod 2.$$

若 G 不是欧拉的，并且 G_e 和 $G-e$ 也不是欧拉的，那么由归纳假设和等式 (2) 和 (3) 有

$$\tau_G \equiv 0 + 0 = 0 \pmod 2.$$

若 G_e 和 $G-e$ 中有一个是欧拉的，因为 x 和 y 是 G 中仅有的两个可能为奇次的顶点，从而 G_e 和 $G-e$ 都是欧拉的. 因此有

$$\tau_G \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 2.$$

故当 G 不是欧拉图时，$\tau_G \equiv 0 \pmod 2$. 定理证毕.

在 [BOND86a] 中，给出了定理 4.5 和推论 4.6 的更一般的形式，对特定的路和圈的计数进行了讨论. 另外，定理 4.5 可由拟阵的一个结果导出 (见 [McKE84a]). 在 [TOID73a] 中，给出了定理 4.5 的必要条件的一个证明，其推导利用了恰有两个奇次点的连通图中关于路的一个结果. 下一章将把这一结果作为定理 4.5 的一个推论给出. [WELS69a] 将圈分解刻画欧拉图的思想推广到二元拟阵，证明了一个二元拟阵是欧拉的，当且仅当它的对偶是二部图.

4.2 有 向 图

现在讨论欧拉有向图的特征，下面的定理类似于定理 4.1 (见 [KÖNI36a,p29]).

定理 4.8 对于弱连通有向图 D，下述结论等价：

1) 对每一个顶点 $v \in V(D)$ 有 $\mathrm{id}(v) = \mathrm{od}(v)$ (即 D 是欧拉的).

2) D 有欧拉迹 T.

3) D 有圈分解 S.

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 对 $\sigma(D)$ 进行归纳，其中

$$\sigma(D) = \sum_{v \in V(D)} (o(v) - 1) = q - p.$$

若 $\sigma(D) \leqslant 0$，则 $D = K_1$ 或者 D 是一个圈 C(因为 D 弱连通). 因此，从任意一个顶点 $v \in V(D)$ 出发，沿 C 的方向行走唯一确定了 D 的一条欧拉迹 T. 以下设 $\sigma(D) > 0$. 任取一点 $v \in V(D)$ 满足 $\mathrm{id}(v) = \mathrm{od}(v) > 1$，令 $a_1 = (v_1, v)$ 是进入 v 的一条弧，而 $a_2 = (v, v_2)$ 和 $a_3 = (v, v_3)$ 是离开 v 的两条弧，那么 $D_{1,2}$ 和 $D_{1,3}$ 都是欧拉的. 由分裂引理可知，$D_{1,2}$ 和 $D_{1,3}$ 中至少有一个是弱连通的. 不妨设 $D_{1,2}$ 是弱连通的，因为 $\sigma(D_{1,2}) < \sigma(D)$，故由归纳假设，$D_{1,2}$ 有欧拉迹 $T_{1,2}$. 与无向的情况一样，由 $T_{1,2}$ 可导出 D 的一条欧拉迹.

1) $\Rightarrow$ 3) 还是对 $\sigma(D)$ 进行归纳. 对于 $\sigma(D) \leqslant 0$ 情况，证明与前述方法相似，故不妨设 $\sigma(D) > 0$. 与前述证明一样，应用分裂引理，假设 $D_{1,2}$ 弱连通. 令 $S_{1,2}$ 是 $D_{1,2}$ 的一个圈分解. 与定理 4.1 的证明一样，圈 $C'_{1,2} \in S_{1,2}$ 或者对应于 D 中的一个圈 $C_{1,2}$，或者对应于 D 的两个弧不交的圈 C_1 和 C_2 的并. 因此，对于有向图，我们得圈分解 S 如下：

$$S = (S_{1,2} - \{C'_{1,2}\}) \cup \{C_{1,2}\} \quad \text{或} \quad S = (S_{1,2} - \{C'_{1,2}\}) \cup \{C_1, C_2\}.$$

模仿定理 4.1 的证明，可以证明 2) $\Rightarrow$ 1) 和 3) $\Rightarrow$ 1). 具体的证明留给读者 (练习 4.5).

注意：推论 4.2 对于有向图也是成立的. 而推论 4.3 对一般的有向图是不成立的，一个 4- 边连通的欧拉图 G 都可以定向为一个强连通图的有向图 D，但 D 不是欧拉图 (将 G 的欧拉定向图中的一条弧反向，见练习 4.6). 下面的推论类似于推论 4.4.

推论 4.9 一个有向图是欧拉的，当且仅当它的每一个割 $A_0 = (V_1, V_2) \subset A(D)$，满足 V_1 的出弧数目等于 V_2 的出弧数目 (另一种说法，$a^+(V_i) = a^-(V_i)\,(i = 1, 2)$)，其中 V_1 和 V_2 是 $V(D)$ 的二划分.

证明 设 D 的任一割满足推论的条件，那么当 $V_1 = \{v\}$ 或 $V_2 = \{v\}$ 时，推论的条件对 $A_0 = A_v - \Lambda_v$ 也成立. 不妨设 $V_1 = \{v\}$.

由假设，$A_v - A_v$ 中与 v 关联的出弧数目等于 A_v 中与 $V(D)-\{v\}$ 关联的出弧数目，即与 v 关联的入弧数目. 故 $\text{od}(v)=\text{id}(v)$，从而 D 是欧拉的.

反之，如果 D 是欧拉的，令 A_0 是 D 的任一割. 当 $A_0=\varnothing$ 时，显然，结论成立，故不妨设 $A_0\neq\varnothing$. 记 $A_0=(V_1,V_2)$. 在 D 中收缩 V_1 后得到图 D_2，收缩 V_2 得到图 D_1. 设 D_1 和 D_2 的并为 $D(A_0)$ (图 4.2).

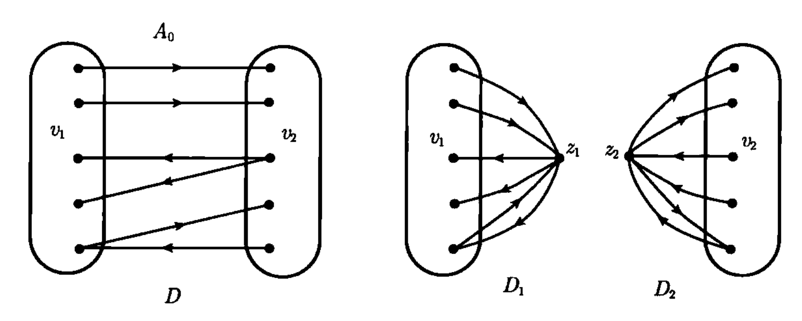


图 4.2　欧拉有向图 D 及其并图 $D(A_0)$

对每一个 $v\in V_i\,(i=1,2)$ 有 $\text{od}_{D_i}(v)=\text{od}_D(v)=\text{id}_D(v)=\text{id}_{D_i}(v)$ 以及 $\text{od}_{D_i}(z_i)=\text{id}_{D_i}(z_i)$ (见推论 3.5a). A_0 的一条弧是 V_i 的出弧 (或入弧)，当且仅当 A_{z_i} 中相应的弧是 z_i 的出弧 (或入弧)，因此，A_0 中与 V_i 关联的出弧数目等于与 V_i 关联的入弧数目，即 $\text{id}_{D_i}(z_i)=\text{od}_{D_i}(z_i)\,(i=1,2)$ (注意: 这个等式与 i 无关，因为 $\text{id}_{D_1}(z_1)=\text{od}_{D_2}(z_2)$). 推论 4.9 证毕.

另外，定理 4.8 也蕴涵以下推论，它的证明留作读者的练习:

推论 4.10　每一个弱连通的欧拉有向图一定是强连通的.

但是，对有向图，类似于定理 4.5 的结论是不成立的. 事实上，用 $K_{2,4r}\,(r\geqslant 1)$ 的任一个欧拉定向可以验证这个结论. 同样，$K_{2,4r}$ 的任一个欧拉定向，可以说明有向图也不可能有类似于推论 4.6 的结论，因为它们有偶数个圈分解 (见练习 4.7 和练习 4.8). 至于对有向图是否有类似于定理 4.7 的结论，先观察图 4.3 中的两个有向图.

对于 D_1 和 D_2 分别观察以 v,w 和 x 为根的支撑树，并计算包含在以 $t\in\{v,w,x\}$ 为根的支撑出树中的 $A(D_i)$ 的子集的个数 $\tau_{D_i}(t)\ (i=1,2)$. 对 $t=v$，D_1 中对应的子集为

$$\varnothing,\{f\},\{g\},\{g'\},\{h'\},\{f,g\},\{f,h'\},\{h',g'\},$$

而在 D_2 中的子集为

$$\varnothing,\{f\},\{g\},\{f''\},\{g''\},\{f,g\},\{f,g''\},\{f'',g\},\{f'',g''\}.$$

因此有

$$\tau_{D_1}(v)\equiv\tau_{D_2}(v)+1\equiv 0\ (\text{mod}\ 2).$$

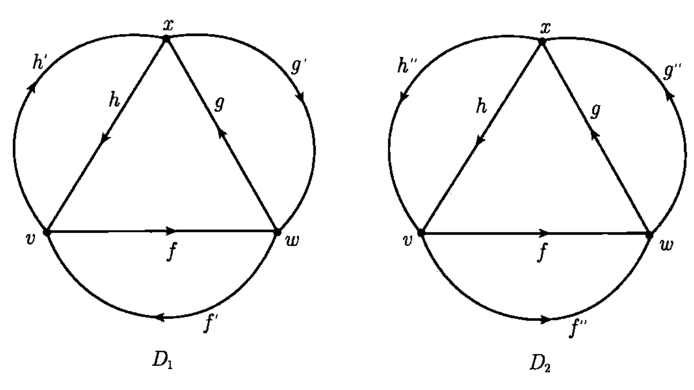


图 4.3 两个欧拉有向图

由对称性，对任意 $t \in \{v, w, x\}$ 和 $i = 1, 2$ 有

$$\tau_{D_i}(t) \equiv i + 1 \pmod 2.$$

对 $i = 1, 2$，为确定 τ_{D_i}(包含在某个支撑出树中的子集数) 的奇偶性，首先注意：在 τ_{D_i} 的计算中，大于等于三条弧的子集不需考虑，并且对 $t, t' \in \{v, w, x\}$ 且 $t \neq t'$，任意一个 2 弧子集不可能同时在 $\tau_{D_i}(t)$ 和 $\tau_{D_i}(t')$ 中被计算. 因此，在计算 τ_{D_1} 时有 9 个 2 弧子集，在计算 τ_{D_2} 时有 12 个 2 弧子集. 因为空集和 1 弧子集在计算 τ_{D_i} 时都被使用，所以对 $i = 1, 2$ 有

$$\tau_{D_i} \equiv i + 1 \pmod 2.$$

因此，对有向图，没有简单的类似于定理 4.7 的结果 (即使有的话). 然而有趣的是，$A(D_i)$ 包含在 D_i 的支撑出树或入树中的子集个数等于 $\left(\binom{6}{2} - 3\right) + 7 = 19$(包含空集在内). 在相同条件下，对 D_i 反向一条弧后得到的非欧拉图也有相同的计算结果. 注意：图 4.3 上的两个图还有一点不同的是：D_1 中以 $t \in \{v, w, x\}$ 为根的支撑出树的数目为 3，而 D_2 中以 $t \in \{v, w, x\}$ 为根的支撑树的数目为 4. 这一事实将在图的欧拉迹的计数问题中起重要作用.

4.3 混 合 图

对于混合图有下述结果 (在 [FLEI83b] 中，我把这个结果归功于巴塔格尔 (Batagelj) 和皮山斯基 (Pisanski)[BATA77a]，然而他们与我一样，都不知道在福特 (Ford) 和富克逊 (Fulkerson) 的《网络流》一书中早已有了这一结果 [FORD62a]. 直到 [FLEI83b] 在 [BEIN83a] 上发表后，引证的错误才被指出)：

定理 4.11 设 H 是弱连通的混合图，则下述结论等价：

1) 对每一个 $X \subset V(D)$，$f_H(X) := e(X) - |a^+(X) - a^-(X)|$ 是非负偶数.

2) H 有欧拉迹 T.

3) H 有圈分解 S.

证明 令 T 是 H 的起始于 v 的欧拉迹，S 是 H 的圈分解，沿着 T 或任意 $C \in S$ 行走，导出 $E(H)$ 和 $E(C)$ 中元素的一个定向 (当 $A(C) = \varnothing$ 时，可任意选取两种可能的定向之一). 对每一个 $C \in S$ 定向之后，按定理 4.8 由 T 或 S 就得到一个欧拉有向图 D_1，使得 $A(H) \subset A(D_1)$. 在 D_1 中，对每一 $X \subset V(D_1) = V(H)$ 有 $a_1^+(X) = a_1^-(X)$(为了避免与 $a^+(X)$ 和 $a^-(X)$ 混淆，用 $a_1^+(X)$ 和 $a_1^-(X)$ 表示 D_1 中的相应符号). 因此有

$$a_1^+(X) = a^+(X) + e'(X) = a_1^-(X) = a^-(X) + e''(X),$$

其中 $e'(X) + e''(X) = e(X)$. 因此，

$$\begin{aligned} 0 = a_1^+(X) - a_1^-(X) &= a^+(X) - a^-(X) + e(X) - 2e''(X) \\ = a_1^-(X) - a_1^+(X) &= a^-(X) - a^+(X) + e(X) - 2e'(X), \end{aligned}$$

从而

$$0 \leqslant 2e''(X) = e(X) - (a^-(X) - a^+(X))$$

以及

$$0 \leqslant 2e'(X) = e(X) - (a^+(X) - a^-(X)).$$

因此，$e(X) - |a^+(X) - a^-(X)|$ 为非负偶数，这就证明了 2)⇒1) 和 3)⇒1).

另一方面，若 H 有欧拉迹 T(或圈分解 S)，那么由 T(或 S) 得到欧拉有向图 D_T(或 D_S)，而原来的 T(或 S) 就导出了这个有向图 D_T(或 D_S) 的欧拉迹 T_D(或圈分解 S_D). 按定理 4.8，T_D(或 S_D) 等价于存在圈分解 S_D(或欧拉迹 T_D). 对于 $D \in \{D_T, D_S\}$，由于 $A(H) \subset A(D)$，这样就导出了 H 的圈分解 S_T(欧拉迹 T_S). 这就证明了 2) 与 3) 的等价性.

最后，只需证明由 1) 可以给 $E(H)$ 中的元素定向，从而得到一个欧拉有向图 D 且 $A(H) \subset A(D)$. 然后对 D 应用定理 4.8，用与前一段相同的方法可得 H 的欧拉迹 T 或圈分解 S.

假设存在一个混合图 H(不必连通) 满足条件 1)，但 H 不可能定向为欧拉有向图 D，使得 $A(H) \subset A(D)$. 在所有这些反例中，选取 H，使得 $|V(H)| + |E(H)|$ 尽可能小.

相应于 $X \subset V(H)$ 的割集 C_X，若 $f_H(X) = 0$，则称 C_X 为**临界的**；若 $\min\{|X|, |V(H) - X|\} = 1$，则称 C_X 为**平凡的**. 我们把定理 4.11 的 1) 也称为**割条件**.

由于割集不含环，并且由 H 的选取可知，环必在 $A(H)$ 中，故不失一般性，假定 H 无环，如果得到 $H - A(H)$ 的欧拉定向 D_0，则 $D_0 \cup A(H)$ 就是 H 的欧拉定

向. 若 $p=|V(H)|=1$，则 $E(H)=A(H)=\varnothing$ 且 $H=K_1$ 就是它的一个欧拉定向，故可以假设 $p>1$.

下面观察任一混合图 H^* 的下述性质:

a) 对每一个 $X\subset V(H^*)$, $f_{H^*}(X)=f_{H^*}(V(H^*)-X)$. 这一事实可由割条件直接得到. 因此，在 C_X 是临界割集的情况下，可以假定 X 不含任意预先指定的一个顶点.

b) 若 H^* 满足割条件，并且有临界割集 C_X，那么 H^* 的每个欧拉定向 D唯一确定了 $E(X)$ 中元素的定向 (若这样的 D 存在). $E(X)\neq\varnothing$ 蕴涵着 $a^+(X)\neq a^-(X)$. 若 $a^+(X)>a^-(X)$，则每一条边 $e\in E(X)$ 对应于 D 中的 X 的一条入弧; 否则，e 对应于 X 的一条出弧. 设 $H^*(C_X)=H_1^*\cup H_2^*$ 是关于 H^* 的临界割集 C_X 的两个不交的 (混合)(有向) 图 H_1^* 和 H_2^* 的并 (图 4.2)，并且设 H_i^* 有欧拉定向 $D_i^*\,(i=1,2)$，那么由 D_1^* 和 D_2^* 就自然地导出了 H^* 的一个欧拉定向 (见练习 4.9). 注意: 对 $\{z_i^*\}=V(H_i^*)-V(H^*)$ 有 $f_{H_i^*}(z_i^*)=f_{H^*}(X)$(即使 C_X 不临界时也成立).

c) 若 H^* 满足割条件，那么 H^* 的底图 G^* 也是欧拉的. 故对 $i=1,2$，H_i^* 的底图 G_i^* 是欧拉的. 因此，对任意 $Y\subset V(H_i^*)$，$f_{H_i^*}(Y)$ 是偶数.

现在证明

$$H \text{ 没有非平凡的临界割集.} \tag{1}$$

假设结论 (1) 不成立，则存在 $X\subset V(H)$，使得 $|X|>1$ 以及 $|V(H)-X|>1$，并且 $f_H(X)=0$. 设 $H(C_X)=H_1\cup H_2$ 是关于 H 的临界割集 C_X 的两个不交的 (混合)(有向) 图 H_1 和 H_2 的并，$\{z_i\}=V(H_i)-V(H)\,(i=1,2)$.

若对 $Y\subset V(H_i)$ 且 $z_i\notin Y$ 有 $f_{H_i}(Y)<0$(见 a), c))，那么 $Y\subset V(H)$ 且 C_Y 也是 H 的割集，从而由条件 1) 知，$f_H(Y)=f_{H_i}(Y)\geqslant 0$. 这个矛盾说明 H_1 和 H_2 满足割条件. 由于 C_X 是非平凡的，故对 $i=1,2$ 均有 $|V(H_i)<|V(H)|$. 由 H 的选择，对 $i=1,2$，H_i 有欧拉定向 D_i，并且根据 b) 可以导出 H 的一个欧拉定向. 这个矛盾说明 (1) 成立 (若 H_1 不是混合图，由割条件和 C_X 的临界性，它必是欧拉有向图. 也可参见定理证明之后的观察).

下一步证明结论

$$\text{对每一个 } v\in V(H) \text{ 有 } f_H(v)=0. \tag{2}$$

假设存在 $x\in V(H)$，使得 $f_H(x)\neq 0$. 按割条件必有 $f_H(x)\geqslant 2$，即存在 $e_1=ux$, $e_2=wx\in E_x$. 如果 $|A_x\cup E_x|>2$，则分裂 e_1,e_2 得 $H_{1,2}$，记 $\{x_{1,2}\}=V(H_{1,2})-V(H)$; 否则，令 $H_{1,2}=H, x_{1,2}=x$. 设 $H_0=(H_{1,2}-x_{1,2})\cup\{uw\}$，由 H 的选择，只要证明 H_0 满足割条件，那么 H_0 的欧拉定向就自然对应于 $H_{1,2}$ 的一个欧拉定向，进而对应于 H 的一个欧拉定向. 由 H_0 的定义，显然有 $V(H_0)\subseteq V(H)$, $|E(H_0)|=|E(H)|-1$. 下面证明 H_0 满足割条件.

首先由 H_0 的构造易知，对任意 $X \subset V(H_0)$，由 H 满足 a) 可推出 f_{H_0} 为偶数. 因此，只要证明 f_{H_0} 非负即可. 显然，对 $x \in V(H_0)$，$f_H(x) \geqslant 2$ 蕴涵着 $f_{H_0}(x) \geqslant 0$. 假如存在 $X \subset V(H_0)$，$x \notin X$，使得 $f_{H_0}(X) < 0$. 令 C_X 表示 H_0 中的对应割集.

若 $uw \notin C_X$，则 $C_X = C_{X'}$ 也是 $H_{1,2}$ 的割集且 $f_{H_{1,2}}(X') < 0$，其中 $X' = X$ 或 $X' = X \cup \{x_{1,2}\}$，这依赖于 $|\{u,w\} \cap X| = 0$ 还是 2.

若 $uw \in C_X$，不失一般性，设 $u \in X$ 且 $w \notin X$，则 $C'_X = (C_X - \{uw\}) \cup \{ux_{1,2}\}$ 是 $H_{1,2}$ 的割集且 $f_{H_{1,2}}(X) < 0$ (在这种情况下，$x_{1,2} \notin X' = X$).

因此，$X' \subset V(H)$ 确定了一个割集满足 $f_H(X') < 0$，除非 $uw \notin C_{X'}$ 且 $x_{1,2} \in X'$. 这样就可以断定 $u, w \in X$，$X' - \{x_{1,2}\}$ 确定了 H 的一个割集 $C = C_X \cup \{ux, wx\}$，并有 $f_H(X' - \{x_{1,2}\}) \leqslant 0$，从而 $f_H(X' - \{x_{1,2}\}) = 0$，$C$ 是临界的. 由于 $u, w \in X$, $x \in V(H) - X$，由结论 (1) 可以导出 $\{x\} = V(H) - X$. 由此及 a) 得到 $f_H(x) = 0$，这与 $f_H(x) \geqslant 2$ 矛盾. 结论 (2) 证毕.

因此 H 的临界割集是集合 $C_{\{v\}}$，其中 $v \in V(H)$ 是任意一个顶点. 由于 $E(H) \neq \varnothing$，故必存在 $x \in V(H)$，使得 $E_x \neq \varnothing$. 由于 $C_{\{x\}}$ 是临界的，在建立 H 的欧拉定向时，每一条边 $e \in E_x$ 的定向是由 $\mathrm{od}_H(x) - \mathrm{id}(x)$ 确定的 (见 b)). 相应地，对一条边 $e \in E_x$ 用 $a \in \{(x,y),(y,x)\}$ 替换 $e = xy$，这样得到的 H' 满足 $V(H') = V(H)$，并且 $|E(H')| < |E(H)|$.

若 H' 不满足割条件，则存在 $X \subset V(H') = V(H)$，使得 $f_{H'}(X) < 0$ 且 $a \in C_X$；否则，$f_H(X) = f_{H'}(X) < 0$，矛盾. 但因 $f_{H'}(X)$ 为偶数，所以

$$-2 \geqslant f_{H'}(X) = e_{H'}(X) - |a^+_{H'}(X) - a^-_{H'}(X)|,$$

并且由假设有

$$0 \leqslant f_H(X) = e_H(X) - |a^+_H(X) - a^-_H(X)|$$

(为避免混淆，使用 H 和 H' 作为下标). 另一方面，由 $a \in C_X$ 得到 $e_H(X) = e_{H'}(X) + 1$ 且 $|a^+_H(X) - a^-_H(X)| \geqslant |a^+_{H'}(X) - a^-_{H'}(X)| - 1$，从而

$$0 \leqslant f_H(X) \leqslant e_{H'}(X) + 1 - |a^+_{H'}(X) - a^-_{H'}(X)| + 1 = f_{H'}(X) + 2 \leqslant 0,$$

即

$$f_H(X) = 0.$$

因此，$(C_X - \{a\}) \cup \{e\}$ 是 H 的临界割集. 不失一般性，假设 $|X| \leqslant |V(H) - X|$，由 (1) 有 $|X| = 1$，即对某个 $t \in V(H)$，$X = \{t\}$. 由结论 (2) 和 H' 的构造，对 $X = \{t\}$ 及 $t \neq y$ 有 $f_{H'}(X) = f_H(X) = 0$. 因此，必有 $X = \{y\}$.

由 $f_{H'}(y) < 0$，2) 和 H' 的构造，可以推出 $f_{H'}(y) = -2$. 假设 $(x,y) \in A(H')$，又由 $f_{H'}(x) = 0$ 和 $f_{H'}(y) = -2$ 可得

$$e_H(x) = a^-_H(x) - a^+_H(x)\ , \quad e_H(y) = a^-_H(y) - a^+_H(y).$$

因为

$$a_H^+(\{x,y\}) - a_H^-(\{x,y\}) = a_H^+(x) + a_H^+(y) - a_H^-(x) - a_H^-(y),$$

$$e_H(\{x,y\}) \leqslant e_H(x) + e_H(y) - 2,$$

故 $f_H(\{x,y\}) \leqslant -2$，这与 H 满足割条件矛盾. 对 $(y,x) \in A(H')$，可以得到同样的矛盾. 因此，在任意情况下必有 $f_{H'}(y) = 0$，所以 H' 满足割条件. 故 H' 有一个欧拉定向 D(若 $E(H') = \varnothing$，则 $D = H'$)，它也是 H 的欧拉定向，矛盾. 定理 4.11 证毕.

这里给出的定理 4.11 的证明，其主要部分与 [FORD62a，BATA77a] 中的证明有明显不同，我不知道是否有其他作者给出过类似的证明.

当 H 是一个图时，定理 4.11 的割条件可以简化为每一个割集有偶数条边. 当 H 是有向图时，可简化为每一割集 C_X 有 $a^+(X) = a^-(X)$. 因此，若取 $X = \{x\}$ $(x \in V(H))$，那么当 H 是图或者有向图时，简化了的割条件就保证了 H 是欧拉的. 故定理 4.11 可视为定理 4.1 和定理 4.8 的共同推广，同时也是推论 4.4 和推论 4.9 的共同推广. 另一方面，对于图 G 和有向图 D，若对任意 $x \in V(G)$ 或 $V(D)$，$X = \{x\}, G$ 和 D 分别满足割条件，那么 G 或 D 存在欧拉迹或圈分解. 因此，人们猜测在定理 4.11 中，当把 X 限制于 $|X| = 1$ 时，该定理仍然成立. 然而图 4.4 中的混合图 (它的底图同构于正八面体) 表明，以上条件还不足以保证欧拉迹存在. 这一结论早就被巴塔格尔和皮山斯基发现. [BATA77a] 中给出了另一个例子，说明发表在 [COIC71a] 上相应的定理是错误的. 他们在定理 4.11[BATA77a，定理 4] 的证明中，首先证明若 $e = xy$ 是 H 的一条边且没有临界割包含 e，那么在给 H 作欧拉定向时，e 可以任意地定向为 (x,y) 或 (y,x). 接着与我们在 b) 中讨论的一样，若 $e \in E(X)$ 且 C_X 是临界的，那么在 H 的任一欧拉定向 D 中，e 的定向由割条件确定. 连同 X 一起，他们又讨论了另一个临界割集 C_Y，使得 $e \in C_Y$. 在构造 D 时，e 的强迫定向只可能对这样的 C_Y 产生问题. 这类似于定理 4.11 证明中最后一部分对 H' 的讨论，也是两个证明类似的地方. 巴塔格尔和皮山斯基的下一步是考虑 6 个顶点子集 $X, Y, A = X \cap Y, B = X - A, C = Y - A, D = V(H) - (X \cup Y)$，并且由割条件对这 6 个集合建立了 6 个线性方程构成的方程组 $f_H(X) = f_H(Y) = 0$, $f_H(F) \geqslant 0, F = A, B, C, D$. 然后他们研究了 e 的定向对这组方程的影响 (X 或 Y 不满足割条件). 用归谬法证明了他们的最终结论：若 C_X 和 C_Y 是任意两个临

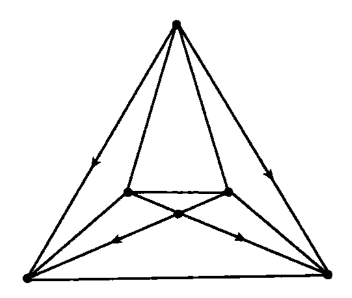


图 4.4　在顶点处满足割条件的混合图，但它没有欧拉迹

界割集且 $e \in C_X \cap C_Y$，那么 e 可以定向为 a，使得 $H' = (H - \{e\}) \cup \{a\}$ 满足割条件.

在福特–富克逊的书中，定理 4.11[FORD62a，定理 7.1，p60] 的证明从一开始就完全不同. 他们使用的是有向图上的流和霍夫曼定理 (见定理 3.84).

首先把每一边 $e = xy \in E(H)$ 换为一对有向弧 (x,y) 和 (y,x)，这样由 H 得到一个有向图 D_0.

对每一弧 $(u,v) \in A(D_0)$，定义区间 $[\ell(u,v), c(u,v)]$ (其中 ℓ 表示下界，c 为容量). 若 $(u,v) \in A(H)$，则 $c(u,v) = \ell(u,v) = 1$；否则，$c(u,v) = 1$，$l(u,v) = 0$. 按这个定义，割条件被变换为霍夫曼定理的条件. 注意：对 D_0 中的一个流 φ，对任意 $a \in A(H)$ 有 $\varphi(a) \equiv 1$，并且 φ 可以假定为整数流. 对 $b \in A(D_0)$ 有 $\varphi(b) \in \{0,1\}$. 对 $e = xy \in E(H)$，用 (x,y) 替换 e 当且仅当 $\varphi(x,y) = 1$ 及 $\varphi(y,x) = 0$. 对每一 $e \in E(H)$ 都这样处理后，就得到 H_0'，H_0' 或者是有向图 (并因此是 H 的欧拉定向)，或者是一个混合图，并且 $H_0' - E(H_0')$ 是一个欧拉图. 在后一种情况，由割条件可推出 $G_0 = \langle E(H_0') \rangle$ 是一个欧拉图，应用 G_0 的任一个欧拉定向，就能把 $H - E(H_0') \subset H$ 的欧拉定向 $H_0' - E(H_0')$ 扩充为 H 的欧拉定向.

[SERD76a，定理 1] 提出了另一种思路 (即把求混合图的欧拉迹问题，归结为运输问题)，而 [SERD76a，定理 2] 是通过最大流方法解决这一问题的 (但不同于上面所描述的方法). 这些结果都有 $O(p_G^3)$ 阶的多项式算法，而这个阶一般可由最大流方法得到①.

4.4　习　　题

练习 4.1　证明以下命题:

a) 图 G 有圈分解，当且仅当 G 的每一个分支有圈分解.

b) 图 G 有圈分解，当且仅当 G 的每一个块有圈分解.

c) 图 G 有欧拉迹，当且仅当 G 的每一个块有欧拉迹.

练习 4.2　证明推论 4.2.

练习 4.3　证明推论 4.3.

练习 4.4　证明推论 4.4.

练习 4.5　完成定理 4.8 的证明.

练习 4.6　证明如果 D 是 4- 边连通欧拉图 G 的欧拉定向，D_1 是将 D 中的一条弧 (u,v) 换为 (v,u) 后的有向图，则 D_1 是强连通的.

---

① 在 [SERD76a] 中还讨论了 [COIC71a] 中的错误 (如前面所述). 赛德加科瓦 (A.I.Serdjukov)(在他的结果的基础上) 提出:“在混合图的情况下，可能不存在 (像图和有向图欧拉迹存在) 那样的简单条件” 这个错误很可能是由于不知道 [FORD62a，定理 7，p60].

练习 4.7　应用 $K_{2,4r}$ 的一个欧拉定向，构造一个欧拉有向图的无限族，使得定理 4.5 的有向图形式对这族图不成立.

练习 4.8　若 D 是 $K_{2,2m}$ 的一个欧拉定向，那么 D 的圈分解数目同余为 0 (mod 2)，除非 $m=1$. 这个结论是否成立，为什么？

练习 4.9　证明推论 4.10.

练习 4.10　对 $X \subset V(H)$，设 C_X 是弱连通混合图 H 的一个临界割集，并且 $E(X) \neq \varnothing$. 令 H_1 和 H_2 是 H 的关于 C_X 的两个并图，若 D_i 是 H_i 的欧拉定向，证明 H 有一个欧拉定向，使得每一个 $e \in E(X)$ 的定向与 $D_i\,(i=1,2)$ 中的方向一致.

第 5 章　再论欧拉迹及其推广展望

5.1　迹分解，路、圈分解

在第 4 章的基础上，让我们再回忆一下欧拉和赫拉兹的文章. 实际上，他们叙述和证明了比定理 4.1 1) 和 2) 的等价性更多的内容，即*一个连通图 G 有开的或闭的覆盖迹，当且仅当 G 最多有两个奇次顶点*. 定理 4.1 中已证明了 G 没有奇次顶点的情况，而恰有两个奇次顶点的情况是定理 4.1 的一个简单的推论 (注意：由引理 3.4 可知，G 不可能只有一个奇次顶点).

推论 5.1　一个图 G 有一条开覆盖迹 T，当且仅当 G 连通且恰有两个奇次顶点，并且这两个奇次顶点恰是 T 的两个端点.

证明　1) 假设 G 有一条开覆盖迹，其始点与终点分别为 u 和 v. 在 G 中增加一条边 $e_0 = uv$(不管 G 中是否已有这样的边)，记 $G_0 = G \cup \{e_0\}$，那么 G_0 有闭覆盖 (即欧拉) 迹 $T_0 = T, e_0, u$. 由定理 4.1，G_0 是欧拉的，因此，$G = G_0 - \{e_0\}$ 恰有两个奇次顶点 u 和 v，它们恰是 T 的两个端点，进而自 u 出发，沿 T 行走，可到达 G 的任何一个顶点 x，从而对 G 中任一个顶点 x，G 中有 u 到 x 的路 $p(u,x)$. 按引理 3.15，G 是连通的.

2) 如果 G 连通且恰有两个奇次顶点 u 和 v，那么按 1) 中的方法构造图 G_0. 由定理 4.1，G_0 有欧拉迹 T_0. 由于 T_0 是闭序列，故可以从任一顶点 x 出发，沿关联于 x 的任一给定的边 e_x 行走，通过 T_0 回到 x. 选取 $x = v$，$e_x = e_0$，记 $T_0 = v, e_0, T$，其中 T 是始于 u，终于 v 的 T_0 的子序列，但不含 e_0. 故 T 是 G 的一条开覆盖迹，起始于 u，终止于 v，并且它的两个端点是 G 的奇次顶点.

推论 5.2 是下述推论 5.1 的自然推广. 这个推论 5.2 归功于李斯庭 (Listing) 和卢克斯 (Lucas)[LIST48a，LUCA82a]. 它由李斯庭提出，后来由卢克斯给予了证明.

推论 5.2　令 $v_1, v_2, \cdots, v_{2m}\,(m > 0)$ 表示连通图 G 的所有奇次顶点，那么 $E(G)$ 可分解为 m 个开迹 $T_1, \cdots, T_m$，使得 T_i 的端点在 $\{v_1, \cdots, v_{2m}\}$ 中，并且 $E(G)$ 的任意一个开迹分解至少含有 m 个这样的迹. 由此得到每一个 $v_i\,(1 \leqslant i \leqslant 2m)$，恰是一个 $T_j\,(1 \leqslant j \leqslant m)$ 的奇次顶点.

证明　设 $E_0 = \{v_{2i-1}v_{2i} | 1 \leqslant i \leqslant 2m\}$，$G_0 = G \cup E_0$ 且 $E_0 \cap E(G) = \varnothing$. 由 G_0 的构造可知，G_0 是欧拉的，因此，由定理 4.1 知，G_0 有欧拉迹 T_0. 在 T_0 中去掉 E_0 中的边，则得到 T_0 的 m 个开迹序列 $T_1, \cdots, T_m$，它们的端点均在集合 $\{v_1, \cdots, v_{2m}\}$

中 (注意：E_0 中的边是彼此不相邻的). 因为 $E(T_0) = E(G_0) = E_0 \cup \bigcup_{i=1}^{m} E(T_i)$ 且 $E_0 \cap E(G) = \varnothing$，所以 $\{E(T_1), \cdots, E(T_m)\}$ 是 $E(G)$ 的一个划分. 另一方面，若 $E(G)$ 被划分为 r 个开迹，那么每一个 $v_i\,(1 \leqslant i \leqslant 2m)$，至少是一个开迹的一个端点，因此，$r \geqslant m$. 证毕.

G 的每个分支都有奇次顶点. 观察 $E(G)$ 的开迹分解 $T_1, \cdots, T_m$，把每一个 T_i 分解为连结 G 的两个奇次顶点的一条路 P_i 和一组边不交的圈的集合 S_i 的 ($T_i - P_i$ 是欧拉图. 注意：$S_i = \varnothing$ 是可能的). 因此，$\bigcup_{i=1}^{m}(S_i \cup \{P_i\})$ 是 G 的路–圈分解. 如果 G 是一个一般的图且有欧拉分支，那么欧拉分支有圈分解，而无圈分支 (即树) 有路分解. 由于圈分解和路分解是路–圈分解的两种特殊情形，因此，可由推论 5.2 得到下述结论：

推论 5.3 任意一个图 G 有路–圈分解，并且分解中路的个数等于 G 的奇次顶点个数的一半.

后面将看到在平面图的情形，还存在某些特定的路–圈分解.

在继续理论探讨之前，提一下李斯庭的工作. 他的专著 *Vorstudien zur Topologie* [LIST48a] 可以认为对图论的发展起到了奠基作用，然而就欧拉图论的发展而言，他对本书所讨论的主题的贡献不像“三个柱石”那么重要 (关于他的开创性的工作在图论中的作用见 [KÖNI36a] 和最近的文章 [WILS85a， WILS86a]).

5.2 奇偶性结果

下述结果是推论 5.1 中所描述的另一个特征， 也是定理 4.5 的一个推论 ([TOID73a，定理 I]).

推论 5.4 设 G 是仅具有两个奇次顶点 u 和 v 的图，则连接 u 和 v 的路的条数为奇数.

证明 设 $G_0 = G \cup \{e_0\}$，其中 $e_0 = uv \notin E(G)$(即使 u, v 在 G 中相邻). 因为 G_0 是欧拉的，故由定理 4.5 可知，G_0 中包含 e_0 的圈的个数为奇数. 对每一个包含 e_0 的圈 C 有 $P(u,v) = C - \{e_0\}$ 是连接 u 和 v 的路. 反之，对 G 中连接 u 和 v 的每一条路 $P(u,v)$，$P(u,v) \cup \{e_0\}$ 是 G_0 中包含 e_0 的一个圈. 因此，G 中连接 u 和 v 的路有奇数条.

在导出定理 4.5 中欧拉图的必要条件时，陶达先证明的是推论 5.4.

现在我们证明欧拉图的另一特征 (见 [TOID73a，定理 III] 和 [BOND86a，推论 3.4]).

推论 5.5 一个图 G 是欧拉图，当且仅当对每一对 $u, v \in V(G)$，G 中连接它们的路有偶数条.

证明　1) 假设 G 是欧拉的. 设 $u, v \in V(G)$，$e_0 = uv \notin E(G)$，$G_0 = G \cup e_0$，那么 G_0 恰有两个奇次顶点 u 和 v. 由推论 5.4，G_0 中连接 u 和 v 的路有奇数条，而 u, e_0, v 是其中之一. 因此，在 G 中连接 u 和 v 的路有偶数条.

2) 若 G 的每一对顶点间有偶数条路，那么每一对相邻的顶点之间也有偶数路. 因此，对任意边 $e_0 = xy \in E(G)$，G 中连接 x 和 y 的路中有奇数条不含 e，而每一条这样的路连同边 e 就构成包含 e 的一个圈. 因此，e 在 G 的奇数个圈上. 由 e 的任意性，又由定理 4.5 得 G 是欧拉的. 证毕.

用 $w(G)$ 表示 G 中路的数目 (包括长度为 0 的路)，那么由推论 5.5 得出欧拉图的另一个奇偶性结果 ([BOND86a，推论 2.7]).

推论 5.6　设 G 是 $p(G)$ 个顶点的欧拉图，则 $w(G) \equiv p(G) \pmod 2$.

推论 5.6 的证明留给读者 (见练习 5.1)

文章 [BOND86a] 中关于奇偶性的结果比我们所摘引的要多得多. 文中除欧拉图以外，还证明了只有奇次顶点的图的若干结果. 其方法是汤姆森 (A.G.Thomason) 的一个证明技巧的推广 [THOA78a].

注 5.7　由于本章引言所述的原因，许多作者经常把欧拉图定义为具有 0 或 2 个奇次顶点的连通图，即连通是一个图为欧拉图的基本要求. 而本书所定义的欧拉图被他们称为偶图. 本书所采用的欧拉图的定义，是由冠尼希给出的 ([KÖNI36a，p19]).

5.3 双　迹

下一个结果也来源于欧拉的文章 (见第 2 章 18)，它的证明最早出现在冠尼希的书 [KÖNI36a，p23] 中.

推论 5.8　每一个连通图有一条闭覆盖途径，它经过每一条边恰好两次.

冠尼希把图中每一边增加一条重边，这样就得到一个欧拉图. 这个图的欧拉迹对应于原图的一个覆盖途径，使原图中每一边恰恰被经过两次，这样就导出了推论 5.8 的证明.

将类似的方法应用于定理 4.8，可得到以下更强的结果，其证明留给读者 (练习 5.4)：

推论 5.9　每一个连通图都有一条闭覆盖途径，它经过每一条边的两个方向各一次.

这一结果将为迷宫算法提供不同的思路 (见第 10 章). 这一结果可以归功于特雷马克思 (Trémaux) 和泰瑞 (Tarry).

值得注意的是，在证明了推论 5.8 后，冠尼希叙述并证明了外伯伦 (Veblen) 的特征定理，然后讨论了哥尼斯堡问题和多米诺骨牌问题. 他没有涉及下述问题：如

*果一个图无桥，是否存在一个圈覆盖，使得每一边恰好被覆盖两次？*这个问题与外伯伦特征定理的关系，类似于欧拉–赫拉兹的特征定理与推论 5.8 的关系. 西蒙 (P.D.Seymour)[SEYM79a，猜想 3.3] 和乔治 (F. Jaeger)[JAEG85a] 在研究上述问题时都没有找到这个问题的来源，我也没有. 另一方面，鉴于定理 4.1 和推论 5.8，提出这一问题应该是很自然的. 因此，长时间没有人提出这一问题是很奇怪的①.

因此，我们在研究欧拉图的早期阶段就遇到了一个未解决的问题，它在过去 12 年左右的时间里占据了许多研究者相当多的时间. 下面将讨论这一问题和与此相关的问题及有关结果.

5.4 交叉边界：图的分拆

纳什–威廉姆斯在他的一系列文章 [NASH79a，NASH85a，NASH85b，NASH87a] 中，推广了把一对边从一个顶点分裂开来的概念 (如本书由 G 定义 $G_{1,2}$)，定义了图的**分拆**，其出发点与边分裂一样 (也见定理 4.1 的证明)，即若 G 是欧拉的，通过一系列边分裂，使每一次边分裂后的图连通 (见分裂引理)，直到最后的图为一个圈为止，而这个圈就对应于原图 G 的欧拉迹. 反之，若 T 是 G 的一条欧拉迹，那么根据 T 所确定的转移施行边分裂，最后就得到一个圈 C. G 的欧拉迹和用一系列边分裂程序由 G 得到的圈之间的对应是一个双射. 总结以上讨论有如下推论：

推论 5.10 一个图 G 有欧拉迹 T 当且仅当通过对次大于 2 的顶点反复使用边分裂方法能把 G 变换为一个圈，并且 G 的欧拉迹的个数等于把 G 变换为不同标号圈的数目.

现在看一下纳什–威廉姆斯的 4 篇文章，这些文章提出了图论中一个有意义的方法，涵盖了比欧拉图更为广泛的图.

定义 5.11 设 F 和 G 是两个图，F 称为 G 的分拆，当且仅当存在满射 $\pi:\ V(F)\to V(G)$ 保持邻接性 (即 $e=xy\in E(F)$ 蕴涵 $e=\pi(x)\pi(y)\in E(G)$).

注 5.12 按定义 5.11，对 $x\neq y$ 可能有 $\pi(x)=\pi(y)$，即 F 的非环边可能是 G 的环 (注意：因为 $E(F)=E(G)$，把 π 扩充到 $E(F)$ 上，是 $E(F)$ 上的恒等映射). 若 G 是无环的，那么对每一个 $v\in V(G)$，$\pi^{-1}(v)$ 是 $V(F)$ 的一个独立集. 总之，π 是由 F 到 G 上的一类特殊的同态，它是 F 和 G 的边集之间的双射.

应用上述分拆的概念，推论 5.10 可重述如下：

推论 5.13 一个图 G 有欧拉迹 T 当且仅当 G 有一个分拆圈.

① 冠尼希的书中有许多脚注和注，说明图中某些结果和猜想的历史，但对这个问题却没有. 我也咨询过塔特 (如果有人知道，那就应该是他)，他写道："我也不知道怎样才能找到原始资料. 我想这个猜想在以前的数学交往中已建立起来了，人们认为已公布了."

图 5.1 是推论 5.10 和推论 5.13 的的一个实例，图中边的标号指示 G 的欧拉迹经过的边的顺序).

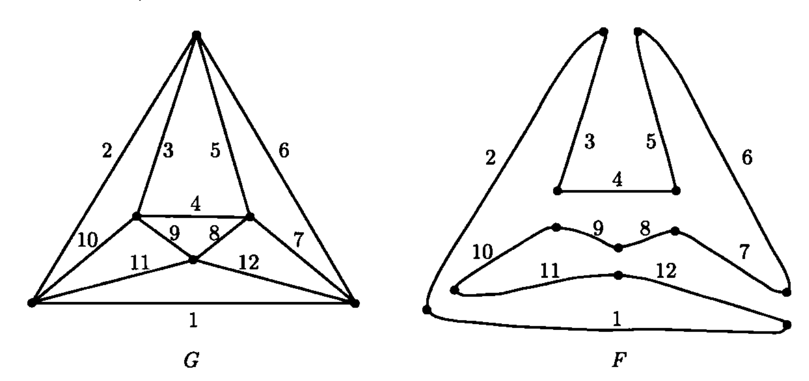


图 5.1　图 G 的一条欧拉迹被变换为圈 F，圈 F 是 G 的分拆 (它定义了 G 的一条欧拉迹)

纳什–威廉姆斯在他的文章中，还把分拆的概念应用到了无限图上. 关于这一方面的研究见 [NASH79a，NASH85a，NASH85b，NASH87a]，这里只摘引了 [NASH85b，推论 8.0].

推论 5.14　设 k 是一个正的偶数，G 是一个 k- 边连通图. 对每一个 $v \in V(G)$，f_v 是一个整数序列 $f_v = n_1, \cdots, n_{\ell(v)}$，满足对 $1 \leqslant i \leqslant \ell(v)$ 有 $n_i \geqslant k$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{\ell(v)} n_i = \deg_G(v)$. 那么 G 有一个 k- 边连通分拆 F，使得对每一个 $v \in V(G)$, $\pi^{-1} = \{v_1, \cdots, v_{\ell(v)}\}$，并且 $\deg_F(v_i) = n_i\,(1 \leqslant i \leqslant \ell(v))$.

注意：在推论 5.14 中，设 $k = 2$, $\ell(v) = \dfrac{1}{2}\deg_G(v)\,(v \in V(G))$ 且 $n_i = 2\,(1 \leqslant i \leqslant \ell(v))$，就可以得到推论 5.13.

5.5　习　　题

练习 5.1　利用推论 5.5 证明推论 5.6.

练习 5.2　对有向图描述并证明类似于推论 5.1∼ 推论 5.3 的结论，再对混合图进行同样的讨论.

练习 5.3　构造一个有向图，说明推论 5.4 对有向图不成立.

练习 5.4　证明推论 5.9.

第 6 章　欧拉迹的各种类型

回忆一下定理 4.1 的证明. 为了证明连通欧拉图 G 有欧拉迹 T，应用了分裂引理. 如果系统地应用分裂引理，就能得到这样的 T(参见有关欧拉迹的算法的章节，也可见推论 5.13). 除此之外，分裂引理表明：在产生欧拉迹的各个阶段，没有任何限制. 因此，除了分裂引理所提出的自然限制外，还可以在生成 G 的欧拉迹的过程中加限制条件. 本章讨论的正是可以增加何种限制的问题.

6.1　回避特定转移的欧拉迹

本节首先处理一个局部性的限制，也可以说纯粹是集合的限制. G 是连通欧拉图，对 G 的任一点 v，考虑集合 E_v^*. 能选择多少个转移 $\{e(v), f(v)\}$，使其为 v 的禁用转移，其中 e, f 为 E_v 的任意元素? 换句话说, G 中存在回避任何给定的转移的欧拉迹 T 的充分必要条件是什么? 科特齐格 [KOTZ68a，定理 1] 在下面的定理中回答了这个问题. 为此，需要回忆定义 3.41.

定理 6.1　设 G 是连通欧拉图. 对任意 $v \in V(G)$，令 $P(v)$ 为 E_v^* 的一个划分，则下面的叙述等价：

1) G 有 $P(G)$ 相容欧拉迹.

2) 对每个 $v \in V(G)$，每个 $C \in P(v) \subset P(G)$ 有 $|C| \leqslant \dfrac{1}{2}d_G(v)$.

证明　1) $\Rightarrow$ 2)　令 T 为 G 的 $P(G)$- 相容的欧拉迹. 对任意 $v \in V(G)$，$C \in P(v)$，考虑 T 的所有符合下面条件的段 e, v, f：$C \cap \{e(v), f(v)\} \neq \varnothing$. 因为 T 是 $P(G)$- 相容的，故有 $e(v) \in C$ 当且仅当 $f(v) \notin C$，即 $|C \cap \{e(v), f(v)\}| = 1$. 由于 G 的每条边在 T 中恰出现一次，故 $|C| \leqslant \dfrac{1}{2}d_G(v)$.

2) $\Rightarrow$ 1)　当 $\sigma(G) = 0$ 时，对每个 $C \in P(G)$ 有 $|C| = 1$. 由此，沿着该回路走一圈必是 $P(G)$- 相容的. 以下假设 $\sigma(G) > 0$.

选择 $v \in V(G)$, $C_1 \in P(v)$，使得 $d_G(v) > 2$, $|C_1| = \max\{|C| \mid C \in P(v)\}$，任取 $e_1(v) \in C_1$ 且令 $e_2(v), e_3(v)$ 为 $E_v^* - C_1$ 的任两个不同的元素，由 v 的选择及 $|C_1| \leqslant \dfrac{1}{2}d_G(v)$ 可知它们存在. 应用分裂引理，不失一般性，设 $G_{1,2}$ 是连通的. 用 $C_2 \in P(v)$ 表示包含 $e_2(v)$ 的类. 令 $P^-(v) = P(v) - \{C_1, C_2\}$. 现在定义

$$P'(w) := P(w), \quad w \in V(G_{1,2}) - \{v, v_{1,2}\},$$
$$P'(v_{1,2}) := \{\{e_1(v)\}, \{e_2(v)\}\},$$
$$P'(v) := \begin{cases} P^-(v) \cup \{C_1 - \{e_1(v)\}, C_2 - \{e_2(v)\}\}, & |C_2| > 1, \\ P^-(v) \cup \{C_1 - \{e_1(v)\}, & |C_1| > |C_2| = 1, \\ P^-(v), & |C_1| = |C_2| = 1, \end{cases}$$

$$P(G_{1,2}) = \bigcup_{x \in V(G_{1,2})} P'(x).$$

以下关于 G 和 $P(G)$ 的事实可以由 2) 和 v, e_1, e_2 的选择推出.

a) 对每个 $w \in V(G_{1,2}) - \{v, v_{1,2}\}$ 和 $C' \in P(w) \subset P(G)$ 有 $|C'| \leqslant \frac{1}{2}d_G(w) = \frac{1}{2}d_{G_{1,2}}(w)$.

b) 如果存在 $C'' \in P'(v)$，使得 $|C''| > |C_1 - \{e_1(v)\}|$，则 $C'' \in P(v)$ 且 $|C_2| \leqslant |C''| = |C_1| \leqslant \frac{1}{2}d_G(v) - 1 = \frac{1}{2}d_{G_{1,2}}(v)$.

由 a) 和 b)，$G_{1,2}$ 和 $P(G_{1,2})$ 满足 2) 的条件，而 $\sigma(G_{1,2}) < \sigma(G)$. 由归纳假设可得出定理结论.

注　科特齐格在 [KOTZ68a] 中声称他的定理 1 (即定理 6.1) 回答了纳什–威廉姆斯 1966 年在 Tihany 举行的图论研讨会上提出的一个问题. 然而，那次学术研讨会的会议记录中并没有纳什–威廉姆斯提出这个或类似问题的记录 (在私人通信中，纳什–威廉姆斯告诉本书的作者他不记得提出过这个问题). 事实上，是谁提出的这个问题并不重要，重要的是，如果给 G 和 $P(G)$ 作一些特定的假设，就可以通过多种途径得到定理 6.1.

下面的结果 [KOTZ56a] 一部分是定理 6.1 的结论，一部分推广了彼特森用于证明 4- 正则图有 2- 因子分解 [PETE91a] 的方法. 这个结果的证明最初并未利用定理 6.1 证明 (定理 6.1 在数年后才发表)，正如定理 6.1 的最初证明并未利用分裂引理一样.

推论 6.2　设 G 是连通的、有偶数条边的欧拉图，则以下结论成立:

1) 若 T 为 G 的欧拉迹，则 G 中存在两个边不交的支撑子图 G_r 和 G_b，使得

$$G_r \cup G_b = G, \quad d_{G_r}(v) = d_{G_b}(v), v \in V(G),$$

并且 G_r 和 G_b 的边在 T 中交替出现.

2) 若 G 是它的两个边不交的子图 G_r 和 G_b 的并，并且 $d_{G_r}(v) = d_{G_b}(v)$，其中 $v \in V(G)$，则 G 有一个欧拉迹，它交替地经过 G_r 和 G_b 的边.

证明　A) 沿着 T 交替地用红色 r 和蓝色 b 给 T 的边着色，得到 1) 中描述的子图 G_r 和 G_b (对 T 的起点、终点 v_0 有 $d_{G_r}(v_0) = d_{G_b}(v_0)$，因为 $|E(G)|$ 是偶数).

B) 注意到每个 $P(v)$ 由两个含有相等边数的类构成，2) 可从定理 6.1 得到.

由推论 6.2 的证明 A)，我们得到一个重要结论，它出现在彼特森的著名论文 [PETE91a] 中.

推论 6.3 每个有偶数条边的 $2k$- 正则图可以分解成两个 k- 因子. 由此，每个 4-正则图可分解成两个 2- 因子.

定理 4.1 可以推广到推论 5.2. 用类似的方法，定理 6.1 也有相应的推广，这也在 [KOTZ68a] 中得以证明.

推论 6.4 设图 G 的每个分支至少有一个奇点. 令 $P(v)$ 表示 E_v^* 的一个划分，其中 $v \in V(G)$，则以下叙述等价:

1) G 有一个分成 p 个开迹的 $P(G)$- 相容分解 (其中 $2p$ 为 G 的奇点数).

2) 对每个 $v \in V(G)$ 及每个类 $C \in P(v) \subset P(G)$ 有 $|C| \leqslant \dfrac{1}{2}(1 + d_G(v))$.

证明 由假设，G 的每个分支含奇点，于是只要对有奇点的连通图证明推论 6.4.

如推论 5.2 的证明那样，对 G 的每对奇点加一条边，构成欧拉图 G_0. 若 v 是 G 的偶点，则定义 $P_0(v) = P(v)$; 若 v 是 G 的奇点，则定义 $P_0(v) = P(v) \cup \{\{e_0(v)\}\}$，其中 $e_0(v)$ 对应于 $E(G_0) - E(G)$ 中的边 e_0，e_0 连接 v 及 G 的另一奇点.

$P(G_0) = \bigcup\limits_{v \in V(G)} P_0(v)$ 满足定理 6.1 的 2) 当且仅当 $P(G)$ 满足推论 6.4 的 2). 另一方面，G_0 的一条 $P(G_0)$- 相容的欧拉迹对应于 G 中分成 p 个开迹的 $P(G)$- 相容分解，反之也成立. 由此，利用定理 6.1，推论 6.4 得证.

很遗憾，定理 4.1 和定理 6.1 之间以及推论 5.2 和推论 6.4 之间的平行关系，不能推广到推论 5.3 有关 $P(G)$- 相容路 (圈) 分解的叙述上，即使 $P(G) = X(G)$ 为转移系统. 以下考虑相容性时 (见本书第三卷)，我们将讨论特定的例子.

下面对没有 2- 价点的连通欧拉图，我们指定 $P(G)$ 为转移系统 $X(G)$(见定义 3.41). 于是作为定理 6.1 的平凡推论，我们有下面结果. 不过简单地应用分裂引理也能证明该结果 (即它不依赖于定理 6.1).

推论 6.5 设 G 为没有 2- 价点的连通欧拉图，并且令 $X = X(G)$ 为 G 的转移系统，那么存在与 X 相容的欧拉迹 T.

特别地，若 $X = X_{T'}$ 是由 G 的欧拉迹 T' 导出的转移系统，则上述 T 存在. 因此，如果 $\delta(G) > 2$，那么 G 至少有两个相容的欧拉迹. 对满足 $\delta(G) > 2$ 的连通欧拉图 G，最多有多少个两两相容的欧拉迹呢? 下节将处理这个问题.

进而，若 G 是 4- 正则图且可嵌入在某曲面 $\mathcal{F}$ 上，我们假定对每个 $v \in V(G)$，$X(v) \subset X(G)$ 是交叉转移对 (见定义 3.42a).

推论 6.6 若 G 是连通的 4- 正则图，并且可嵌入在某曲面 $\mathcal{F}$ 上，则 G 有

A- 迹.

证明 取 $X(G)$ 为交叉转移系统，并应用推论 6.5.

图 5.1 中的边序列 $1, 2, \cdots, 12$ 给出了八面体中 A- 迹的一个例子.

推论 6.6 不仅可用分裂引理直接证明 (练习 6.3)，而且也是下面引理 6.7 的推论，引理 6.7 也能用分裂引理得到 (练习 6.4).

引理 6.7 设 G 是连通的欧拉图且可嵌入在曲面 $\mathcal{F}$ 上，那么 G 有非交叉欧拉迹.

由 A- 迹的定义和非交叉欧拉图的定义 (见定义 3.42a)) 可以看出，在 4- 正则的情形 (或更一般地，G 是满足 $\Delta(G) < 6$ 的欧拉图)，这两个概念是一致的. 然而，在有关 A- 迹的章节中，我们也将看到存在这样的 2- 连通平面图，它仅具有 4- 价点和 6- 价点，但是没有 A- 迹 (但是由引理 6.7，它们有非交叉欧拉迹).

对平面图，推论 6.6 和引理 6.7 是平凡的 (有关例子可见 [TUTT41a], [KOTZ68c，定理 10] 和 [HARA69a，练习 11.2]). 对可嵌入到某任意曲面 $\mathcal{F}$ 的图，贝利 (Belyj) 在 [BELY83a] 中证明了一个结论，它不依赖于所嵌入的曲面，而依赖于给每个点 $v \in V(G)$ 的 E_v^* 预先定义的循环序 (尽管贝利没有提到这个，但是隐含在他的论文中. 然而，推论 6.6，引理 6.7 以及以下的引理，都是分裂引理的平凡的推论. 以下引理是贝利论文的精华 (见 [BELY83a，定理 1])，我们把证明留给读者 (见练习 6.4)：

引理 6.8 设 G 是连通的欧拉图且对每个 $v \in V(G)$，关联于 v 的半边有给定的序 $O^+(E_v^*)$，那么 G 有非交叉欧拉迹.

注 作为有案可查的事，科特齐格对 4- 正则图应用推论 6.5 证明了对平面图 $\mathcal{F}$ (该文中的 σ- 域在这里称为 A- 迹)，推论 6.6 的正确性 (见 [KOTZ68c，定理 3]). 另一方面，[TUTT41a] 中以如下论述开头：“*考虑每个节点恰有 4 条边的平面网络，由欧拉定理可知，在这种自身不交的网络中存在一笔画路* ······”(网络 = 图，一笔画路 = 欧拉迹). 这个叙述是正确的 (见推论 6.6)，但它不能自动由定理 6.1得到(见欧拉原文).

引理 6.8 可以推广到任意图. 我们将证明留作练习 ([BELY83a] 中的叙述比这里的要弱，很明显，贝利想作更一般的叙述 —— 见他的定义 6 和定义 7).

推论 6.9 设 G 为恰有两个奇点的连通图，并且按引理 6.8 给出 $O^+(E_v^*)$，那么 G 有非交叉的开覆盖迹.

推论 6.10 设 G 为连通图，并且按引理 6.8 给出 $O^+(E_v^*)$，那么 G 可分成 n 个两两非交叉的迹 (其中 $2n$ 为 G 的奇点数).

贝利的定义有点模糊，因为他没有用 $O^+(E_v^*)$，只是简单地说 G 中关联于 v 的顶点 $v_1, \cdots, v_n$ (在他的定义 1 中，他用 n- 边形 $v^1, v^2, \cdots, v^n$ 代替 v，令 v_i 邻接到 v^i—— 这是有问题的，当 G 中允许有环和重边时更有问题). 因此，他的定理 2

对非平面的情形是错误的. 为了对欧拉有向图建立类似于引理 6.8 的结果，他断言**这样的图有非交叉欧拉迹当且仅当在每个点 v，内关联于 v 的弧与外关联于 v 的弧是交替的**. 图 6.1 是 $K_{2,4}$ 的一个欧拉定向 $D_{2,4}$，如把它嵌入到环面或射影平面上，则给出与贝利的叙述相矛盾的非交叉欧拉迹.

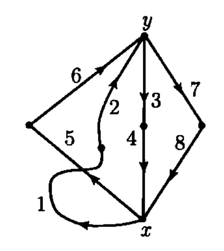


图 6.1　$D_{2,4}$ 的 A- 迹，其中在 x 和 y 点的出、入弧并不交替

6.1.1　有向图中 $P(D)$ 相容欧拉迹

我们现在试图对有向图再复述前面的一些结果. 图 6.1 的有向图 $D_{2,4}$ 表明定理 6.1 不能简单地平移到有向图，因为若定义

$$P(D_{2,4}) = X(D_{2,4}) = \{\{1,8\}\},\{4,5\},\{2,7\},\{3,6\}\},$$

则 $D_{2,4}$ 不含与 $X(D_{2,4})$ 相容的欧拉迹. 但这并不奇怪，因为一般来说，在连通欧拉有向图 D 中，对于关联于 v 的每条弧 e 都有 $\mathrm{id}(v)-1=\dfrac{1}{2}d(v)-1$ 条弧，它们在 D 的任一欧拉迹上都不与 e 相继 (它们就是所有关联到 v 且与 e 不同的弧). D 是有向图而不是图这个事实，对每个 $v \in V(D)$ 强加了一个 A_v^* 的划分 $P(v)$——$P(v)$ 含有两个类，一个是 $(A_v^*)^+$，另一个是 $(A_v^*)^-$. 鉴于这个自然的划分 $P(v)$ 及相应的 $P(D)$，$P(D)$- 相容的欧拉迹恰为 D 的欧拉迹.

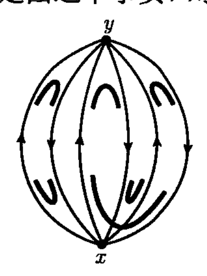


图 6.2　3- 正则有向图及转移系统 X (用小弧标记). 该图没有与 X 相容的欧拉迹

另一方面，对任意 $P(D)$，$P(D)$- 相容的欧拉迹的存在性蕴涵了定理 6.12)(在那个叙述中用 D 代替 G). 然而，图 6.2 表明该叙述对 $P(D)$- 相容的欧拉迹的存在并不充分.

考虑 D 的任意划分系 $P(D)$. 由分裂引理 (应用到 D，使得 $D_{1,2}$ 和 $D_{1,3}$ 是欧拉的，其中 e_1 是内关联于 v 的一条弧，e_2, e_3 是外关联于 v 的弧)，可以猜测，如果对每个 $v \in V(G)$ 及任意半弧 $e^- \in C^- \in P(v) \subset P(D)$ (其中 e^- 内关联于 v)，存在两条半弧 $e_1^+, e_2^+ \in C^+ \subset P(v)$ (其中 e_1^+, e_2^+ 是外关联于 v 的弧)，并且 $C^+ \neq C^-$，那么 D 有 $P(D)$- 相容的欧拉迹. 换句话说，在每个点 v，对每个 $e^- \in (A_v^*)^-$，如果 $P(D)$ 至少有两个选择来定义转移 $\{e^-, e_i^+\}\,(i=1,2)$ 是否一定存在关于 D 的 $P(D)$- 相容欧拉迹，从图 6.2 可以看出答案是否定的.

然而，有向图的下述结果 (似乎是新的) 可认为类似于定理 6.1：

定理 6.11　设 D 是连通的欧拉有向图. 对每个 $v \in V(D)$，令 $P(v)$ 为 A_v^* 的一个划分. 如果 D 有 $P(D)$- 相容的欧拉迹，那么

1) 对每个 $v \in V(D)$ 及 $C \in P(v) \subset P(D)$，$|C| \leqslant \frac{1}{2}d_D(v)$.

如果叙述 1) 成立且 $P(D)$ 满足

2) 对每个满足 $d_D(v) > 2$ 的 $v \in V(D)$ 都有 $P(v) \geqslant \frac{1}{2}d_D(v) + 2$，那么 D 有 $P(D)$- 相容的欧拉迹.

证明　从图 6.2 前面的讨论可以知道，只需证明叙述 1) 和 2) 蕴涵着 D 中存在 $P(D)$- 相容的欧拉迹.

考虑满足$d_D(v) > 2$ 的点 $v \in V(D)$，由叙述 2) 知，对最大的类 $C_1 \in P(v)$ 也有 $|C_1| < \frac{1}{2}d_D(v)$ (因此，叙述 1) 仅与 2- 价点有关). 因此，若 C_1 不受产生 $D_{1,2}$ 的分裂过程的影响，那么对 $C_1 \in P'(v) \subset P(D_{1,2})$ 仍然有 $|C_1| \leqslant \frac{1}{2}d_D(v) - 1 < \frac{1}{2}d_{D_{1,2}}(v)$ (与定理 6.1 的证明中使用的记号作比较)，进而由叙述 2)，对这种 $v \in V(D)$，$|P(v)| \geqslant 4$ 成立. 于是有以下性质:

3) 如果对某个 $v \in V(D)$ 有 $d_D(v) \geqslant 4$，那么或者

a) 对每个 $C \in P(v)$，$C \cap (A_v^*)^+ \neq \varnothing$ 当且仅当 $C \cap (A_v^*)^- = \varnothing$，

或者

b) 存在 $C_0, C', C'' \in P(v)$ 满足 $C_0 \cap (A_v^*)^+ \neq \varnothing \neq C_0 \cap (A_v^*)^-$ 且 $C' \cap (A_v^*)^+ = C'' \cap (A_v^*)^+ = \varnothing$ (注意: $|(A_v^*)^+| = \frac{1}{2}d_D(v)$ 且 $|P(v)| \geqslant \frac{1}{2}d_D(v) + 2$).

现在假设定理不成立，取 D 为使得 $\sigma(D)(\geqslant 0)$ 最小的反例. $\sigma(D) = 0$ 的情形如定理 6.1 的证明同样处理 (用 G 替换 D)，于是有某个 $v \in V(D)$ 不是 2- 价点. 取这样的 v，并对 $P(v)$ 考虑上面 3)a) 和 3)b) 对应的情形.

在第一种情形，简单地重复应用分裂引理直到 v 被 $k = \frac{1}{2}d_D(v)$ 个 2- 价点取代，得到的有向图 D' 是连通的、欧拉的. 我们选用以下的记号：对这 k 个 2- 价点，$P'(v_{ii}) = \{\{a_i^-(v)\}, \{a_i^+(v)\}\}$，其中 $a_i^-(v) \in (A_v^*)^-$ 和 $a_i^+(v) \in (A_v^*)^+$，其中 $i = 1, 2, \cdots, k$. 因为 $\sigma(D') < \sigma(D)$，对 $P(D') = (P(D) - P(v)) \cup \bigcup_{i=1}^{k} P'(v_{ii})$，由 $P(D')$ 的构造，D' 中存在与 D 的 $P(D)$- 相容欧拉迹相对应的 $P(D')$- 相容欧拉迹.

在第二种情形，任意选取 $a_1(v) \in C_0 \cap (A_v^*)^+$，$a_2(v) \in C' \cap (A_v^*)^-$，$a_3(v) \in C'' \cap (A_v^*)^-$. 由分裂引理的证明，$D_{1,2}$ 或 $D_{1,3}$ 是连通的 (两个都是欧拉的). 不失一般性，设 $D_{1,2}$ 是连通的. 令 $P'(w)\,(w \neq v, v_{1,2})$，$P'(v_{1,2})$，$P'(v)$ 和 $P(D_{1,2})$，如

定理 6.1 的证明中所定义. 从 3) 前面的讨论知，$P(D_{1,2})$ 满足叙述 1)，并且由 C_0 的选择，

$$|P'(v)| \geqslant |P(v)| - 1 \geqslant \frac{1}{2}d_D(v) + 1 = \frac{1}{2}d_{D_{1,2}}(v) + 2,$$

即 $P(D_{1,2})$ 满足叙述 2) (注意 3)b) 蕴涵 $d_D(v) \geqslant 6$). 由此及 $\sigma(D_{1,2}) < \sigma(D)$，$D_{1,2}$ 中存在 $P(D_{1,2})$- 相容欧拉迹，它对应于 D 中的 $P(D)$- 相容欧拉迹.

在 3)a) 和 3)b) 两种情形均有 D 的 $P(D)$- 相容欧拉迹，这与 D 的选择矛盾. 定理 6.11 得证.

定理 6.11 中叙述 2) 的下界是最好可能的，这可由图 6.3 中的有向图 D_0 及它约化所得的有向图 D_0' 看出.

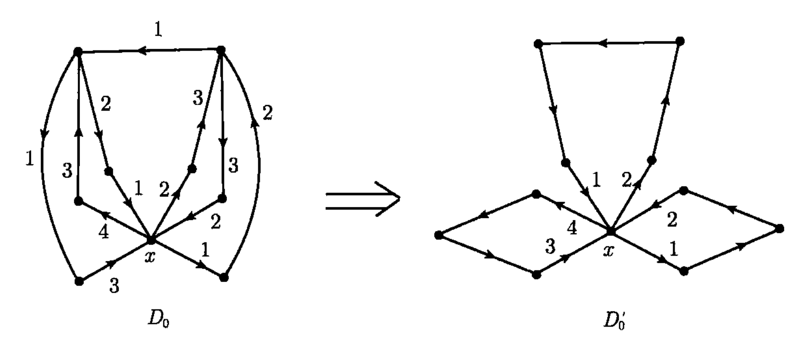


图 6.3 D_0 和 $P(D_0)$ (这里对每个 $v \in V(D_0)$，$P(v)$ 的不同类由不同的数表示) 以及由 $P(D_0)$- 相容性给出的到 D_0' 和 $P(D_0')$ 的唯一的变换. D_0' 无 $P(D_0')$- 相容欧拉迹，因此，D_0 无 $P(D_0)$- 相容欧拉迹

考察 D_0 的任意 4- 价点 v，显然，对 $|P(v)| = 3$，满足 $P(D_0)$- 相容的 v 的分裂是唯一的. 这就是对欧拉有向图 D 及 $P(D)$ 不加进一步的假设，不能改进叙述 2) 的下界的本质. 因为由分裂引理，通过一系列的分裂过程，可以得到一个连通的欧拉有向图，它恰有两个 4- 价顶点，而其他点都是 2- 价的，并得到一个如图 6.1 后的类似于 $X(D_{2,4})$ 的转移系统. 由上可知，用 $\{4\},\{5\}$ 代替 $\{4,5\}$，$\{3\},\{6\}$ 代替 $\{3,6\}$ 并不改变原问题. 如果在图 6.3 中令 $C_1' = C_1 \cup C_3$，$C_2' = C_2 \cap (A_x^*)^-$，$C_3' = C_2 \cap (A_x^*)^+$，$C_4' = C_4$，并且用 $P'(x) = \{C_1', C_2', C_3', C_4'\}$ 改变 $P(x)$ (其中 C_i 在图 6.3 中由标以 i 的弧表示)，那么对

$$P'(D) = (P(D) - P(x)) \cup P'(x),$$

D 中也不存在 $P'(D)$- 相容欧拉迹.

因此，我们特别考虑 D 和 $P(D)$ 的结构.

定义 6.12 设 D 是具有给定划分系 $P(D)$ 的有向图，称 $P(D)$ 是**几乎转移的**当且仅当对每个 $v \in V(D)$ 及 $C \in P(v) \subset P(D)$，不等式 $|C| \leqslant 2$ 成立. 此时分别

用 $X^*(D), X^*(v)$ 代替 $P(D), P(v)$.

推论 6.13　在定理 6.11 中，如果用 $X^*(D)$ 代替 $P(D)$ (其中 $X^*(D)$ 是一个几乎转移的划分系)，并用以下的 2′) 代替 2)：

2′) 每个满足 $d_D(v) > 2$ 的点 $v \in V(D)$ 有 $d_D(v) \geqslant 8$ 且 $|X^*(v)| \geqslant \frac{1}{2}d_D(v) + 1$，

那么 D 有 $X^*(D)$- 相容的欧拉迹.

推论 6.13 的证明可归结为定理 6.11 的应用 (若在满足 $d_D(v) > 2$ 的每个点 v，用恰当的方式应用分裂引理)，其证明留给读者 (练习 6.7). 此外，由练习 6.7 中相同的讨论可知，如果除了 2- 价点外，每个点满足 $d_D(v) > 8$，那么可将 2′) 中的下界改进为 $\frac{1}{2}d_D(v)$. 于是得到另一推论.

推论 6.14　在推论 6.13 中，分别用 $d_D(v) > 8$ 和 $|X^*(v)| \geqslant \frac{1}{2}d_D(v)$ 代替 $d_D(v) \geqslant 8$ 和 $|X^*(v)| \geqslant \frac{1}{2}d_D(v) + 1$，那么 D 有 $X^*(D)$- 相容的欧拉迹.

进而指定 $d_D(v)$ 和 $P(D)$，可得另一结果.

推论 6.15　设 D 为连通的欧拉有向图，并且给定转移系统 $X(D)$. 如果 $\delta(D) > 6$，那么 D 有与 $X(D)$- 相容的欧拉迹.

证明　由推论 6.14，只要以适当的方式用 4 个 2- 价点代替每个 8- 价点，那么对得到的有向图用推论 6.14 即可完成推论 6.15 的证明.

若 D 没有 8- 价点，则 D 和 $X(D)$ 满足推论 6.14 的假设，于是推论 6.15 成立. 若 D 有 8- 价点 v，则令 $a_i^+ \in (A_v^*)^+$，$a_i^- \in (A_v^*)^-$，不失一般性，设 $X(v) = \{\{a_i^-, a_i^+\}, i = 1,2,3,4\}$ 且 $D_{1,3}$ 和 $D_{1,4}$ 是连通的. 如果 $(D_{1,3})_{2,4}$ 和 $(D_{1,3})_{4,2}$ 都是不连通的，那么由双分裂引理 (引理 3.27)，$(D_{1,4})_{2,3}$ 和 $(D_{1,2})_{4,3}$ 中至少有一个是连通的，不妨设 $(D_{1,4})_{2,3}$ 是连通的. 又由分裂引理，或者 $((D_{1,4})_{2,3})_{3,1}$，或者 $((D_{1,4})_{2,3})_{3,2}$ 是连通的，不妨设 $H = ((D_{1,4})_{2,3})_{3,1}$ 是连通的. 但这样，H 就是从 D 通过用 4 个 2- 价点代替 v 得到的连通的欧拉有向图，从而 H 的每个 $(X(D)-X(v))$- 相容欧拉迹对应于 D 的一个 $X(D)$ 相容欧拉迹. 如果 $(D_{1,3})_{2,4}$ 或 $(D_{1,3})_{4,2}$ 是连通的，那么进一步应用分裂引理得到相同的结论 (注意：由推论 6.9 可知，在任何情形下，欧拉有向图都是无桥的). 把这个构造法应用到 D 和每个 8- 价点，就得到一个能够应用推论 6.14 的欧拉有向图. 推论 6.15 得证.

图 6.2 表明推论 6.15 关于大于 2 的最小价的限制是最好可能的，并存在无限多个例子说明这个事实. 为了看清这一点，任取一个 3- 正则有向图 D，并细分任两条弧 a_1, a_2. 然后用两条形如 (s_1, s_2) 的弧及两条形如 (s_2, s_1) 的弧连接细分点 s_1 和 s_2，令 $X(s_1), X(s_2)$ 如图 6.4 所指定. 可以验证，D_1 有与 $X(D_1) = X(D) \cup X(s_1) \cup X(s_2)$ 相容的欧拉迹当且仅当 D 有与给定的 $X(D)$ 相容的欧拉迹，

这一验证留作练习. 因此，若 D 是图 6.2 中的有向图或由该图出发反复应用图 6.4 中所示的扩充方式得到的任意 3- 正则有向图，并且 $X(D)$ 相应地定义，那么 D 没有 $X(D)$- 相容的欧拉迹. 但是若 $X(D) = X_T$ 是 D 的一个欧拉迹 T 的转移系统，则可以得到一个较强的结果，它可看成有向图中类似于推论 6.5 的结果.

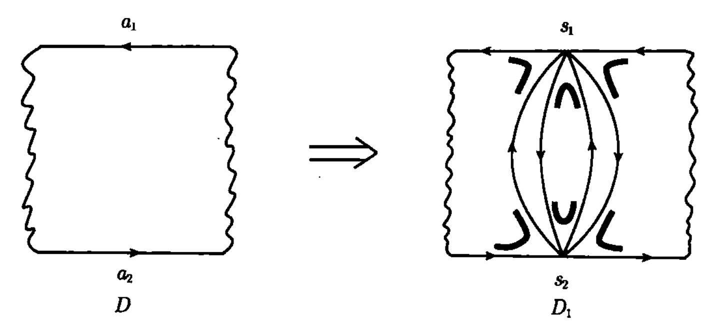


图 6.4 由 3- 正则有向图 D 构造的 3- 正则有向图 D_1

推论 6.16 设 D 为连通欧拉有向图，$\delta(D) > 4$ 且 T 为 D 的一个欧拉迹，那么存在 D 的 T- 相容的欧拉迹 T'.

证明 由推论 6.15，只要从 D 构造一个无 4- 价点和 6- 价点的连通欧拉有向图 D'，满足 $X(D')$ 由 X_T 导出，没有 T 在 D 的 6- 价点的转移定义 A_x^* (其中 x 为 D' 的 2- 价点).

事实上，我们能做得更好：可以构造 D'，使得 $X(D')$ 定义了 D' 的一个欧拉迹. 为此，假设 D 有一个 6- 价点 v (否则，由推论 6.15 即得). 记

$$T = x, \cdots, e_1^-, v, e_1^+, \cdots, e_2^-, v, e_2^+, \cdots, e_3^-, v, e_3^+, \cdots, x,$$

其中 $X(v) = \{\{e_i(v)^-, e_i(v)^+\} | i = 1, 2, 3\} \subseteq X_T$，$e_i(v)^- \in (A_v^*)^-, e_i(v)^+ \in (A_v^*)^+$ $(i = 1, 2, 3)$，则

$$T_1 = x, \cdots, e_1^-, v, e_2^+, \cdots, e_3^-, v, e_1^+, \cdots, e_2^-, v, e_3^+, \cdots, x$$

是 D 的欧拉迹, 除点 v 外，它处处与 T 吻合. 在点 v，它就像 D 的一个 T- 相容的欧拉迹. 对 D 的每个 6- 价点都这样做，最后得到欧拉迹 T'，它除了 6- 价点外，处处与 T 吻合，并且在这些点处就像 D 的 T- 相容的欧拉迹. 对每个 6- 价点用三个 2- 阶点替换，得到有向图 D'，使得 T' 对应于 D' 的一个欧拉迹，则 D' 是一个无 4- 价及 6- 价点的欧拉有向图，它有一个由 T 导出的转移系统 $X(D')$，$X(D')$ 定义了 D' 的一个欧拉迹. 由 D' 及 $X(D')$ 的构造，将推论 6.15 应用于 D' 得到 D' 的任意欧拉迹对应于 D 的一个 T- 相容的欧拉迹. 推论 6.16 得证.

显然，推论 6.16 不能推广到包括有 4- 价点的欧拉图 (见定义 6.12 前面的讨论). 什么样的 2- 正则有向图有与给定的欧拉迹相容的欧拉迹不是明显的，一个相

关的问题将在 6.1.2 小节讨论.

以下继续研究那些无向图中成立的结果在有向图中有类似的结论. 对于推论 6.2，如果像证明中所做的，可以记 $D = D_r \cup D_b$(D_r 和 D_b 是弧不交的)，而次条件可以改为

1′) $\mathrm{id}_{D_r}(v) = \mathrm{od}_{D_b}(v), \mathrm{od}_{D_r}(v) = \mathrm{id}_{D_b}(v)$, 其中 $v \in V(D)$

(内关联于 v 的任意“红”弧与外关联于 v 的“蓝”弧相配对，反之亦然). 但推论 6.2 的叙述 2) 对欧拉有向图不再成立. 为弄清这一点，考虑任意有偶数条弧及一个 4- 价割点 x 的连通欧拉有向图 (这样的图存在! —— 见练习 6.9)，那么可以记

$$D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = x \text{ 且 } D_i \text{ 是连通的}, \ i = 1, 2.$$

于是 $\mathrm{id}_{D_1}(x) = \mathrm{id}_{D_2}(x) = \mathrm{od}_{D_1}(x) = \mathrm{od}_{D_2}(x) = 1$. 考虑 D 的一个由欧拉迹确定的弧的“蓝–红”着色，并且对 D_2 交换色类. 选择 D，使得 $|A(D_i)| \equiv 0(\mathrm{mod} 2)\,(i = 1, 2)$，不失一般性，$D_1$ 中内关联于 x 的弧着红色. 那么 1′) 对这个新的“蓝–红”着色仍成立，但是

$$\mathrm{id}_{D_r \cap D_1}(x) = 1, \quad \mathrm{od}_{D_b \cap D_2}(x) = 0,$$

即 D 的每条经由 D_1 的红弧到达 x 的欧拉迹必沿着 D_2 的红弧从 x 继续前行.

一般来说，我们面临的是对任意 $v \in V(D)$ 定义 $P(v)$ 的问题，其中 $P(v)$ 由两个类构成，内关联于 v 和外关联于 v 的蓝半弧形成第一类，相应的红半弧构成第二类，并且 $P(v)$ 满足 1′). 令 $P(D) = \cup P(v)$. **问题是: D 何时有 $P(D)$- 相容的欧拉迹?**

这个问题由下面的定理回答，为此，还需要一些术语.

设 D 是欧拉有向图且对每个 $v \in V(D)$，$P(v)$ 是把 A_v^* 分成两个类的划分，

$$P(v) = \{P_1(v), P_2(v)\},$$

进而对 $i = 1, 2$，记

$$P_i(v) = P_{i,1}(v) \cup P_{i,2}(v), \quad P_{i,1}(v) \cap P_{i,2}(v) = \varnothing,$$

其中 $P_{i,1}(v)$ 恰含 $P_i(v)$ 的内关联于 v 的半弧 ($P_{i,2}$ 仅含外关联于 v 的半弧). 设 $P(D) = \bigcup\limits_{v \in V(D)} P(V)$ 且由 D 按下面的方式得到新的有向图 D_P: 每个 $v \in V(D)$ 用两个点 $v_{1,2}$ 和 $v_{2,1}$ 代替，并且 D_P 中的关联关系如下定义:

$$A^*_{v_{1,2}} = P_{1,1}(v) \cup P_{2,2}(v), \quad A^*_{v_{2,1}} = P_{1,2}(v) \cup P_{2,1}(v).$$

定理 6.17　设 D 为连通欧拉有向图且 $P(D)$ 如上定义，那么下面的叙述等价:

1) D 有 $P(D)$- 相容的欧拉迹.

2) D_P 有欧拉迹.

证明 若 D 有 $P(D)$- 相容欧拉迹 T，则由 $P(D)$ 的定义，如果 T 经由 $P_i(v)$ 的一条半弧到达任意点 $v \in V(D)$，那么这条半弧属于 $P_{i,1}(v)$，并且 T 一定经由 $P_{i+1,2}(v)$ 的一条半弧离开 v，其中当 $i=2$ 时，令 $i+1=1$. 因此，由 D_P 的关联关系的定义，T 定义了 D_P 的唯一的欧拉迹.

反之，若 D_P 有欧拉迹 T_P，则由 D_P 的定义，T_P 定义了 D 的唯一的欧拉迹 T. 根据此定义，对任意 $v \in V(D)$，在 $v_{1,2}$ 或 $v_{2,1}$ 定义 T_P 的一个转移的半弧属于 $P(v)$ 的不同类. 也就是说，T 是 $P(D)$- 相容的.

然而，推论 6.3 对有向图有类似的结果.

推论 6.18 设 D 为有偶数条弧的 k- 正则有向图，那么 D 可分解为两个弧不交的子有向图 D_1, D_2，使得对每个 $v \in V(D)$ 有 $d_{D_i}(v) = k\,(i=1,2)$. 特别地，若 $k=2$，则 D 是两个 1- 因子的弧不交的并.

证明 推论的第一部分是平凡的 —— 仅用到上面描述的 D 的弧的“蓝–红”着色. 至于第二部分，将每个点 v 分裂为两个 2- 价点 v^- 和 v^+，这样得到有向图 D_0，并且 $\mathrm{od}_{D_0}(v^-) = \mathrm{id}_{D_0}(v^+) = 0$. 根据这个定义，由于 D_0 的每个点或者是源，或者是汇，所以 D_0 是 2- 部图. 因此，D_0 的每个分支有偶数条边. 于是这些弧可被蓝红 2- 着色，使得 D_0 中没有点关联两条同色弧. 考虑 D 中的这个弧着色，在每个点 $v \in V(D)$，$\mathrm{id}_{G_b}(v) = \mathrm{od}_{G_b}(v) = \mathrm{id}_{G_r}(v) = \mathrm{od}_{G_r}(v) = 1$，即 G_b 和 G_r 均为 D 的 1- 因子.

注意：以上思想将在 6.1.2 小节中推广应用.

假如弧的定向在 $O^+(A_v^*)$ 是交替的，推论 6.6～ 推论 6.8 对有向图也有对应的结果. 我们仅叙述最一般的结果，将证明留作练习 (练习 6.10).

推论 6.19 设 D 为连通欧拉有向图且对每个 $v \in V(D)$，与 v 关联的半弧有指定序 $O^+(A_v^*)$，使得 $O^+(A_v^*)$ 的两个相继元素不都内关联于 v (或外关联于 v)，那么 D 有非交叉欧拉迹.

注 对混合图重新叙述前面的一些结果也许是有趣的研究课题. 基于到目前为止得到的结果，对有向图重新叙述图中的有关开迹、迹分解和路/圈分解的结果也应该不太困难. 这里我们不进行详细讨论，因为我们打算将注意力集中在图上.

6.1.2 双欧拉有向图中的反欧拉迹和图的双欧拉定向

定义 6.20 设 D 为只有偶点的连通有向图，并且 T_G 为 D 的底图 G 的一条欧拉迹. D 中对应于 T_G 的序列 T_D 称为**反有向欧拉迹**，简称为**反欧拉迹**，如果对 T_D 的每一节 a_i, v_{i+1}, a_{i+1} 都有 a_i 和 a_{i+1} 或者都内关联于 v_{i+1} 或者都外关联于 v_{i+1}. 若 D 有反欧拉迹，则称 D 为**反欧拉的**. 如果 D 是欧拉的且有欧拉迹，则称 D 为**双欧拉**有向图.

下面是定义 6.20 的直接推论.

推论 6.21 设 D 为双欧拉有向图，则对每个 $v \in V(D)$ 有 $\text{id}_D(v) = \text{od}_D(v) \equiv 0 \pmod 2$，因此，$|A(D)| \equiv 0 \pmod 2$.

注意到如果 D 仅为反欧拉的，那么推论 6.21 结论的第一部分一般不成立，而第二部分 $|A(D)| \equiv 0 \pmod 2$ 依然成立.

作为推论 6.18 的证明中 D_0 的构造的推广，对任意有向图 D 定义有向图 D_+^-：将每个 $v \in V(D)$ 分裂为 $v^-, v^+ \in V(D_+^-)$，并令 v^-, v^+ 分别与 $(A_v^*)^-$ 和 $(A_v^*)^+$ 的元素关联.

定理 6.22 设 D 为连通欧拉有向图，那么下面的叙述等价：

1) 对每个 $v \in V(D)$ 有 $d_D(v) \equiv 0 \pmod 4$ 且 D_+^- 连通.

2) D 是双欧拉的.

证明 若 $d_D(v) \equiv 0 \pmod 4$，则 $\text{id}_D(v) = \text{od}_D(v) \equiv 0 \pmod 2$. 因此，由 D_+^- 的定义可知，D_+^- 的底图 G_+^- 是欧拉的. 由假设 D_+^- 是连通的，故 G_+^- 也连通. 由 D_+^- 的定义可知，G_+^- 的一条欧拉迹对应于 D_+^- 的一条反欧拉迹及 D 的一条反欧拉迹. 于是 D 是连通欧拉有向，因而它有欧拉迹. 也就是说，它有欧拉迹，也有反欧拉迹，即 D 是双欧拉的.

反之，若 D 是双欧拉的，则由推论 6.21 知，对每个 $v \in V(D)$ 有 $d_D(v) \equiv 0 \pmod 4$. 由 D_+^- 的定义，D 的一条反欧拉迹对应于 D_+^- 的一条反欧拉迹，因此，D_+^- 是连通的. 定理证毕.

两个顶点的 2- 正则有向图表明，定理 6.22 中"D_+^- 是连通的"这一条件是必不可少的，事实上，定理 6.22 仅为下面结论的特殊情况.

定理 6.23 设 D 为连通欧拉有向图且对每个 $v \in V(D)$ 有 $d_D(v) \equiv 0 \pmod 4$，那么 D 有极大反欧拉有向图的唯一分解 S_{an} 且 $|S_{\text{an}}| = c(D_+^-)$.

证明 考虑 D_+^-，它的分支记为 $C_1, \cdots, C_k\ (k \geqslant 1)$. 对每一个 $i \in \{1, \cdots, k\}$，G_i 为 C_i 的底图. 由于 D 是欧拉的且对每个 $v \in V(D)$，$d_D(v) \equiv 0 \pmod 4$，故在 D_+^- 中，对每个 $v^+, v^- \in V(D_+^-)$ 有 $d(v^+) = d(v^-) \equiv 0 \pmod 2$. 因此，$G_i$ 是欧拉的，并且由 D_+^- 的定义，G_i 的一条欧拉迹对应于 C_i 的一条反欧拉迹. 于是若 $D_1, \cdots, D_k$ 分别对应于 $C_1, \cdots, C_k$ 的子有向图，则 $S_{\text{an}} = \{D_1, \cdots, D_k\}$ 是一个 D 的反欧拉子有向图的分解 (注意到对 $1 \leqslant i \leqslant k$，在 C_i 的反欧拉迹与 D_i 的反欧拉迹之间存在一一对应)，进而由 D_+^- 的定义及 $C_1, \cdots, C_k$ 是它的分支这一事实，S_{an} 是唯一确定的，并且对 $1 \leqslant i \leqslant k$，$D_i$ 是 D 的极大反欧拉子有向图. 因此，$|S_{\text{an}}| = c(D_+^-)$. 定理证毕.

注意到如果 D 是 2- 正则的，那么因为 D_+^- 的顶点是 2- 价的，D 的反欧拉子有向图必然是 D 的极大反欧拉子有向图.

怎样的 4- 正则图有双欧拉定向，即允许反欧拉迹的欧拉定向? 从算法的观点，我们给出的答案不是好的，但它与 4- 正则图和 3- 正则图有关，在相容性问题中起

着重要的作用 (注意: 上面的问题最初出现在 [BERM78b] 中).

定理 6.24 4- 正则图 G_4 有双欧拉定向当且仅当存在 3- 正则的哈密顿 2- 部图 G_3，它有哈密顿圈 H 满足 $G_4 \simeq G_3/L$，其中 $L = E(G_3) - E(H)$.

证明 若 G_4 有双欧拉定向，固定这样一个定向，称之为 D_4，如前所述，构造 2- 部有向图 D_{+}^{-}. D_4 的反欧拉迹保证 D_{+}^{-} 是连通的. 因此，对底图 G_0 的圈 H，$G_3 = G_0 \cup \{v^+v^- \mid v \in V(D_4)\}$ 是以 H 为哈密顿圈的 3- 正则图. 由 D_{+}^{-} 和 G_3 的构造，G_3 也是 2- 部图，并且 $G_4 \simeq G_3/L$，其中 $L = \{v^+v^- \mid v \in V(D_4)\} = E(G_3) - E(H)$.

反之，若 $G_4 \simeq G_3/L$ 且 $H = E(G_3) - E(L)$ 为 3- 正则图 G_3 的哈密顿圈，给 H 的边定向，使得 H 无长为 2 的路，即这样的有向图 D_0 仅有源和汇. 由于 D_0 是连通的，故分别由源和汇定义的 $V(D_0)$ 的两部与 $V(G_3)$ 的两部相一致. 这样因为 G_3 是 2- 部的，每个 $e \in L$ 连接一个源和一个汇. 因此，正如从 G_3 形成的 G_3/L 一样，通过等同 D_0 同一对顶点得到的 D_4 是 2- 正则的，并且 D_0 的一条反欧拉迹对应于 D_4 的一条反欧拉迹. 于是由假设及构造，G_4 为 D_4 的底图，故 G_4 有双欧拉定向. 定理证毕.

因此，G_3 是 2- 部图是 G_4 有双欧拉定向的一个必要性质. 然而，有这样的定向的 G_4 不一定是 2- 部的. 这一事实由下面的结果证实 (也见 [BERM79d]).

命题 6.25 若 G 是 2- 部图且对每个 $v \in V(G)$ 有 $d_G(v) \equiv 0 \pmod 4$，则 G 没有双欧拉定向.

证明 假设 G 的一个定向 D 有反欧拉迹 T_D，不妨设 T_D 从 v_1 沿着弧 (v, w) 开始，其中 $v_1 \in V_1, w \in V_2$ 且 $\{V_1, V_2\}$ 是 $V(G) = V(D)$ 的两部划分，那么 T_D 的下一弧具有形式 $(x, w)\,(x \in V_1)$. 接着 (x, w) 的下一条弧具有形式 $(x, y)\,(y \in V_2)\cdots\cdots$ 因此，D 中弧的弧尾总属于 V_1，弧首总属于 V_2，从而 D 不是 G 的欧拉定向. G 不可能有双欧拉定向.

另一方面，对每个圈是其一个块的连通欧拉图类，我们有下面更强的结果，尽管这是相当小的一类图，但它在本章的下面两节中将是至关重要的.

定理 6.26 设 G 是连通图且对每个 $v \in V(G)$ 有 $d_G(v) \equiv 0 \pmod 4$，G 的每个圈是它的块，那么 G 的每个欧拉定向是双欧拉定向.

证明 我们对 G 的块数 $\mathrm{bn}(G)$ 用归纳法. 注意到 $\mathrm{bn}(G) \geqslant 2$.

若 $\mathrm{bn}(G) = 2$，则由假设，G 只有一个恰关联两个环的点. 以两种可能的定向方式之一给它们任意定向，就给出 G 的一个欧拉定向，沿着一条环的定向通过该环，再逆着另一条环的定向行走定义了 D 的一条反欧拉迹. 因此，定理对 $\mathrm{bn}(G) = 2$ 成立.

当 $\mathrm{bn}(G) > 2$ 时，考虑 G 的一个端块 B_1 及它的唯一的点 v(由假设 G 无 2- 价点，故 G 的每个端块是环). 根据 v 的价，我们分成两种情况.

1) $d_G(v) = 4$，那么从 $G - B_1$ 压缩 $G - B_1$ 的 2- 价点 v 得到图 G_1 (图 6.5).

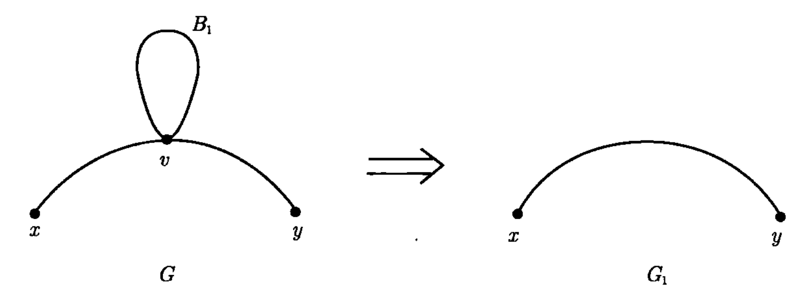


图 6.5 从 G 中删去环 B_1 并压缩 $G - B_1$ 的 2- 价点 v 得到 G_1，可能 $x = y$

G_1 满足定理的假设，并且有比 G 更少的块. 令 D 为 G 的任一欧拉定向，D_1 为由 D 导出的 G_1 的欧拉定向. 由归纳假设，D_1 是双欧拉的. 不失一般性，假设 $(x, v) \in A(D)$，则有 $(v, y) \in A(D)$ 且 $(x, y) \in A(D_1)$. 现考虑 D_1 的任意反欧拉迹 T_1，用 $(x, v), v, A(B_1)^-, v, (v, y)$ 代替弧 (x, y)，就可以把 T_1 扩展成 D 的反欧拉迹 T，其中 $A(B_1)^-$ 表示逆着 B_1 的定向通过 B_1(不失一般性，设 T_1 从 x 到 y 通过 (x, y). 注意到对任一反欧拉迹，相反的序列也是一条反欧拉迹).

2) $d_G(v) > 4$. 由于 1)，不失一般性，我们可以假设 G 中没有 4- 价点与 G 的环关联. 若考虑块–割点图 bc(G)，则 bc(G) 中没有端点的邻点为 bc(G) 的 2- 价点. 由于 bc(G) 是树，G 中存在割点 z，使得含 z 的所有块最多只有一个不是环. 不失一般性，设 $z = v$. 因为 $8 \leqslant d_G(v) \equiv 0 \pmod 4$，$v$ 与两个环关联，如 B_1 和 B_2. 现令

$$G_1 = G - (B_1 \cup B_2),$$

因为 $4 \leqslant d_G(v) - 4 = d_{G_1}(v)$，$G_1$ 满足定理的假设，如情形 1)，令 D 为 G 的一个欧拉定向，满足 $(x, v) \in A(D)$，G_1 的由 D 导出的定向 D_1 是欧拉的，由归纳假设，D_1 甚至是双欧拉的. 在 D_1 的任一条反欧拉迹 T_1 中用 $(x, v), v, A(B_1)^-, v, A(B_2)$ 代替 (x, v)，这样得到 D 的一条反欧拉迹 (像上面一样，$A(B_1)^-$ 表示逆着 B_1 的定向通过 B_1，而 $A(B_2)$ 表示顺着 B_2 的定向通过 B_2. 不失一般性，这里也可以假设 T_1 从 x 到 v 通过 (x, v)). 定理证毕.

命题 6.25 和定理 6.26 给出了 4- 正则图双欧拉定向问题的极端情形 (根本没有双欧拉定向的图和每个欧拉定向都是双欧拉的图). 命题 6.25 并未包含所有无双欧拉定向的 4- 正则图. 例如，对两个 4- 正则图 G_i 分别用一个点 v_i 细分其一条边 $e_i\,(i = 1, 2)$，然后合并这两个 2- 价点 v_1 和 v_2，这样得到的图记为 G，那么 G 是 4- 正则图并有割点 v，其中 v 为 v_1 和 v_2 合并后的新点. 可以看出，G 有双欧拉定向当且仅当 G_1 和 G_2 也有双欧拉定向. 事实上，可以证明下面的论断.

引理 6.27 连通的 4- 正则图 G 有双欧拉定向，当且仅当对 G 的每个块 B，

如果 B 同胚于一个 4- 正则图 B^*，则 B^* 有双欧拉定向.

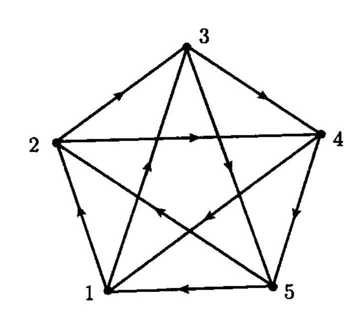
下面的引理可类似地进行证明.

引理 6.28　对连通的 4- 正则图 G，每个欧拉定向是双欧拉的当且仅当对 G 的每个块 B，若 B 同胚于一个 4- 正则图 B^*，则 B^* 的每个欧拉定向都是双欧拉的.

引理 6.27 和引理 6.28 的证明留作练习 (练习 6.11).

注　在前面两个引理的叙述中，G 可能包含不是块的圈，对这样的圈不存在同胚的 4- 正则图.

基于引理 6.27 和引理 6.28，如果想确定所有的有双欧拉定向的 4- 正则图，及/或所有满足每个欧拉定向都是双欧拉定向的 4- 正则图，只需要考虑 2- 连通图就够了. 上面那个没有双欧拉定向的例子是有割点的，但在 [BERM79d] 中给出了一个 2- 连通没有双欧拉定向的 4- 正则的图. 定理 6.26 没有包含所有的每个欧拉定向都是双欧拉定向的图，考察 K_5 的任一欧拉定向 D_5，则 D_5 有哈密顿圈 (事实上，后面将看到奇数个点的完全图的每个欧拉定向都是哈密顿的). 如果把这样的哈密顿圈画为外五边形，那么内部五角星仅有两种选择 (图 6.6). 这两种欧拉定向是同构的，点序列 $1,3,2,4,3,5,4,1,5,2,1$ 确定了相应于这两种定向的反欧拉变. 因此，K_5 在同构意义下有唯一的双欧拉定向. 如果事先给定了 K_5 的顶点标号，则 K_5 有若干欧拉定向，它们都是双欧拉的. 事实上，任意一个包含一条给定弧 (x,y) 的 4- 正则图的双欧定向的方法数均为偶数 [BERM79d，定理 6.2].



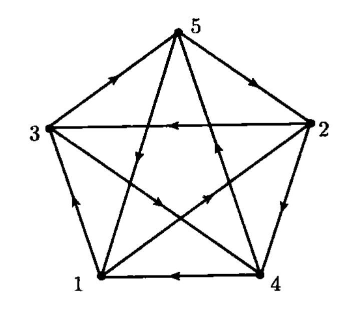


图 6.6　对 K_5 的外五边形给定一个循环定向，内部五角星的两种可能的定向给出 K_5 的同构的欧拉定向，同构由顶点标号指明

正如我们在推论 6.18 指出的，每个 2- 正则有向图能分解为两个 1- 因子. 一般地，存在不止一个这样的分解. 由此提出问题：*2- 正则有向图有唯一 1- 因子分解的充分必要条件是什么？* 这个问题的答案是下面命题的推论.

命题 6.29　设 G 是 2- 正则有向图，则 D 的 1- 因子与 D_+^- 的极大独立弧集之间存在一一对应.

证明　若 F 为 D 的 1- 因子，则对每个 $v \in V(D)$ 有 $\mathrm{od}_F(v) = \mathrm{id}_F(v) = 1$. 也

就是说，F 中与 v 关联的弧中有一条外关联于 v^+，另一条内关联于 v^- (若 F 的一个分支是环，则这两条弧相同). 因此，在 D_+^- 中 F 对应于一个独立弧集，这个弧集覆盖了 D_+^- 的所有顶点，即对应于 D_+^- 的一个极大独立弧集. 这个弧集由 D_+^- 的构造唯一确定.

反之，设 M 为 D_+^- 的一个极大独立弧集. 由构造，D_+^- 是 2- 部的，故对 $G_{D_+^-}$ 的每个圈 C 有 $|A(C)| \equiv 0 \pmod 2$. 进而，因为 D 是 2- 正则的，D_+^- 的顶点都是 2- 价的. 由此，M 覆盖 D_+^- 的所有顶点. 因此，对每个 $v \in V(D)$，M 中恰有一条弧外关联于 v^+，也恰有一条弧内关联于 v^-. 也就是说，M 对应于 D 的一个唯一确定的子图 F，满足 $\mathrm{od}_F(v) = \mathrm{id}_F(v) = 1$，即 F 为 D 的 1- 因子. 命题证毕.

对有 1- 因子 F 的 2- 正则有向图 D，$D - F$ 也是 D 的 1- 因子，记为 F'. 令 $M' = A(D_+^-) - M$，若 M 为 D 的极大独立弧集，则 M' 为 D_+^- 的极大独立弧集. 若 M 对应于 F，则 M' 对应于 F'. 这由 D_+^- 的定义可以得到. 若 D_+^- 至少有两个分支，其中之一为 C，则对面的 M 和 M' 有

$$M'' = (M \cap A(C)) \cup (M' \cap (D_+^- - C))$$

是 D_+^- 的不同于 M 和 M' 的极大独立弧集. 以上考虑和命题 6.29 给出了 1- 因子分解与双欧拉之间的关系.

推论 6.30 2- 正则有向图有唯一 1- 因子分解当且仅当它是双欧拉的.

注意：命题 6.29 仅是陈述及证明 [BERM78b，定理 2.2] 的不同方式，推论 6.30 在 [BERM79d] 的导引中作为断言出现，但也可以从 [BERM78b，定理 2.3 和定理 2.4] 中得到. 它们可以概述如下：

推论 6.31 设 D 是 2- 正则有向图，那么 D 的 1- 因子的个数等于 $2^{c(D_+^-)}$，D 的 1- 因子分解的个数等于 $2^{c(D_+^-)-1}$.

推论 6.31 容易从命题 6.29 的证明及其后的讨论得到. 证明留作练习.

论文 [BERM78b] 以这样的问题结尾：*有奇回路的 4- 价图能被定向为反欧拉图吗？* 这个问题有平凡的肯定的回答. 因为若 G 是有偶数条边的连通欧拉图，令 T 为 G 的任一欧拉迹，沿着由 T 导出的方向或交替地定向 G 的边，就得到的 G 的一个反欧拉定向. 显然，上述问题中“反欧拉定向”一词可以改为“双欧拉定向”. 但是另一方面，这一问题的答案是否定的. 考察下面的例子：取三个一样没有双欧拉定向的 4- 正则图 (如由命题 6.25，G 可选为 2- 部的). 在这三个图中，分别细分一条边，这样分别得到三个恰有一个 2- 价点 a, b 和 c 的图 G_a, G_b 和 G_c，所有其他点是 4- 价的. 因此，$G^+ = G_a \cup G_b \cup G_c \cup \{ab, bc, ca\}$ 是有一个三角形 (一个奇圈) 的 4- 价图，但由于 G_a 没有双欧拉定向，G^+ 不能有双欧拉定向 (见引理 6.27).

6.1.3 有向图中的 D_0- 偏好欧拉迹

我们用有向图中欧拉迹的另一种限制来结束本节 (见 [BERK78a]).

定义 6.32 设 D 是连通的欧拉有向图，D_0 是 D 的有向子图. D 的欧拉迹 T 称为 D_0- 偏好的当且仅当对每个 $v \in V(D)$，在经过 $D_1 := D - D_0$ 的外关联于 v 的弧之前，T 经过 D_0 的外关联于 v 的弧.

当然，每个连通的欧拉有向图可写成 $D = D_0 \cup D_1$，$A(D_0) \cap A(D_1) = \varnothing$. 只需取 $D_1 = D$，$V(D_0) = V(D)$，$A(D_0) = \varnothing$. 在这种情形下，D 的任一欧拉迹都是 D_0- 偏好的[①]. 定义 6.32 也指出，D_0- 偏好的欧拉迹 T 的存在会依赖于 T 的起点的选择.

我们证明两个 D_0- 偏好欧拉迹的存在性，这两个定理涉及依赖于 $D_1 := D - D_0$ 的结构 (见命题 3.24).

定理 6.33 设 D 是连通的欧拉有向图，对给定的 $v \in V(D)$，令 $D_0 \subset D$，使得 $D_1 = D - D_0$ 是 D 的以 v 为根的支撑入树，那么开始 (且结束) 于 v 的 D_0- 偏好欧拉迹存在. 反之，若 T 是 D 的开始 (且结束) 于 v 的 D_0 支持欧拉迹，并且在每个 $w \in V(D)\,(w \neq v)$，标出外关联于 w 的最后一条弧，那么由这些标记过的弧导出的子有向图 D_1 是以 v 为根的支撑入树 (由此，T 是 D 的 $(D - D_1)$- 偏好欧拉迹).

证明 令 $D_0 \subset D$，使得 $D_1 = D - D_0$ 是 D 的以.v 为根的支撑入树. 在 v 以任一弧 (v, x) 开始构造 T. 若 D_0 有外关联于 x 的弧，则取之；否则，选择外关联于 x 的 D_1 的弧. 继续下去，直至终止于某个 $y \in V(D)$，那么 $y = x$；否则，T 的内关联于 y 的弧多于外关联于 y 的弧，与 D 是欧拉图相矛盾. 假设 T 不包含 D 的所有弧，令 z 为一个与不在 T 中的弧相关联的点. 由于 D 是欧拉的且 T 是闭迹，故 $\mathrm{id}_{D-T}(z) = \mathrm{od}_{D-T}(z) \neq 0$，进而由 T 的构造，$z \neq v$. 由 D_1 的定义，存在连接 z 到 v 的路 $P(z, v) \subseteq D_1$. 记

$$P(z,v) = z, (z,u), u_1, \cdots, u_k, (u_k, v), v,$$

可能 $z = u_k$ 且 $u_1 = v$ (即 $P(z,v)$ 可能只含有一条弧). 由 T 的构造，(z, u_1) 不在 T 中，因此，(u_1, u_2) 也不在 T 中 (注意：仅当内关联于 u_1 的所有弧都含在 T 中，(u_1, u_2) 才可能含在 T 中). 特别地，(u_k, v) 不在 T 中，这与 $\mathrm{id}_T(v) = \mathrm{od}_T(v) = \mathrm{id}_D(v) = \mathrm{od}_D(v)$ 矛盾. 因此，T 包含 D 的所有弧. 由此及 T 的构造，T 是 D 的 D_0- 偏好欧拉迹.

下面假设 T 是 D 的开始于点 v 的欧拉迹. 对每个点 $w \neq v$，标记 T 的外关联于 w 的最后一条弧，并用 D_1 表示由这些标记了的弧所导出的子有向图. 由 D_1 的定义，对 $D_0 = D - D_1$，T 是 D 的 D_0- 偏好欧拉迹. 我们仅需证明 D_1 是以 v 为根的支撑入树.

---

① 这个观察包含在 [BERK78a] 中. 在那本书中，作者将定理 4.8 归于古德 (I.J.Good)，这个错误显然源于 [KNUT73a，P374]，后者显然来自于 [AARD51a]. [KÖNI36a] 仅在最近才译成英语，冠尼希一开始未曾用英语书写 …… 这些显然是遗憾的事.

在任何情形下，D_1 有下面的性质：

$$\mathrm{od}_{D_1}(w)=1 \text{ 对每个 } w\in V(D)-\{v\} \text{ 成立}, \quad \mathrm{od}_{D_1}(w)=0. \tag{$*$}$$

因此，只需证明 D_1 是连通的 (见定理 3.31). 假设并非如此，那么 D_1 中存在不含 v 的分支 B_1，由 (*)，对每个 $w\in V(B_1)$ 有 $\mathrm{od}_{B_1}(w)=\mathrm{od}_{D_1}(w)=1$. 由 D 的有限性，B_1 包含圈，从而 B_1 包含一个非平凡的强连通分支. 由引理 3.24 的 5)，B_1 甚至包含一个非平凡的强连通分支 C_1，使得 B_1 (因此，D_1) 没有外关联于 C_1 的弧. 若 r 是 C_1 在 T 上使得 $r,(r,s),s$ 为 T 的节的最后一个点，其中 $(r,s)\in A(D_1)$，那么由 C_1 的选择，$s\in V(C_1)$，由 r 的选择，T 在 s 点结束. 因为 T 为欧拉迹，故 $s=v$，这与 $B_1\subseteq D_1-\{v\}$ 的选择矛盾. 因此，D_1 连通蕴涵了 D_1 是以 v 为根的支撑入树. 定理证毕.

定理 6.33 在建立拜斯特定理时起了本质的作用，拜斯特定理给出了欧拉有向图中欧拉迹的计数公式 ([AARD51a]). 定理 6.33 证明的第一部分分别沿用了 [KAST67a，p76, 77]，[AARD51a，定理 5b] 的证明，第二部分摘录于 [BERK78a，定理 1] 的证明. 事实上，第二部分更具有一般性，并且比 [AARD51a，KAST67a] 中对应的 (基本上相同的) 证明长一点，但它使下一个定理的证明得以简化. 由于拜斯特定理的关系，我相信，给出那些文章中的证明梗概是恰当的.

有了 (*) 以后，只需证明 D_1 是无圈的. 假设 D 的边依照 T 的次序以 $1,2,\cdots,|A(D)|$ 标号. 若 $(r,s),(s,t)$ 是 D_1 的弧，则 (r,s) 的标号比 (s,t) 的标号小 ((s,t) 是 T 的外关联于 s 的最后一条弧，由此, 只能在通过了内关联于 s 的所有弧后才能通过 (s,t)，而 (r,s) 是其中之一). 因此，D_1 中不含任何圈，否则，在这样的圈中将存在弧 (r',s') 和 (s',t')，使得 (r',s') 的标号大于 (s',t').

利用 D_0 的选择，我们能够推广定理 6.33.

定理 6.34 设 D 是连通的欧拉有向图. 令 $D_1\subseteq D$，使得对每个 $v\in V(D_1)\subseteq V(D)$ 都有 $\mathrm{od}_{D_1}(v)\geqslant 1$，记 $D_0=D-D_1$. 那么下面的叙述 1) 和 2) 等价:

1) D 有 D_0- 偏好欧拉迹.

2) D_1 恰有一个 (非平凡) 强连通分支 C_1，使得 D_1 中没有外关联于 C_1 的弧.

3) 进一步，D 的每个 D_0- 偏好欧拉迹必定从 C_1 的某点开始，并且对 C_1 的任一点存在开始于该点的 D 的 D_0- 偏好欧拉迹.

证明 由假设及 D 的有限性，D_1 至少有一个圈，类似于定理 6.33 证明的第二部分 (见 (*) 之后的讨论)，D 的任一 D_0- 偏好欧拉迹 T 开始于 C_1 的某点，其中 C_1 是 D_1 的一个强连通分支，并且 D_1 中没有外关联于 C_1 的弧. 重复这个讨论，得到 D_1 恰有一个这样的强连通分支 C_1. 因此，我们不仅有 1) 蕴涵 2)，而且 3) 的第一部分成立.

反之，假设叙述 2) 成立. 令 v 是 C_1 上的任一点. 我们要证明 D 有开始于 v

的 D_0- 偏好欧拉迹 T. 为了利用定理 6.33 证明中构造 T 的第一部分，我们注意到，由 D_1 的结构，D_1 中存在以 v 为根的支撑入树 D'_1 (见命题 3.24 的 6)). 记

$$A(D) = K_1 \cup K_2 \cup K_3, \quad \text{对 } i \neq j,\ i,j \in \{1,2,3\} \text{ 有} K_i \cap K_j = \varnothing,$$

其中

$$K_1 = A(D'_1), \quad K_2 = A(D_1) - A(D'_1), \quad K_3 = A(D) - A(D_1),$$

并设

$$K_0 = K_2 \cup K_3.$$

显然，$\langle K_3 \rangle = D_0$. 记 $\langle K_0 \rangle = D'_0$.

当然，D'_1 可能不是 D 的支撑入树. 如果存在某点 $x \in V(D) - V(D'_1)$，那么 D 的所有关联于 x 的弧属于 $K_3 \subseteq K_0$，这是由于 $V(D'_1) = V(D_1)$. 重复地应用分裂引理，可用 2- 价点代替每个这样的点 x，抹平这些 2- 价点后，得到一个连通的欧拉有向图 D'，满足 $K_1 \cup K_2 \subseteq A(D')$ 且 $V(D'_1) = V(D')$，即 D'_1 是 D' 的以 v 为根的支撑入树. 若 $V(D) = V(D'_1)$，则定义 $D' := D$.

由定理 6.33，D' 有一个 $(D' - D'_1)$- 偏好欧拉迹 T'，它以自然的方式对应于 D 的 D'_0- 偏好欧拉迹. 然而，T 可能不是 D_0- 偏好的，但定理 6.33 的证明中实施的 T' 的构造给了我们很高的自由度，可以选择如何通过 $D' - K_1$ 的弧，即对每个点 $w \in V(D')$，若 T' 的构造已到达 w，则可任选 $a \in A(D') - K_1$，只要 a 外关联于 w 且当下一条弧被 T' 通过时，a 尚未被通过，即我们在 w 可以增加额外的限制：T' 在通过 K_1 的任何弧之前通过 $D' - D_1$ 的外关联于 w 的弧，然后再通过 K_2 中外关联于 w 的弧. 因此，如果 T' 如此构造，那么 T 是 D 的 D_0- 偏好欧拉迹. 定理证毕.

定理 6.34 仅仅稍微推广了 [BERK78a，定理 1]，其中 $V(D_1) = V(D)$ 是假设的一部分 (正如我们看到的，这是不必要的). 进一步，定理 6.34 的证明基本上沿用了伯克威兹 (Berkowitz) 的证明，不同之处仅在于这里的证明没有详述一些技术上的细节，因为可以利用定理 6.33 的部分证明及定理本身. 另一方面，比较定理 6.33 和定理 6.34 的证明，显然可以从定理 6.33 得到定理 6.34，也能从定理 6.34 得到定理 6.33.

为了保证 $(D - D_1)$- 偏好欧拉迹 T 的存在，连通欧拉有向图 D 的子有向图 D_1 具有的最一般的结构是什么呢？前面两个定理的证明表明，D_1 一定不含多于一个的非平凡强连通分支 C_1，满足 D_1 中没有外关联于 C_1 的弧. 但是即使 D_1 是连通的，这个条件也不是充分的，这可以从图 6.7 中的有向图 D^* 看出. 另一方面，若令 $D'_0 = (D_0 - \{(e,d)\}) \cup \{(d,e)\}$，那么 D^* 有开始于 a 或 b 的 D'_0- 偏好欧拉迹 T^*. 然而，在构造 T^* 时，我们不再能自由地选择 D'_0 的外关联于 d 的弧. 事实上，T^* 必须具有下面的形式：

$$T^* = \cdots c, (c,d), d, (d,e), e, (e,d), d, (d,c), \cdots.$$

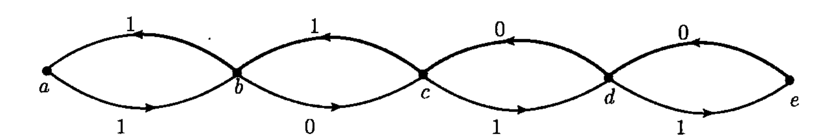


图 6.7 无 D_0- 偏好欧拉迹的欧拉有向图 D^*(对 $i=0,1$，D_i 的弧以 i 标记)

D^* 有 D_0'- 偏好，但没有 D_0- 偏好欧拉迹的原因是什么呢？定理 6.33 和定理 6.34 的证明揭示了答案. 在那些证明中，首先产生一条开始于 v 的闭迹 T，然后有点 z 及路 $P(z,v)\subseteq D_1$，$P(z,v)$ 中没有弧属于 T，由此得到一个矛盾. 进一步，在定理 6.34 的证明中，我们考察的是子有向图 D_1'，而不是整个 D_1. 如果倒过来又会怎么样呢？即给定连通欧拉有向图 D 和 $D_1\subset D$，能否找到 $D_1^+\subseteq D$, $D_1\subseteq D_1^+$，使得 D 有 $(D-D_1^+)$- 偏好欧拉迹 T^+，它导出一条 $(D-D_1)$- 偏好欧拉迹 T？把这一定理分别应用到上面的 D^* 和 D_1，$D_1'=D^*-D_0'$，可以看出，$(D_1')^+:=D_1'\cup\{(d,c)\}$ 满足定理 6.34 2) 的假设. D^* 的一条 $(D^*-(D_1')^+)$- 偏好欧拉迹 T^+(以 a 或 b 为根) 存在，并且必然导出上述 T^*. 至于上面的 $D_1\subset D^*$，$D_1^{++}:=D_1\cup\{(e,d),(d,c)\}$ 也推出存在 D^* 的一条 $(D^*-D_1^{++})$- 偏好欧拉迹. 然而，存在 $D_1^+:=D_1\cup\{(e,d)\}$，$D_1\subset D_1^+\subset d_1^{++}$，使得 D_1^+ 有两个非平凡强连通分支，并且 D_1^+ 中没有外关联于其中任意一个的弧. 由此，D^* 中不存在 $(D-D_1^+)$- 偏好欧拉迹 (见图 6.7 前的讨论). 因此，从 $D_0^+=D-D_1^+$ 到 D_0 的转移不影响任一条外关联于 d 的弧，故 D^* 中不存在 D_0- 偏好欧拉迹.

上述讨论及定理 6.34 导出下面的定理，它回答了我们最初的问题.

定理 6.35 设 D 是连通的欧拉有向图，D_1 是 D 的任意子有向图，那么下面的叙述两两等价：

1) D 有 $(D-D_1)$- 偏好欧拉迹.

2) 存在有向图 D_1^+, $D_1\subseteq D_1^+\subseteq D$，使得对每个 $v\in V(D)$,

a) $\mathrm{od}_{D_1^+}(v)=\mathrm{od}_{D_1}(v)$ 当且仅当 $\mathrm{od}_{D_1}(v)\neq 0$.

b) 否则，$\mathrm{od}_{D_1^+}(v)=1$ 且 D_1^+ 恰有一个非平凡的强连通分支 C_1，满足 D_1^+ 中没有外关联于 C_1 的弧.

3) 存在有向图 D_1^+, $D_1\subseteq D_1^+\subseteq D$，使得

a) D 有 $(D-D_1^+)$- 偏好欧拉迹.

b) 对每个 D_1', $D_1\subseteq D_1'\subseteq D_1^+$，若 $(x,y)\in A(D_1'-D_1)$，则 $\mathrm{od}_{D_1}(x)=0$.

4) D_1 包含支撑入森林 D_1^-，使得

a) 对某个 $v_0\in V(D_1)$ 及每个 $x\in V(D_1)-\{v_0\}$，$\mathrm{od}_{D_1^-}(x)=0$ 当且仅当 $\mathrm{od}_{D_1}(x)=0$ 且 $\mathrm{od}_{D_1^-}(v_0)=0$.

b) D 有以 v_0 为根的支撑入树 B 且 $D_1^-\subseteq B$.

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 令 T 是开始于 w 的 $(D-D_1)$- 偏好欧拉迹. 若对每个 $v\in$

$V(D)$，$\mathrm{od}_{D_1}(v) \geqslant 1$，则选择 $D_1^+ = D_1$；否则，标记 T 的外关联于 v 的最后一条弧，并且令 D_1^+ 是由 D_1 加上标记弧构成的. 在任何情况下，$D_1 \subseteq D_1^+$ 且 D_1^+ 满足 2)a),b) 的次条件. 进一步，由于 $A(D_1^+) - A(D_1)$ 的元素的选择，T 是 $(D - D_1^+)$- 偏好欧拉迹. 由定理 6.34，D_1^+ 恰有一个非平凡的强连通分支 C_1，满足 D_1^+ 没有外关联于 C_1 的弧.

2) $\Rightarrow$ 3) 取 D_1^+ 如 2)a),b) 所定义. 由定理 6.34，这个 D_1^+ 满足 3)a). 考虑满足 $D_1 \subseteq D_1' \subseteq D_1^+$ 的任意 D_1'，假设 $A(D_1' - D_1) \neq \varnothing$，令 $(x,y) \in A(D_1' - D_1)$. 由 2)a),b) 中 D_1^+ 的定义，$D_1^+ - D_1$ 的弧必然外关联于使 $\mathrm{od}_{D_1}(z) = 0$ 的点 z. 因此，$(x,y) \in A(D_1' - D_1)$ 蕴涵 $\mathrm{od}_{D_1}(z) = 0$，这样 3)b) 也成立.

3) $\Rightarrow$ 4) 从 3) 中描述的 D_1^+ 开始，考虑 D 的一条 $(D - D_1^+)$- 偏好欧拉迹 T^+. 如果存在不同于 T^+ 的起点 v_0 的 $w \in V(D)$，使得 T^+ 的外关联于 w 的最后一条弧不在 D_1^+ 中，那么标记这条弧. 在此情况下，外关联于 w 的弧均不在 D_1^+ 中. 定义

$$D_1^{++} = D_1^+, \quad \text{如果没有这样的 } w \text{ 存在;}$$

否则，

$$D_1^{++} = \langle A(D_1^+) \cup \{a \in A_w^+ \mid \mathrm{od}_{D_1^+}(w) \text{ 且 } a \text{ 被标记}\}\rangle.$$

在任何情况下，由 D_1^{++} 的定义，T^+ 甚至是 D 的 $(D - D_1^{++})$- 偏好欧拉迹，并且 D_1^{++} 也满足 3)b). 进一步，$V(D_1^{++}) = V(D)$.

对每个 $v \neq v_0$，标记 T^+ 的外关联于 v 的最后一条弧，这样就产生了一个 D 的以 v_0 为根的支撑入树 B (见定理 6.33)，并且由 D_1^{++} 的定义，$B \subseteq D_1^{++}$. 定义 D_1^-：$V(D_1^-) = V(D_1)$，$A(D_1^-) = A(B) \cap A(D_1)$，则 D_1^- 是 D_1 的支撑入森林. 令 (x,y) 是 B 的不在 D_1^- 中的任一弧，那么 $x \neq v_0$. 若 $(x,y) \notin A(D_1^+)$，那么从 D_1^{++} 的定义及 $D_1^{++} \supseteq D_1$ 知，$\mathrm{od}_{D_1^+}(x) = 0 = \mathrm{od}_{D_1}(x)$. 若 $(x,y) \in A(D_1^+)$，则由 D_1^- 的定义，$(x,y) \notin A(D_1)$. 由 3)b)，令 $D_1' = D_1^+$，则 $\mathrm{od}_{D_1}(x) = 0$. 综上所述，D_1^- 是 D_1 的支撑入森林，对某个 $v_0 \in V(D_1^-)$ (事实上是 B 的根)，若 $x \neq v_0$ 满足 $\mathrm{od}_{D_1^-}(x) = 0$，则 $\mathrm{od}_{D_1}(x) = 0$(因为如果 x 不是 B 的根，故对某个 y 有 $(x,y) \in A(B - A(D_1^-))$). 由于 $\mathrm{od}_{D_1}(x) = 0$ 蕴涵着 $\mathrm{od}_{D_1^-}(x) = 0$ 且 $\mathrm{od}_{D_1^-}(v_0) = \mathrm{od}_B(v_0) = 0$，由 $D_1^- \subseteq B$，$V(B) = V(D)$ 得 3) $\Rightarrow$ 4).

4)$\Rightarrow$ 1) 令 $D_1^- \subseteq D_1$ 如 4)a) 中所述，B 是 D 的以 v_0 为根的支撑入树且 $D_1^- \subseteq B$. 由定理 6.33 得到 D 的开始于 v_0 的欧拉迹 T，并且使得对每个 $v \neq v_0$，T 的外关联于 v 的最后一条弧属于 B. 由于对每个 $v \in V(D)$，可以自由选择 T 中 $A_v^+ - A(B)$ 的弧的次序 (我们曾在定理 6.34 的证明中使用过)，我们能这样构造 T: $A_v^+ \cap (D - D_1)$ 的弧在 T 中出现得比所有 $A_v^+ \cap D_1$ 的弧都早. 即使当 $(x,y) \in B$ 不属于 D_1 时，这也是成立的，因为由 4)a)，在这个情形下有 $\mathrm{od}_{D_1^-}(x) = \mathrm{od}_{D_1}(x) = 0$，

即 $A_x^+ \cap A(D_1) = \varnothing$，$A_x^+ \subseteq (D - D_1)$. 在 v_0 的情形，若 $A_{v_0}^+ \cap A(D_1) \neq \varnothing$，则继续构造 T：由 $A_{v_0}^+ \cap A(D - D_1)$ 的一条弧开始，每次到达 v_0 时，都沿着 $A_{v_0}^+ \cap A(D - D_1)$ 的一条未转移过的弧前行，只要这样的弧存在. 因此，T 是 D 的一条 $(D - D_1)$- 偏好欧拉迹. 故 4) $\Rightarrow$ 1). 定理证毕.

注意：对图 6.7 的有向图 D^* 及它的子有向图 D_1，$D_1' = D^* - D_0'$，叙述 4)a) 对 D_1 和 D_1' 均成立，而叙述 4)b) 仅对 D_1' 成立. 具体验证留作练习 (见练习 6.12).

当然，定义 6.32 能够被推广到图和混合图上去. 例如，在图的情形下，我们面对这样的问题："G 是否有欧拉定向，使得对 $v \in V(G) = V(D)$，G 的一个支撑树对应于 D 的一个以 v 为根的支撑入树？"我未发现任何这方面的工作. 然而，至少我们可以说，这个问题的答案能在多项式时间内给出，选择支撑树 $B \subset G$ 和任一点 v 作为根，定向 B，使 B 成为以 v 为根的入树 D_B. 用定理 4.11 确定 G 的一个欧拉定向，使得 $D_B \subset D_G$，就取唯一的混合图 H，其底图为 G，弧为 $A(D_B)$ 的元素. 事实上，这正是 [FORD62a，定理 7.1，p.60] 中给出的定理 4.11 的证明，该证明告诉我们 D_G 的存在性能在多项式时间内确定. 对每个 $v \in V(B) = V(G)$ 重复这个过程，上面的问题有多项式时间解①.

另一个有趣的问题 (尽管与前面的问题无关) 如下：设 G 为连通欧拉图，给定有序集 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\} \subseteq E(G)$，是否存在下面形式的欧拉迹 T：

$$T = \cdots, e_1, \cdots, e_2, \cdots, e_3, \cdots, e_1, \cdots, e_1, \cdots, e_1?\ ②$$

若 $\lambda(G) \geqslant m - 1$，则这个问题有一个肯定的答案. 若 $\lambda(G) \geqslant 2m$，甚至能描述这 m 条边被 T 转移的方向. 这些及更一般结论见 [CAIM89a]，它们用 [JACK88d，定理 1] 得到.

6.2 两两相容欧拉迹

正如我们在推论 6.15 中看到的那样，若 G 是任意没有 2- 价点的连通欧拉图，并且 X 为 G 的转移系统，则 G 中存在与 X- 相容的欧拉迹 T. 特别地，若 $X = X_{T'}$ 是由 G 的欧拉迹 T' 导出的转移系统，则这是正确的. 于是有下面的问题："**连通欧拉图 G 中两两相容的欧拉迹的最大个数是什么？**"这个问题首先由希尔顿 (A. J. W. Hilton) 和杰克逊 (B. Jackson) 提出，并且后者证明了若 $\delta(G) = 2k > 2$，则至少存在 $\max\{2, k-1\}$ 个两两相容的欧拉迹 [JACK87b]. 在同一篇文章中，杰克逊还提出了以下猜想，它是本节的结果及其研究的出发点：

① 这是作者 1987 年夏访问中国时，北京的蔡茂诚教授指出的.

② 这个问题是同一次访问中，安徽合肥市的李乔教授提出的. 最近，撒比达斯 (G.Sabidussi) 问了相同的问题.

猜想 6.36 若 G 为连通欧拉图且 $\delta(G)=2k>2$，则 G 至少含有 $2k-2$ 个两两相容的欧拉迹.

[FLEI86a]中证明了对每个块均为圈的欧拉图 G，这个猜想成立. 这样的图表明猜想 6.36 中的界 $2k-2$ 一般来说是最好可能的：若边 e 是关联于割点 v 的边，其中 $d(v)=2k$，并且 f 是仅有的另一条关联于 v 且与 e 在同一块中的边，则 $\{e(v),f(v)\}$ 是分离转移，不能含在 X_T 中，其中 T 是 G 的任意一条欧拉迹. 因此，在这种情形下，要构造与 v 关联的其他半边的转移，$e(v)$ 至多有 $2k-2$ 种可能选择. 当然，有的图中是含有 $2k-1$ 个两两相容的欧拉迹的. 当 $k=2$ 时如图 6.8 所示.

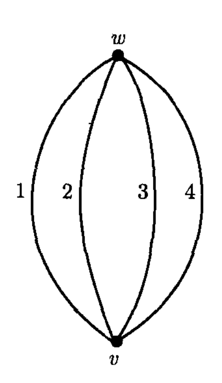


图 6.8 $\delta(G)=4$ 的图 G，G 有三个两两相容的欧拉迹，$T_1=v,1,w,2,v,3,w,4,v$，$T_2=v,1,w,3,v,4,w,2,v$，$T_3=v,1,w,4,v,2,w,3,v$

事实上，我们会猜想，若增强猜想 6.36 的假设条件，设 G 是 2- 连通的，则 G 中甚至存在 $2k-1$ 个两两相容的欧拉迹，图 6.8 指出这一方向. 在 $G=K_{2k+1}$ 的情形下，这一猜想已被科特齐格 [KOTZ79a] 所阐述. 然而，通过把四边形 C_4 的边都加倍而得到的 4- 正则图否定了这种改进猜想 6.36 的可能性. 不过，如果令连通度为 $\delta(G)$ 的函数，则增大两两相容的欧拉迹的最大个数似乎是可行的. 实际上，杰克逊给出了那些有三个两两相容欧拉迹的 4- 正则图的刻画 [JACK88a，JACK88b]，从而解决了 [JACK88a，猜想 1.1] 一种的特殊情形，这个猜想与上面提到的方向相同，鲍奇特 (A.Bouchet) 给出了找出三个这样的欧拉迹的多项式算法 [BOUC88b]. 注意到，这些文章依赖于几年前鲍奇特引进的称为迷向系的研究 (见 [BOUC87a]).

考虑 G 是由一个点 v 及 $m\geqslant 2$ 条环 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 构成的图. 尽管这个图在许多方面相当平凡，但在这个“平凡”情形下，解决猜想 6.36 也是相当困难的.

为简单起见，我们用 $G'=S(G)$ 取代 G，这样就不必考虑半边，并且下面的讨论将更简化. 然而，相容性的概念必须限制到唯一的价超过 2 的点 v 上. G' 中，我们约定边 e_i' 和 e_i'' 对应于 G 中的边 e_i $(i=1,2,\cdots,m)$. 同时考虑 G' 的线图 $L(G')$. $L(G')$ 同构于 K_d，$d=d(v)$. 当 $m=3$ 时如图 6.9 所示.

无论 G' 的欧拉迹 T 是什么形状，没有转移 $\{e_i'(v),e_i''(v)\}$ 能定义 T 的节 e_i',v,e_i'' $(i=1,2,\cdots,m)$，因为每个这样的转移都分离 G'. 这些为“不可能”转移；在 $L(G')$ 中，它们对应于 1- 因子 $L=\{e_i'e_i''\mid i=1,2,\cdots,m\}$. G' 中 v 点的任意其他转移对应于 G' 的某欧拉迹的一节. $L(G')$ 中除了“不可能”转移外，任一转移对应于一条不属于 L 的边. 甚至可以说

G' 的任一欧拉迹对应于 $L(G')$ 的一个满足 $E(H) \supset L$ 的哈密顿圈 H，反之亦真. (*)

因为由下面的讨论，G' 的欧拉迹 (写成边序列) 一定具有形式

$$T = e_{i_1}^{\delta_1}, e_{i_1}^{\delta_1+1}, e_{i_2}^{\delta_2}, e_{i_2}^{\delta_2+1}, \cdots, e_{i_j}^{\delta_j}, e_{i_j}^{\delta_j+1}, \cdots, e_{i_m}^{\delta_m}, e_{i_m}^{\delta_m+1},$$

这里假设 T 开始于 v 且 $\{e_{ij}^{\delta_j}, e_{ij}^{\delta_j+1}\} = \{e'_{ij}, e''_{ij}\}\,(j = 1, 2, \cdots, m), \{i_1, i_2, \cdots, i_m\} = \{1, 2, \cdots, m\}$. 这个序列看成 $L(G')$ 的点序列，给出 $L(G')$ 的一个哈密顿圈 H，满足 $L \subset E(H)$. 由于同样的原因，$L(G')$ 的满足 $L \subset E(H)$ 的哈密顿圈 H 定义了 G' 的一条欧拉迹.

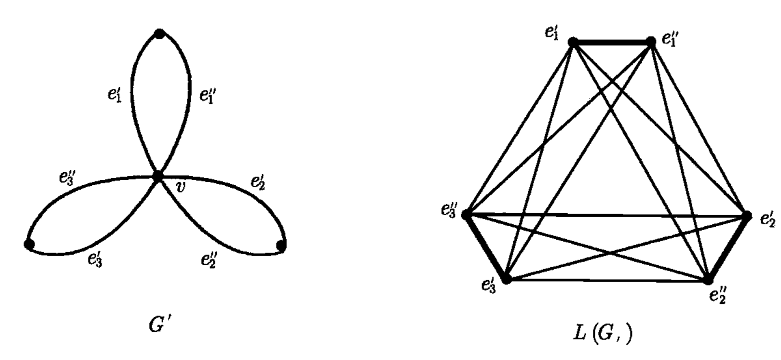


图 6.9 欧拉图 G' 及其线图 $L(G')$. G' 的"不可能"转移 $\{e'_i(v), e''_i(v)\}\ (i = 1, 2, 3)$，定义了 $L(G') \simeq K_6$ 的一个 1- 因子 $L = \{e'_1e''_1, e'_2e''_2, e'_3e''_3\}$

若 T_1 和 T_2 是 G' 的两个相容的欧拉迹，则 $L(G')$ 的相应的哈密顿圈 H_1 和 H_2 必然满足

$$E(H_1) \cap E(H_2) = L\ . \qquad (**)$$

这来源于前面的讨论，$X_{T_1} \cap X_(T_2) = \varnothing$ 的事实 (由相容性的定义).

若 H 是 $L(G')$ 中对应于 G' 的欧拉迹的哈密顿圈，则 (*) 意味着 $E(H) - L$ 是 $L(G')$ 的 1- 因子. 考虑到 (**)，可以得到下面的定理，它表明猜想 6.36 在 G 由一个点及 $m \geqslant 2$ 条环构成的情形下成立 [FLEI86a].

定理 6.37 设 $n = 2m > 2$ 是正的偶整数，L 为完全图 K_n 的一个 1- 因子，那么 K_n 有 1- 因子分解 $\mathcal{L} = \{L_1, \cdots, L_{n-1}\}$ 满足 $L = L_1$，并且对 $i = 2, \cdots, n-1$，$L \cup L_i$ 为 K_n 的哈密顿圈.

证明 为了得到定理所述的 1- 因子分解，考虑由 K_n 通过收缩 1- 因子 $L = \{e_1, \cdots, e_m\} \subset K_n$ 得到的 K_m. 记 $e_i = e'_ie''_i\,(i = 1, \cdots, m)$，则 $V(K_n) = \{e'_i, e''_i \mid i = 1, \cdots, m\}$. 为简单起见，记 $V(K_m) = \{e_1, \cdots, e_m\}$ (注意到这个记号与定理 6.37 前的讨论相一致).

设 $e_i = e_{i_1}e_{i_2}$ 是 K_m 的一条固定边. 由上面的记号，在 K_n 中有 $e_{i_1} = e'_{i_1}e''_{i_1}, e_{i_2} = e'_{i_2}e''_{i_2}$，并且 $e_{i_1}, e_{i_2} \in L$. 于是 e 对应于 K_n 中 4 条边的集合 $H_e = \{e'_{i_1}e'_{i_2}, e''_{i_1}e''_{i_2}, e'_{i_1}e''_{i_2}, e''_{i_1}e'_{i_2}\}$ (图 6.10). 这种方式定义了 K_m 的边 e 和 K_n 的子集 H_e 之间的双射，其中当 $e \neq f$ 时有 $H_e \cap H_f = \varnothing$. 根据 m 的奇偶性，我们分成两种情形.

e e_{i_1} e_{i_2} K_m $\longleftrightarrow$ e'_{i_1} e'_{i_2} $e_{i_1} \in L$ $e_{i_2} \in L$ e''_{i_1} e''_{i_2} K_n

图 6.10 $e \in E(K_m)$ 对应于 $H_e \subset E(K_n)$

1) $m \equiv 1 \pmod 2$. 此时 K_m 有哈密顿圈 $H_1, \cdots, H_{\frac{m-1}{2}}$ 的分解 $\mathcal{H} = \left\{H_r \mid r = 1, \cdots, \frac{m-1}{2}\right\}$ (见定理 3.50). 考虑任意固定的 $H \in \mathcal{H}$.

双射 $e \leftrightarrow H_e$ 使我们能够如下描述 5- 正则子图 $P_H^* = \left\langle \bigcup_{e \in E(H)} H_e \cup L \right\rangle \subset K_n$ $\left(\text{其中} \bigcup_{e \in E(H)} H_e \text{ 是以上的双射到 } E(H) \text{ 的扩张}\right)$ (图 6.11):

L 的元素为 m- 侧棱柱的边. 在 m- 侧棱柱上加侧面对角线构成 P_H^*. 在 P_H^* 中用如下记号: $\{f'_j \mid j = 1, \cdots, m\} = \{e'_i \mid i = 1, \cdots, m\}$ 是上底边界的点集，$\{f''_j \mid j = 1, \cdots, m\} = \{e''_i \mid i = 1, \cdots, m\}$ 是下底对应的点集，$L = \{f'_jf''_j \mid j = 1, \cdots, m\}$.

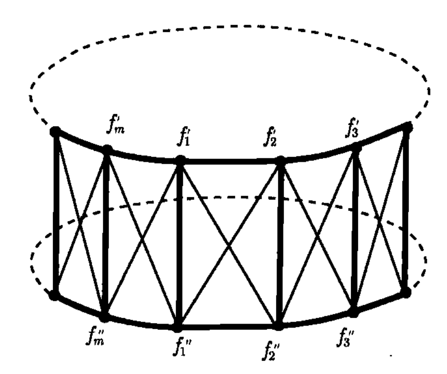


图 6.11 由 m- 侧棱柱及侧面对角线定义的 5- 正则图 P_H^*

我们想证明 P_H^* 有一个满足对 $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 4$, $C_i \cap C_j = L$ 的 4 个哈密顿圈 C_1, C_2, C_3, C_4 的构成圈覆盖. 为此，先将 $E(P_H^*) - L$ 分成 4 类,

$$M_1 = \{f'_jf'_{j+1} \mid j = 1, \cdots, m\},$$
$$M_2 = \{f''_jf''_{j+1} \mid j = 1, \cdots, m\},$$

$$M_3 = \{f_j' f_{j+1}'' \mid j = 1, \cdots, m\},$$
$$M_4 = \{f_j'' f_{j+1}' \mid j = 1, \cdots, m\}.$$

下标取模 m. 然后对 $i = 1, 2$，定义 M_i 的划分，

$$M_i = M_{i,0} \cup M_{i,1} ,$$

其中

$$M_{i,k} = \{f_j^{(i)} f_{j+1}^{(i)} \mid j \in \{1, \cdots, m\}, \quad j \equiv k \pmod 2\}, k = 0, 1,$$

$f_j^{(1)} = f_j'$ 且 $f_j^{(2)} = f_j'$ (即 $M_{1,0}$ 包含 $f_2'f_3', f_4'f_5', \cdots, f_{m-1}'f_m'$，$M_{1,1}$ 包含 $f_1'f_2', f_3'f_4', \cdots, f_m'f_1', \cdots$). 现在定义

$$C_1' = (M_{1,1} - \{f_m' f_1'\}) \cup M_{2,0} \cup \{f_m' f_1''\},$$
$$C_2' = (M_{2,1} - \{f_m'' f_1''\}) \cup (M_{1,0} - \{f_{m-1}' f_m'\}) \cup \{f_{m-1}' f_m'', f_m' f_1'\},$$
$$C_3' = (M_3 - \{f_{m-1}' f_m'', f_m' f_1''\}) \cup \{f_{m-1}' f_m', f_m'' f_1''\},$$
$$C_4{}' = M_4.$$

在任何情形下，对 $i = 1, 2, 3, 4$，由 M_i 及 C_i' 的定义，$\{C_1', C_2', C_3', C_4',\}$ 为 $E(P_H^*) - L$ 的一个 1- 因子分解. 以下说明对 $i = 1, 2, 3, 4$，$C_i - C_i' \cup L$ 为 P_H^* 的哈密顿圈，注意到 C_i 是 P_H^* 的 2- 因子且对 $i = 1, 2$，由于 $m \equiv 1 \pmod 2$. C_i 为 P_H^* 的分支数不大于 1，而对 $i = 3, 4$，C_i 是独立于 $m \equiv 1 \pmod 2$ 的圈. 因此，对于 $i = 1, 2, 3, 4$，C_i 为哈密顿圈. 这 4 个哈密顿圈描述在图 6.12 中.

由于上面的双射 $e \leftrightarrow H_e$ 满足对 $e \neq f$ 有 $H_e \cap H_f = \varnothing$，又由于 $\mathcal{H}$ 是 K_m 的哈密顿圈分解，因此，对应于 H，$H^* \in \mathcal{H}$ 的哈密顿圈 C_i, C_j^* $(1 \leqslant i, j \leqslant 4)$ 也满足 $C_i \cap C_j^* = L$. 于是若对任意 $H \in \mathcal{H}$ 及 $i = 1, 2, 3, 4$ 重新定义 $C_i'(H) := C_i'$，则对

$$\mathcal{L}' = \{C_i'(H) \mid i = 1, 2, 3, 4; H \in \mathcal{H}\}$$

有

$$|\mathcal{L}'| = 4 \cdot |\mathcal{H}| = 4 \cdot \frac{m-1}{2} = 2m - 2 = n - 2,$$

因此，$\mathcal{L} = \mathcal{L}' \cup \{L\}$ 是 K_n 的一个满足要求的 1- 因子分解. 这就完成了情形 $m \equiv 1 \pmod 2$ 的证明.

2) $m \equiv 0 \pmod 2$. 注意到 K_4 的唯一的一个 1- 因子满足定理，故可以假设 $m \geqslant 4$.

由定理 3.49，K_m 有一个 1- 因子分解 $\mathcal{L}^* = \{L_1, \cdots, L_{m-1}\}$，使得对 $j = i+1, i+2, 1 \leqslant i \leqslant m-1$，$L_i \cup L_j$ 是 K_m 的哈密顿圈 (这里令 $L_m = L_1, L_{m+1} = L_2$). 令

$$\mathcal{H}^* = \left\{ H_k := L_{2k} \cup L_{2k+1} \middle| 2 \leqslant k \leqslant \frac{m-2}{2},\ L_{2k}, L_{2k+1} \in \mathcal{L}^* \right\}.$$

如情形 $m \equiv 1 \pmod 2$，对固定的 $H \in \mathcal{H}^*$，考虑相应的 5- 正则子图 $P_H^* = \left\langle \bigcup_{e\in E(H)} H_e \cup L \right\rangle \subset K_n$，设 $M_i\ (i=1,2,3,4)$ 及划分 $M_i = M_{j,0} \cup M_{j,1}\ (j=1,2)$ 如上定义.

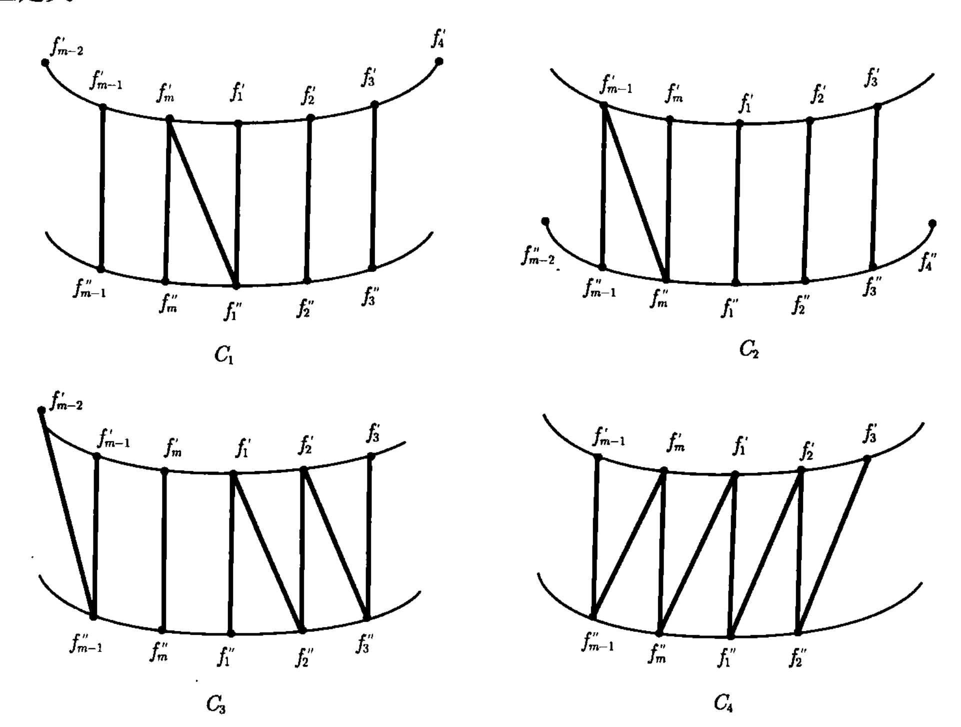


图 6.12 覆盖 P_H^* 且满足对 $i \neq j, 1 \leqslant i,j \leqslant 4$ 有 $C_i \cap C_j = L$ 的哈密顿圈 C_1, C_2, C_3, C_4

因为 m 是偶数，$C_i'\ (i=1,2,3,4)$ 有更简单的定义，即

$$\begin{aligned} C_1' &= M_{1,1} \cup M_{2,0}, \\ C_2' &= M_{1,0} \cup M_{2,1}, \\ C_3' &= M_3, \\ C_4' &= M_4. \end{aligned}$$

由 M_i 及 $C_i'\ (i=1,2,3,4)$ 的定义可得 $\{C_1', C_2', C_3', C_4'\}$ 为 $P_H^* - L$ 的 1- 因子分解. 通过比上述论述更简单的讨论，可以证明 $C_i = C_i' \cup L$ 是 P_H^* 的哈密顿圈：对 $i=1,2$，由于 m 为偶数，图 6.12 中的上边、L- 边、底边给出一个哈密顿圈 (与图 6.12 比较)，而对 $i=3,4$，不管 m 的奇偶性，C_i 总为哈密顿圈 (与情形 $m \equiv 1 \pmod 2$ 的 C_4 的构造作比较).

由上述构造，我们再次得到 K_n 的一个由两两不交的 1- 因子 $C_i'(H)$ 构成的集

合 L' ($C_i'(H)$ 的定义，如情形 $m \equiv 1 \pmod 2$)，

$$\mathcal{L}' = \{C_i'(H) \mid i = 1,2,3,4,\ H \in \mathcal{H}^*\}\ ,$$

但此时

$$|\mathcal{L}'| = 4 \cdot |\mathcal{H}^*| = 4 \cdot \frac{m-4}{2} = n - 8.$$

为了得到 K_n 的满足要求的 1- 因子分解 $\mathcal{L}$，剩下只要证明 K_n 的满足 $L \subset E(G^*)$ 的对应于 $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \subset E(K_m)$ 的 7- 正则子图 G^* 有 1- 因子分解 $\mathcal{L}'' = \{L_1, L_1^*, \cdots, L_6^*\}$ 使得对 $j = 1,2,\cdots,6$，$L_j^* \cup L$ 是 K_n 的哈密顿圈，从而 $\mathcal{L} = \mathcal{L}'\mathcal{L}''$ 将是所需的 K_n 的 1- 因子分解. 这可以由双射 $e \leftrightarrow H_e$(当 $e \neq f$ 时，有 $H_e \cap H_f = \varnothing$) 及事实 $\mathcal{H}^* \cup \{L_1 \cup L_2 \cup L_3\}$ 是 K_m 的分解得到. 这个双射在情形 $m \equiv 1 \pmod 2$ 曾用到过且 $|L| = n - 8 + 7 = 1$.

设 H 是 K_m 的由 L_1 和 L_2 导出的哈密顿圈，并考虑 K_n 的如前所述的 5- 正则子图 $P_H^* \supset L$ (图 6.11). 那么 G^* 可以从 P_H^* 通过对每条边 $e = e_ie_j \in L_3$ 添加 $H_e = \{e_i'e_j', e_i''e_j'', e_i'e_j'', e_i''e_j',\}$ 的元素得到的. 不失一般性, 假设 $e_1e_2 \in L_1$, 将 $G^* - L$ 的边分类如下：

对 $i = 1,2,3$，若 $e_re_s \in L_i$，则

$$e_r'e_s' \in L_i', \quad e_r''e_s'' \in L_i'', \quad e_r'e_s'', e_r''e_s' \in N_i\ .$$

由定义，$\{L_i', L_i'', N_i \mid i = 1,2,3\}$ 是 $E(G^*) - L$ 的划分. 这个划分是构造所需 1- 因子 $L_j^*\ (1 \leqslant j \leqslant 6)$ 的基础. 分成两种情形.

a) $m \equiv 0 \pmod 4$. 考虑 K_m 的由 L_2 和 L_3 导出的哈密顿圈 H' 及相应的 K_n 的满足 $L \subset E(P_{H'}^*)$ 的 5- 正则子图 D_H^*. 再次将 $P_{H'}^*$ 看成由 m- 侧棱柱在侧面添加对角线得到的图，这里上 (下) 底的边界边恰为 $L_2' \cup L_3'$ ($L_2'' \cup L_3''$) 的边，棱柱的侧边为 L 的边，添加的边恰为 $N_2 \cup N_3$ 的边.

现将 $N_2 \cup N_3$ 划分为 K_n 的两个 1- 因子 C_1^*, C_2^*，使得 $C_1^* \cup L$ 和 $C_2^* \cup L$ 是 K_n 的哈密顿圈 (如前所述，$C_4' = M_4$，$C_4 = C_4' \cup L$ 的构造，如图 6.12. 进一步注意到 $N_2 \cup N_3$ 是两个偶圈的不交并).

由于已假设 $e_1e_2 \in L_1$，我们可以不失一般性地进一步指定

$$L_1 = \left\{e_{2i-1}e_{2i} \mid i = 1,\cdots,\frac{m}{2}\right\},$$

$$L_2 = \left\{e_{2i}e_{2i+1} \mid i = 1,\cdots,\frac{m}{2},\ \text{其中}\ e_{m+1} = e_1\right\}.$$

有了这个记号，再定义 N_1 的划分 $\{N_1', N_1''\}$：

$$N_1' = \left\{e_{4i-3}'e_{4i-2}'' \mid i = 1,\cdots,\frac{m}{4}\right\} \cup \left\{e_{4i-1}''e_{4i}' \mid i = 1,\cdots,\frac{m}{4}\right\},$$

$$N_1''=N_1-N_1'$$

及 $L_2'\cup L_2''$ 的划分 $\{L_3^0,L_4^0\}$:

$$L_3^0=\left\{e_{4i-2}'e_{4i-1}'\mid i=1,\cdots,\frac{m}{4}\right\}\cup\left\{e_{4i}''e_{4i+1}''\mid i=1,\cdots,\frac{m}{4},\ \text{置}\, e_{m+1}''=e_1''\right\},$$

$$L_4^0=(L_2'\cup L_2'')-L_3^0\ .$$

由 $m\equiv 0 \pmod 4$ 知

$$C_3^*=L_3^0\cup N_1' \quad 和 \quad C_4^*=L_4^0\cup N_1''$$

是 K_n 的 1- 因子，并且对 $i=3,4$，$C_j^*\cup L$ 是 K_n 的哈密顿圈，对应了 K_m 中由 $L_1\cup L_2$ 导出的哈密圈 (图 6.13).

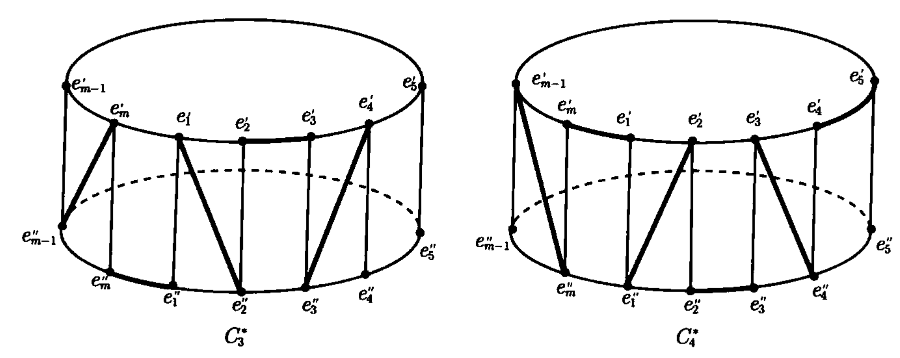


图 6.13 G^* 的 1- 因子 C_3^* 和 C_4^*，满足 $C_3^*\cup L$ 和 $C_4^*\cup L$ 为 K_n 的哈密顿圈 (L 的边作为边界边出现)

因为

$$G^*-L=\bigcup_{i=1}^{3}(L_i'\cup L_i''\cup N_i)$$

和

$$\bigcup_{i=1}^{4}C_i^*=\left(\bigcup_{i=1}^{3}N_i\right)\cup L_2'\cup L_2'',$$

故 G^*-L 的仅有的未曾考虑的边是

$$L_1'\cup L_1''\cup L_3'\cup L_3''$$

的那些边. 将这些边看成 m 侧棱柱上下底面的边界，类似于情形 2) 的开头，可以推知

$$C_5^*=L_1'\cup L_3'' \quad 和 \quad C_6^*=L_1''\cup L_3'$$

是 K_n 的 1- 因子，并且 $C_5^*\cup L$ 和 $C_6^*\cup L$ 为 K_n 的哈密顿圈. 这样，如果 $m\equiv 0 \pmod 4$，那么对 $L_j^*=C_j^*\,(1\leqslant j\leqslant 6)$，我们找到了 G^* 的符合要求的 1- 因子分解 $\mathcal{L}''=\{L,L_1^*,\cdots,L_6^*\}$.

b) $m\equiv 2 \pmod 4$. 因为总有 $m\geqslant 4$，故 $m\geqslant 6$. 考察情形 a) 中 $C_j^*\,(1\leqslant j\leqslant 6)$ 的构造，对 $j=1,2$，C_j^* 为 K_n 的 1- 因子且与 m 的奇偶性无关，而对 $j=5,6$，若

$m \equiv 0 \pmod 2$，则 C_j^* 为 K_n 的 1- 因子. 但若 $m \not\equiv 0 \pmod 4$，则 C_3^*, C_4^* 不再为 K_n 的 1- 因子. 事实上，若像情形 a) 一样，分别从 $e_1'e_2'', e_1''e_2'$ 开始逐步构造 C_3^*, C_4^*，则我们必然得到 $d_{C_3^*}(e_1') = d_{C_4^*}(e_1'') = 2$ 和 $d_{C_3^*}(e_1'') = d_{C_4^*}(e_1') = 0$. 然而，类似于情形 a)，通过对 $C_j^*\ (1 \leqslant j \leqslant 6)$ 的一个局部转换，使 G^* 中包含有 $e_1'e_1''$ 相邻的 12 条边. 这种情形也可以得到证明. 以下修改上述边集 $C_j^*\ (1 \leqslant j \leqslant 6)$ 的定义，这个修改与 N_1' 和 L_3^0 定义中指标 i 的上界有关，即在 N_1' 和 L_3^0 的第一项中用 $\dfrac{m+2}{4}$ 代替 $\dfrac{m}{4}$，而在第二项中用 $\dfrac{m-2}{4}$ 代替 $\dfrac{m}{4}$ (在修改过的 L_3^0 的定义中，令 $e_{m+1}' = e_1'$).

考虑边 $e_q e_m \in E(K_n)$，不失一般性，假设边 $e_q''e_m'$ 属于 C_1^* (注意由情形 a) 中的记号选取，$e_q''e_m' \in N_3 \subset C_1^* \cup C_2^*$). 这个假设蕴涵了 $e_m''e_1', e_1''e_r' \in C_1^*$，其中 $e_m'e_1'' \in L_2$ 且 $e_1'e_r'' \in L_3$. 由此，$e_q'e_m'', e_m'e_1'', e_1'e_r'' \in C_2^*$. 同时仍有 $e_1'e_2'' \in C_3^*$，并且由于上面的指标 i 上界的修改，也有 $e_{m-1}'e_m'', e_m'e_1' \in C_3^*$. 这蕴涵了 $e_1''e_2', e_{m-1}''e_m', e_m''e_1'' \in C_4^*$. 至于 C_5^* 和 C_6^* 有 $e_1'e_2', e_1''e_r'' \in C_5^*$ 和 $e_1''e_2'', e_1'e_r' \in C_6^*$.

令 C_2^*, C_5^* 不变，定义

$$C_2^{**} = C_2^*\ ,\quad C_5^{**} = C_5^*.$$

为得到 G^* 中另外的 4 个 1- 因子 $C_i^{**}\ (i = 1, 3, 4, 6)$，分别对换与 e_1', e_1'' 关联的某些边，即

$$\begin{aligned}
C_1^{**} &= (C_1^* - \{e_m''e_1', e_1''e_r'\}) \cup \{e_m''e_1'', e_1'e_r'\},\\
C_3^{**} &= (C_3^* - \{e_1'e_2''\}) \cup \{e_1''e_2''\},\\
C_4^{**} &= (C_4^* - \{e_m''e_1''\}) \cup \{e_m''e_1'\},\\
C_6^{**} &= (C_6^* - \{e_1''e_2'', e_1'e_r'\}) \cup \{e_1'e_2'', e_1''e_r'\}.
\end{aligned}$$

注意到在这种情形下，$\{C_i^* \mid 1 \leqslant i \leqslant 6\}$ 是 $E(G^*) - L$ 的一个划分，但不是 1- 因子分解，由 $C_i^{**}\ (1 \leqslant i \leqslant 6)$ 的定义及 $m \equiv 2 \pmod 4$ 可得，对 $L_i^* = C_i^{**}\ (1 \leqslant i \leqslant 6), \mathcal{L}'' = \{L, L_1^*, \cdots, L_6^*\}$ 是 G^* 的 1- 因子分解. 进一步，因为当 $m \equiv 0 \pmod 4$ 时，$L \cup C_i^*$ 是 G^* 的哈密顿圈，所以若 $m \equiv 2 \pmod 4$，则从 C_i^{**} 的定义知，$L \cup C_i^{**}$ 为 G^* 的哈密顿圈. 最后的这一观察解决了情形 b) 的证明.

因此，在 $m \equiv 0 \pmod 4$ 和 $m \equiv 2 \pmod 4$ 两种情形下，我们找到了 G^* 的 1- 因子分解 $\mathcal{L}''$，使得 $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}''$ 是 K_n 的满足要求的 1- 因子分解 ($\mathcal{L}'$ 见情形 a) 前情形 2) 的讨论). 这就解决了情形 $m \equiv 0 \pmod 2$. 而情形 $m \equiv 1 \pmod 2$ 在前面已解决. 定理 6.37 证毕.

定理 6.37 使我们能够对圈是块的欧拉图 G 证明猜想 6.36 (见猜想 6.36 之后及定理 6.37 之前的讨论).

定理 6.38 设 G 是 $\delta(G)>2$ 的连通欧拉图. 假设 G 的每个圈都是 G 的一个块，那么 G 含有 $\delta(G)-2$ 个两两相容的欧拉迹，并且在 G 的任意 $\delta(G)-1$ 个欧拉迹中至少存在两个互不相容.

证明 定理的第二部分结论由紧接着猜想 6.36 的讨论得到. 因此，只要证明在给定假设下，G 含有 $\delta(G)-2$ 个两两相容的欧拉迹. 对 $p=|V(G)|$ 用归纳法.

假设 $p=1$. 因为 $\delta(G)>2$，故 G 仅有的点 v 与 $m\geqslant 2$ 条环关联. 由图 6.8 之后和定理 6.37 之前的讨论，那里表明情形 $p=1$ 与定理 6.37 等价，因此，定理 6.38 对 $p=1$ 成立.

对 $p>1$，我们算法般地重复应用定理 6.37. 设 G 是满足 $|V(G)|=p>1$ 和 $\delta(G)>2$ 的. 以 G 的欧拉迹 T 开始，考虑满足 $E(C_0)=E(G)$ 的圈 C_0，其在两种可能的遍历方向之一上对应于 $T_0=T$. 记 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_p\}$.

设 G_1 是从 C_0 合并顶点 $v_{1,1},\cdots,v_{1,k_1}$ 得到的，其中 $2k_1=d(v_1)\geqslant\delta(G)$，并且这 k_1 个点对应于沿着 T_0 用 k_1 个 2- 价点代替 $v_1\in V(G)$. 因此，G_1 恰有一个价超过 2 的点，即 v_1. 由 G 的结构，G 的每个圈都是 G 的一个块蕴涵了对 $i=1$ $(G_{1,j}=G_1)$

与 v_i 关联的两条半边属于 $G_{i,j}$ 的同一块当且仅当这些半边属于 G 的同一块. (*)

以上性质被描述性地称为$G_{i,j}$ *与 G 在 v_i 有相同的块分布*.

由定理 6.37 前面的讨论及这个定理本身，G_1 有欧拉迹 $T_{1,1},T_{1,2},\cdots,T_{1,2k_1-2}$，它们在 $V(G)-\{v_1\}$ 定义了相同的转移 (因为这些点在 G_1 中对应于 2- 价点集)，而在点 v_1，它们相容 (即在 v_1 邻接的一对半边定义了至多一个 $T_{1,j}$ $(1\leqslant j\leqslant 2k_1-2)$ 的转移). 对 $n=\delta(G)$，令 $T_{1,1},\cdots,T_{1,n-2}$ 是如上构造的前 $n-2$ 个欧拉迹 (若 $2k_1=n$，则取全部)，并且对 $j=1,\cdots,n-2$，令 $C_{1,j}$ 为对应于 $T_{1,j}$ 的圈.

对每个 $j\in\{1,\cdots,n-2\}$，从 $C_{1,j}$ 合并点 $v_{2,1},\cdots,v_{2,k_2}$ 构造 $G_{2,j}$，其中 $2k_2=d(v_2)\geqslant\delta(G)=n$(见上面由 C_0 构造 G_1). 叙述 (*) 对 $i=2$ 也成立，即 $G_{2,j}$ 与 G 在 v_2 有相同的块分布. 由此，所有这 $n-2$ 个图 $G_{2,j}$ 在 v_2 点都与 G 有相同的块分布 (注意: G 中含 v_1 的圈对应于每个 $G_{2,j}$ 中的一个圈). 因此，若看 K_{2k_2}，则对每个 $j\in\{1,\cdots,n-2\}$，与 v_2 关联的半边对与定义 $G_{2,j}$ 的块的半边对是相同的，因而定义了 K_{2k_2} 的唯一的 1- 因子. 因此，应用定理 6.37 及本定理前面的讨论，得到 G 的 $n-2\leqslant 2k_2-2=d(v_2)-2$ 条欧拉迹 $T_{2,1},\cdots,T_{2,n-2}$，它们在 $V(G)-\{v_1,v_2\}$ 定义了相同的转移 (即 T_0 的转移)，但在 $\{v_1,v_2\}$ 相容①.

① 更确切地，首先将 $T_{2,j}$ 看成 $G_{2,j}$ 的欧拉迹，$T_{2,j}$ 选自 $G_{2,j}$ 的 $2k_2-2$ 个两两相容的欧拉迹，这些欧拉迹由 $G_{2,j}$ $(j=1,\cdots,n-2)$ 应用定理 6.37 依次得到. 然而必须从 K_{2k_2} 的满足定理 6.37 的一个固定的 1- 因子分解开始.

其次，考虑对应于 $T_{2,j}$ 的圈 $C_{2,j}$，并且从 $C_{2,j}$ 相应的构造图 $G_{3,j}$ $(j=1,\cdots,n-2)$. 叙述 (*) 对 $i=3$ 成立，即图 $G_{3,j}$ 在 v_3 都有相同的块分布. 因此，有欧拉迹 $T_{3,1},\cdots,T_{3,n-2}$，它们在 $V(G)-\{v_1,v_2,v_3\}$ 像 T_0 一样，但在 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 相容.

若 $p=2$ 或 3，则由上可知，定理成立. 对 $p>3$，反复应用上面的讨论，得到 G 的欧拉迹 $T_{p-1,1},\cdots,T_{p-1,n-2}$，它们在 $V(G)-\{v_p\}$ 相容，而在 v_p，它们仍像 T_0，对 $j=1,\cdots,n-2$，从对应于 $T_{p-1,j}$ 的圈 $C_{p-1,j}$ 构造 $G_{p,j}$，注意到这 $n-2$ 个图在 v_p 有相同的块分布. 将定理 6.37 应用到相应的 K_{2k_p}，其中 $2k_p=d(v_p)\geqslant\delta(G)=n$，得到 G 的欧拉迹 $T_{p,1},\cdots,T_{p,n-2}$，它们在 $V(G)$ 的所有点相容，即 $T_{p,1},\cdots,T_{p,n-2}$ 是 G 的两两相容的 $\delta(G)-2$ 个欧拉迹. 定理 6.38 证毕.

应该注意到一个长期未决的由科特齐格猜想和其他一些人提出的 [KOTZ64a, KOTZ64b] 说法，K_{2m} 有 1- 因子分解 $\{L_1,\cdots,L_{2m-1}\}$，使得对 $i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant 2m-1, L_i\cup L_j$ 是哈密顿圈. 立即得到这个猜想如果成立，则蕴涵了定理 6.37，因为由 K_{2m} 的对称性，含有如定理 6.37 叙述中指定的 1- 因子，并非 1- 因子分解的实质性的限制. 不过，上述猜想至今仅对某些特殊情形给出了证明：对情形 $2m-1$ 为素数，m 是素数 ([KOTZ64a])，或者 $2m=16,28,36,50,244$ 或 344 (这方面的详细参考文献见 [MEND85a,SEAH87a,STIN87a]，对 $2m=12$，这个问题的所有不同构的解可在 [PETR80a] 中找到)①. 另一方面，这里给出的定理 6.38 的证明表明定理 6.37 和定理 6.38 是等价的 (也见定理 6.37 前的叙述).

现转到以下问题：是否能利用定理 6.38 的证明中所用的方法完整地证明猜想 6.36? 取没有 2- 价点的连通欧拉图 G 的欧拉迹 T_0，考虑对应于 T_0 的圈 C_0，如定理 6.38 的证明产生 G_1，应用定理 6.38 到 $G_1\cdots\cdots$ 我们面临的问题是：对 $i\geqslant 2$，这 $n-2$ 个图 $G_{i,j}$ 可能在 v_i 不再有相同的块分布 (见定理 6.38 的证明). 这个问题可用图 6.8 及它的欧拉迹 T_1 和 T_2 来说明：从欧拉迹 T_1 开始 (T_1 扮演了定理 6.38 证明中 T_0 的角色)，并且 C_0 是对应于 T_1 的圈，从 C_0 得到图 G_1，$v_1=w$ 是它的唯一的价超过 2 的点. G_1 有两个欧拉迹，它们在 w 相容，即

$$T_{1,1}=v_{1,4},1,w,2,v_{2,3},3,w,4,v_{1,4}$$

和

$$T_{1,2}=v_{1,4},1,w,3,v_{2,3},2,w,4,v_{1,4}$$

($v_{1,4}$ 和 $v_{2,3}$ 表示对应于沿着 T_1·分裂 v 的 2- 价点). 从 $T_{1,1}$ 和 $T_{1,2}$ 得到图 $G_{1,1}$ 和 $G_{1,2}$，v 是它们仅有的价超过 2 的点. 但 $G_{1,1}$ 中的块由边集 $\{1,2\}$ 和 $\{3,4\}$ 定义，而在 $G_{1,2}$ 中，块由边集 $\{1,3\}$ 和 $\{2,4\}$ 定义. 因此，$G_{1,1}$ 和 $G_{1,2}$ 在 v 点有不同的块分布.

① 最近，罗莎 (A.Rosa) 告诉作者，一些人对 $2m=126,170,730,1332,1370,1850,2198,3126,6860$ 解决了科特齐格猜想.

然而，刚讨论的问题导出下面的猜想 (这个猜想最初在 [FLEI86a] 中提出). 若这个猜想成立，则猜想 6.36 将得证. 它能看作定理 6.37 的推广①.

猜想 6.39 设 $n = 2m > 2$ 为正的偶整数，并且设 $L_0, L', \cdots, L^{(n-2)}$ 是 K_n 的 1- 因子，使得对 $i = 1, \cdots, n-2$，$L_0 \cup L^{(i)}$ 是 K_n 的哈密顿圈，则 K_n 有 1- 因子分解 $\{L_1, \cdots, L_{n-1}\}$，使得对 $i = 1, \cdots, n-2$，$L_i \cup L^{(i)}$ 是 K_n 的哈密顿圈.

注意到在猜想 6.39 的叙述中，1- 因子 $L^{(i)}(1 \leqslant i \leqslant n-2)$ 不必全是不同的，并且 $L^{(i)} \neq L^{(j)}\,(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-2)$ 也不意味着 $L^{(i)} \cap L^{(j)} = \varnothing$. 这说明在用证明定理 6.38 时类似的方法证明猜想 6.36 时，对某个 $i \geqslant 2$，两个图 G_{i,j_1} 和 G_{i,j_2} 可以有也可以没有相同的块分布，并且若它们有相同的块分布，则它们仍可能含有某些与 v_i 关联的半边对定义了相同块.

若 $L' = \cdots = L^{(n-2)}$，则猜想 6.39 归结为 $L = L' = L_{n-1}$ 的定理 6.37. 注意：在这种情形下，1- 因子 L_0 变得无关，因为它在猜想 6.39 的结论中不再起作用. 这样，对 L_0，构造一个哈密顿圈以及 $L = L' = L_{n-1}$ 相当于说“设 L 是 K_n 的任意 1- 因子”.

为说明猜想 6.39 成立可以推出猜想 6.36 成立，我们回到猜想 6.39 叙述前面的讨论，并利用定理 6.38 证明中的术语：注意到对 $i = 1$，定理 6.38 证明中的论断 (*) 依然成立，从而得到欧拉迹 $T_{1,1}, \cdots, T_{1,n-2}$，它们在 v_1 相容；又从对应的圈 $G_{1,1}, \cdots, G_{1,n-2}$ 得到 $C_{1,1}, \cdots, C_{1,n-2}$. 设 $i \geqslant 2$ 是使得这 $n-2$ 个图 $G_{i,j}\,(j = 1, \cdots, n-2)$ 不满足 (*) 的最小整数，即这 $n-2$ 个图没有相同的块分布. 若没有小于等于 p 的这样的 i 存在，则反复应用定理 6.37 p 次，猜想 6.36 对这个图成立. 然而，若这样的 $i \leqslant p$ 存在，则有下面的结论：对每个 $G_{i,j}\,(j = 1, \cdots, n-2)$，$T_0$ 在 v_i 的转移都是相同的 (见 G_1 及 $G_{i,j}(i \geqslant 2)$ 的定义)，并且这些转移对应于 K_{n_i} 的 1- 因子 L_0，其中 $n \leqslant n_i = d(v_i)$. 类似地，对每个 $j = 1, \cdots, n-2$，$G_{i,j}$ 的块定义了 K_{n_i} 的 1- 因子 $L^{(i)}$，使得 $L_0 \cup L^{(j)}$ 是 K_n 的哈密顿圈 (见定理 6.37 前的论断 (*))，即猜想 6.39 的假设满足 (对 $n-2 \leqslant j \leqslant n_i - 2$，若 $n < n_i$，则 $L^{(j)} = L^{(n-2)}$). 假设这个猜想成立，则有 K_{n_i} 的 1- 因子分解 $\mathcal{L} = \{L_1, \cdots, L_{n_i-1}\}$，使得对 $j = 1, \cdots, n-2$，$L_j \cup L^{(j)}$ 是 K_{n_i} 的哈密顿圈，即对 $j = 1, \cdots, n-2$，L_j 定义了 $G_{i,j}$ 的欧拉迹 $T_{i,j}$. 由于 $\mathcal{L}$ 是 1- 因子分解，这 $n-2$ 个欧拉迹 $T_{i,j}$ 在 $v_1, \cdots, v_i$ 相容. 对 $i < p, j = 1, \cdots, n-2$，从这些 $T_{i,j}$ 得到相应的圈 $C_{i,j}$，进而得到图 $G_{i+1,j}$. 然后，用 $i+1$ 代替 i 重复上面的讨论，以此类推，从而猜想 6.39 成立推出猜想 6.36 成立. 另一方面，上面的讨论表明猜想 6.36 成立蕴涵了 $n \equiv 0 \pmod 2$ 时关于 K_n 的 1- 因子的分解某些东西. 但还不清楚这“某些东西”是否与猜想 6.39 一样强，即这两个猜想是否等价. 因为我们还不清楚在证明猜想 6.36 时，是否必须处

① [FLEI86a]中还提出了一些类似于猜想 6.39 的其他猜想.

理猜想 6.39 的假设中所表述的所有可能的块分布系. 注意到 [JACK88a] 依靠迷向系而不是猜想 6.39 证明了当 $k=3$ 时猜想 6.36 成立.

因为目前还不能证明两个猜想中的任何一个，因此，人们自然地会试图在猜想 6.36 中用函数 $f(k)$ 取代值 $2k-2$，并将 $2k-2$ 作为 $f(k)$ 的一个上界 (见定理 6.38)，并寻找 $f(k)$ 的一个"合适的"下界. 事实上，杰克逊 (B.Jackson) 的结果 (见猜想 6.36 前的讨论) 表明 $f(k) \geqslant \max\{2, k-1\}$. 这个结果是推论 6.43 的一个推广的直接结论 (见下面的定理 6.42 和推论 6.43). 但在开始陈述这些结果之前，还需要弄清连通欧拉图的转移系统与相关图的包含给定 1- 因子的哈密顿圈之间的另一联系.

设 G 是 $\delta(G)=2k>2$ 的连通欧拉图，给定 G 的 r 个转移系统 $X_1,\cdots,X_r$. 考虑任意 $v\in V(G)$，若 v 不是割点，令 $X_0(v)$ 为 v 的任一转移系统，否则，v 的转移系统 $X_0(v)$ 如下定义：在含 v 的每个块中，它导出 v 的一个转移系统 (因 G 是欧拉的，故每个含 v 的块有偶数条关联于 v 的半边，因此，$X_0(v)$ 能以上面的方式定义). 记 $X_0=\bigcup\limits_{v\in V(G)} X_0(v)$，并且令 $X_i(v)\subset X_i\ (i=1,\cdots,r)$ 是相应的 v 的转移系统.

令 $e'_1,\cdots,e'_d, d=d(v)\equiv 0 \pmod 2$ 是关联于 v 的半边，并且考虑完全图 K_d, $V(K_d)=\{e'_\ell \mid \ell=1,\cdots,d\}$. 类似于定理 6.37 前的讨论，$v$ 的转移系统对应到 K_d 的一个 1- 因子 $L(v)$. 在 K_d 中标记相应于 $X_j(v)$ 的 1- 因子 $L_j(v)\ (j=0,\cdots,r)$ 的边.

我们知道，构造 G 的欧拉迹 T 相当于用 $t=\frac{1}{2}d(v)$ 个 2- 价点 $v_1,\cdots,v_t$，逐步取代 G 中的每个点 v，使得每一步得到的图 G_v 都是连通的. 对 $i=1,\cdots,r$，若 T 与 X_i 相容，则 $X_T(v)\cap X_i(v)=\varnothing$. 因此，

$$X_T(v) \text{ 对应于 } K_d \text{ 中的 1- 因子 } L_T\text{，满足 } L_T(v)\cap L_i(v)=\varnothing,\quad i=1,\cdots,r. \tag{$\circ$}$$

这是存在与 $X_i\ (i=1,\cdots,r)$ 相容的 T 的必要条件，但不是充分条件，因为它并未考虑 G_v 必须是连通的 (注意：$X_T(v)$ 的元素恰为集合 $E^*_{v_j}\ (j=1,\cdots,t)$). 另一方面，考虑定理 6.37 前的叙述 $(*)$，并注意 $X_0(v)$ 唯一确定的充要条件 G 的每个含 v 的块恰含两条关联于 v 的半边，从而可得下面的结论：

$$\text{若 } L_T(v)\cup L_0(v) \text{ 是 } K_d \text{ 的哈密顿圈，则 } G_v \text{ 是连通的.} \tag{$\circ\circ$}$$

综合 $(\circ)$ 和 $(\circ\circ)$，我们似乎面临如下问题："设 $4\leqslant d=d(v)\equiv 0 \pmod 2$, K_d 含有使得 $L_i(v)\cap L=\varnothing\ (i=0,\cdots,r)$ 且 $L_0(v)\cup L$ 是哈密顿圈的 1- 因子 L 吗？" 考虑情形 $r=1$. 若 $d=4$，则 K_4 有唯一的 1- 因子分解，其中任两个 1- 因子给出 K_4 的一个哈密顿圈，因此，不管 $L_1(v)\cap L_0(v)=\varnothing$ 或 $\neq\varnothing$，K_4 含有使得

$L_1(v) \cup L = \varnothing$ 且 $L_0(v) \cap L$ 是 K_4 的哈密顿圈的 1- 因子 L (在这种情形下，当 $L_1(v) \cap L_0(v) \neq \varnothing$ 时有 $L_1(v) = L_0(v)$). 若 $d > 4$，则 $d \geqslant 6$，由定理 6.37，K_d 有 1- 因子分解 $\{L_1, \cdots, L_{d-1}\}$，使得 $L_0(v) = L_1$ 且 $L_0(v) \cup L_i\,(i = 2, \cdots, d-1)$ 为哈密顿圈. 当 $d \geqslant 6$ 时有 $\frac{1}{2}d < d - 2$，从而 1- 因子 $L_1(v)$ (它有 $\frac{1}{2}d$ 条边) 对至少一个 $i \in \{2, \cdots, d-1\}$ 满足 $L_1(v) \cap L_i = \varnothing$，因而上面的问题对 $r = 1$ 有肯定的答案 (注意：不用定理 6.37，而用 6.1 节中 a) 相容性的结果，b) 分裂引理和 c) $L_0(v)$ 和结构，也能得到同样的结论).

因此，我们真正面临的问题是 (记 $L_i = L_i(v)$)

给定 K_d 的 $r+1$ 个 1- 因子 $L_0, L_1, \cdots, L_r$，其中 $d > 2$ 是一个偶数，使得 K_d 有一个 1- 因子 L 满足 $L \cap L_i = \varnothing\,(i = 0, \cdots, r)$ 且 $L \cup L_0$ 为哈密顿圈的 r 有多大? (∘∘∘)

(∘∘∘) 的答案可以由以下结论得到 (见 [HÄGG79a]). 注意满足奥锐定理 (定理 3.75) 的偶阶图含有 1- 因子，因为它有哈密顿圈 (下面定理的一个推广，见 [BERM83a]).

定理 6.40 设 H 为阶数为 d 的简单图，d 为大于等于 4 的偶数，对 H 的每对不相邻点 x, y 有 $d_H(x) + d_H(y) \geqslant d+1$，令 L 为 H 的任一 1- 因子，那么 L 含在 H 的某个哈密顿圈中.

证明 间接证明. 因为 K_d 平凡地满足定理的条件，又因为由定理 6.37 任意指定的 1- 因子 $L \subset E(K_d)$ 含在 K_d 的某个哈密顿圈中，因此，可选择图 H，H 有下面的性质：

a) H 是 K_d 的满足定理假设的真子图.

b) H 中存在不含在 H 的任一哈密顿圈中的 1- 因子.

c) $|E(H)|$ 尽可能大.

由此，若 x, y 是 H 的两个不邻的点，则 $H \cup \{xy\}$ 有包含 L 的哈密顿圈 C. $xy \in E(C)$；否则，H 就不是定理的反例. 将 C 写成点序列

$$C = x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}, x_d, x_1,$$

其中 $x = x_1, y = x_d$. 于是

$$L = \{x_1x_2, x_3x_4, \cdots, x_{d-1}x_d\}.$$

由奥锐定理证明中同样的讨论得到：若 $d(x) + d(y) \geqslant d+1$，则存在点 x_i, x_{i+1} $(2 \leqslant i \leqslant d-2)$，使得 $x_1x_{i+1}, x_dx_i \in E(H)$. 如果 $x_ix_{i+1} \notin L$，那么具有

$$E(C_1) = (E(C) - \{x_1x_d, x_ix_{i+1}\}) \cup \{x_1x_{i+1}, x_dx_i\}$$

的圈 C_1(见奥锐定理的证明) 是 H 的含 L 的哈密顿圈，与 H 的选择矛盾. 于是

$$x_ix_{i+1} \in L \text{ 且 } i \text{ 为奇数}. \tag{*}$$

为得到与式 (*) 的矛盾，将 H 分成两个子图 H_1 和 H_2，其中 H_1 是满足 $L \subset E(H_1)$ 的 2- 部图，在此条件下使 $|E(H_1)|$ 尽可能的大，并令 $H_2 = H - H_1$. 因此，$V(H_1) = V(H)$. 进一步，令 $H_1' = H_1 - L$. 由定理的假设，H_1 是连通的，因此，$V(H_1)$ 的二部划分 $\{A_1, B_1\}$ 是唯一确定的，并且由 $L \subset E(H_1)$ 有 $|A_1| = |B_1| = \frac{1}{2}d$. 不失一般性，$x \in A_1$. 我们推导 H_1 的某些性质.

考虑任意 $e = x_j x_{j+1} \in L$，不失一般性，$x_j \in A_1$ (否则，用 $j-1$ 代替 $j+1$). 用二部划分 $V(H_1^*) = A_1^* \cup B_1^*$ 定义一个新的 2- 部图 H_1^*：

$$A_1^* = (A_1 - \{x_j\}) \cup \{x_{j+1}\}, \quad B_1^* = (B_1 - \{x_{j+1}\}) \cup \{x_j\},$$

$$E(H_1^*) = \{uv \in E(H) \mid u \in A_1^*, v \in B_1^*\}.$$

注意到

$$|E(H_1^*)| = |E(H_1)| + d_{H_2}(e) - d_{H_1'}(e).$$

由 H_1^* 的定义，$L \subset E(H_1^*)$，由 H_1 的选择有 $|E(H_1^*)| \leqslant |E(H_1)|$. 这和上面的等式给出

$$\text{对任意 } e \in L,\ d_{H_1'} \geqslant d_{H_2}(e). \tag{**}$$

因此，若 $e = x_j x_{j+1}$，$f = x_k x_{k+1} \in L$，则

$$d_{H_1'}(e) + d_{H_1'}(f) \geqslant d_{H_2}(e) + d_{H_2}(f).$$

这个不等式以及对任意 $e \in L$，$d_H(e) = d_{H_1'}(e) + d_{H_2}(e) + 2$ 推出

$$2d_{H_1'}(e) + 2d_{H_1'}(f) \geqslant d_H(e) + d_H(f) + 4.$$

因为 $e = x_j x_{j+1}, f = x_k x_{k+1}$ 且不失一般性，$x_j, x_k \in A_1$，故从前面的不等式并由 H_1 的选择得到

$$\text{若 } x_j x_{k+1}, x_k x_{j+1} \notin E(H_1),\ \text{则 } d_{H_1'}(e) + d_{H_1'}(f) \geqslant d - 1 \tag{***}$$

(注：$|E(H_1)|$ 的最大性推出 $x_j x_{k+1}, x_k x_{j+1} \notin E(H)$，因而由假设有 $d_H(x_j) + d_H(x_{k+1}) \geqslant d + 1$).

从 H_1 如下构造有向图 D：用弧 (y, x) 取代每条边 $xy \in E(H_1)$，其中 $x \in A_1$，从得到的有向图 D_{H_1} 构造 $D := D_{H_1}/L$ (其中 L 表示 D_{H_1} 中对应于 H_1 中 L 的弧集). 为了便于使用，根据收缩程序，用 $L \subset E(H_1)$ 中元素的标号标记 D 的顶点. 这导致

$$d_D(e) = d_{H_1'}(e).$$

因为对上面的 $e, f \in L, e, f, \in V(D)$ 不相邻当且仅当 $x_j x_{k+1}, x_k x_{j+1} \notin E(H_1)$ (注意 H_1 是 2- 部图！)，并且由于 $d = 2|V(D)|$，故从 (***) 我们得到

$$\text{若 } e, f \in V(D) \text{ 是不相邻的, 则 } d_D(e) + d_D(f) \geqslant 2|V(D)| - 1. \tag{****}$$

然而，由于我们不知道 D 是否强连通，因此，不能对 D 用米内 (Meyniel) 定理 (注意由 D_{H_1} 的定义 D 没有重弧). 若应用推论 3.78，则不需要强连通性，因而得出 D 有哈密顿路 P_D，将它写成点序列，

$$P_D = e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_m},$$

其中 $m = \frac{1}{2}d = |V(D)|$ 且 $\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_m}\} = V(D) = L$. 由 H_1 的定向 D_{H_1}，P_D 对应于 D_{H_1} 中的一条反向哈密顿路，因此，P_D 对应于 H_1 的含 L 的哈密顿路 P.

若 P 的端点由 H 的一条边连接，则 $P \cup \{e\}$ 是 H 的含 L 的哈密顿圈，与 H 的选择矛盾. 不失一般性，可以重新标号 P 的顶点，使得 $E(P) = E(C) - \{x_d x_1\}$，这样对 $e_i = x_{2i-1}x_{2i}\,(i = 1, \cdots, m)$，$P_D = e_1, e_2, \cdots, e_m$. 由假设 (见 (*) 前的讨论) 得到 $x_1x_{i+1}, x_dx_i \in E(H)$. 由 (*)，$i$ 是奇数. 因为由假设 $P \subset H_1$ 且 $x_1 \in A_1$，我们有 $A_1 = \left\{x_{2j-1} \mid j = 1, \cdots, \frac{1}{2}d\right\}$，$B_1 = \left\{x_{2j} \mid j = 1, \cdots, \frac{1}{2}d\right\}$. 因为 i 为奇数，这便有 $x_1x_{i+1}, x_ix_d \in E(H_1)$. 于是由 D_{H_1} 的定义，$(x_{i+1}, x_1), (x_d, x_i) \in A(D_{H_1})$，并且这两条弧对应于弧 $(e_j, e_1), (e_m, e_j) \in A(D)$，其中 $e_j = x_ix_{i+1}$ 且 $j = \frac{i+1}{2}$，因而我们得出 $P_D \cup \{(e_j, e_1), (e_m, e_j)\}$ 是 D 的强连通支撑子有向图，即 D 是强连通的. 由米内定理，D 有哈密顿圈 C_D. 如上面涉及 P_D 和 P 的关系，则我们有 C_D 对应于 H_1 的哈密顿圈 C_0，并且 $L \subset E(C_0)$. 因为 $V(H_1) = V(H)$，得到与 H 的选择矛盾. 定理证毕.

现在我们能够回答叙述定理 6.40 前提出的问题 (○○○). 这个问题等价于问图 $H = \left(K_d - \bigcup_{i=0}^{r} L_i\right) \cup L_0$ 是否有含 L_0 的哈密顿圈. 由 H 的定义且由于对某些 $i \neq j, 0 \leqslant i, j \leqslant r, L_i \cap L_j \neq \varnothing$ 可能成立，故对任意 $v \in V(H), d_H(v) \geqslant (d-1) - (r+1) + 1 = d - r - 1$. 因此，

$$\text{若 } x, y \in V(H) \text{ 且 } xy \notin E(H), \text{ 则 } d_H(x) + d_H(y) \geqslant 2d - 2r - 2.$$

于是若 $2d - 2r - 2 \geqslant d + 1$，则定理 6.40 保证了 H 中存在满足 $L_0 \subset E(C)$ 的哈密顿圈 C. 由于

$$2d - 2r - 2 \geqslant d + 1 \text{ 当且仅当 } r \leqslant \frac{1}{2}(d-3),$$

又由于 r 是整数，故问题 (○○○) 的第一个答案为：r 可以大到 $\frac{1}{2}d - 2$. 进一步，(○○○) 前的讨论表明在任何情形下，我们都可以假设 $r \geqslant 1$. 由定理 6.40，我们可以将这些讨论概括成下面的结果.

推论 6.41 设 d 是超过 2 的偶数，r 是满足 $r \leqslant \max\left\{1, \frac{1}{2}d - 2\right\}$ 的正整数.

令 $L_0, L_1, \cdots, L_r$ 是完全图 K_d 的 1- 因子. 那么 $H := \left(K_d - \bigcup_{i=0}^{r} L_i\right) \cup L_0$ 有含 L_0 的哈密顿圈.

设 C 和 L_0 如推论 6.41 给出，并且令 $L_T = C - L_0$，L_T 为 H 的 1- 因子，即 K_d 中有 1- 因子 L_T，使得对 $i = 0, \cdots, r, L_T \cap L_i = \varnothing$ 且 $L_T \cup L_0$ 是哈密顿圈. 叙述 ($\dot{\circ}$) 和 ($\circ\circ$) 引导我们提出 ($\circ\circ\circ$) 中的问题，继而得到定理 6.40 和推论 6.41，因此，若借用转移系统重新解释 L_T 和 $L_i\,(0 \leqslant i \leqslant r)$，则我们可以说，

设 G 是 $\Delta(G) \geqslant 4$ 的连通欧拉图，v 是 G 的 $d(v) > 2$ 的任一点. 假设正整数 r 满足 $r \leqslant \max\{1, k_v - 2\}$，其中 $2k_v = d(v)$. 令 $X_i(v)\,(1 \leqslant i \leqslant r)$ 是 v 的任意转移系统，而 $X_0(v)$ 是 v 的一个转移系统，它没有元素由属于 G 的不同块的两条半边构成，那么存在 v 的转移系统 $X_T(v)$ 使得对 $i = 0, \cdots, r, X_T(v) \cap X_i(v) = \varnothing$ 且 G_v 是连通的，$V(G_v) - V(G)$ 中 2- 价点的关联关系由 $X_T(v)$ 的元素定义. (I)

设 G 是没有 2- 价点的连通欧拉图. 令 $k = \frac{1}{2}\delta(G)$，即 $k = \min\{k_v \mid v \in V(G)\}$，并且令 $r \leqslant \max\{1, k-2\}$. 用 $v_1, \cdots, v_p, p = |V(G)|$ 表示 G 的顶点且定义 $G_0 := G, G_j = (G_{j-1})_{v_j}\,(j = 1, \cdots, p)$. 对 G 的给定的转移系统 $X_i\,(1 \leqslant i \leqslant r)$，$X_i$ 导出 $v = v_j$ 的转移系统 $X_i(v)\,(j = 1, \cdots, p)$ (见 (I))，我们有 $X_i = \bigcup_{j=1}^{p} X_i(v_j)$. 在 (I) 中逐步替代 $G = G_{j-1}, v = v_j$，并且对 $v_j \in V(G_{j-1})\,(j = 1, \cdots, p)$，定义 $X_0(v_j)$ 经过 p 次应用 (I)，得到仅有 2- 价点的连通欧拉图 G_p，即 G_p 是一个圈. 这样 $X_T = \bigcup_{j=1}^{p} X_T(v_j)$ 是一个定义了一个欧拉迹 T 的转移系统，并且对 $i = 1, \cdots, r$ 有 $X_T \cap X_i = \varnothing$，即 T 与 X_i 相容 (注意因为 $X_0 = \bigcup_{j=1}^{p} X_0(v_j)$ 不能预先定义，故它可以说起了支撑作用). 于是我们得到 [JACK87b] 的主要结果，它表述成下面的定理.

定理 6.42 设 G 是 $\delta(G) = 2k > 2$ 的连通欧拉图，$r \leqslant \max\{1, k-2\}$ 是正整数，存在给定的转移系统 $X_1, \cdots, X_r$，那么 G 中存在与 $X_1, \cdots, X_r$ 相容的欧拉迹.

推论 6.43 若 G 是 $\delta(G) = 2k > 2$ 的连通欧拉图，那么 G 中至少有 $\max\{2, k-2\}$ 个两两相容的欧拉迹.

推论 6.43 的证明可从定理 6.42 得到，将它留作练习.

对偶数 k，杰克逊和娥冒德 (N.Wormald) 在 [JACK88c] 中已改进了定理 6.42，他们证明了 $r \leqslant k-1$ 是充分的. 进一步，他们证明了若 $\delta(G) = 2k > 2$，则 G 有 k 个两两相容的欧拉迹. 下面的讨论表明对后一结果，不能任意选取两两相容的欧拉迹.

下面的例子可以看出，定理 6.42 中的不等式 $r \leqslant \{1, k-2\}$ 是最好可能的 (也

可参见图 6.14)：设 H 为 2- 连通 6- 正则图，考虑 H 的两个相容的欧拉迹 T_1' 和 T_2'，并取 H 的三个拷贝. 剖分每个拷贝的一条边，并合并这些剖分点，如此得到有割点 v 的图 G (图 6.14). 在 G 的三个块中的每一个块中，有了 T_1' 和 T_2'，这些欧拉迹能扩张到图 6.14 所描述的两个相容欧拉迹 T_1 和 T_2. G 不含与 T_1 和 T_2 相容的欧拉迹 T，否则，沿着 e_1 指向 v 开始 (这是不失一般性的) 的 T 的起始节必定具有 e_1, v, e_3 或 e_1, v, e_5 的形式. 在第一种情形下，含 v 的下一节必具有形式 e_2, v, e_4(为了不与相容性矛盾). 在第二种情形下，含 v 的下一节必定是 e_4, v, e_2. 于是 T 中含 v 的第三节必定具有形式 e_5, v, e_6 (在第一种情形) 或形式 e_3, v, e_6(在第二种情形). 因此，在第一种情形下，$X_T \cap X_{T_1} \neq \varnothing$，在第二种情形下，$X_T \cap X_{T_2} \neq \varnothing$. 于是 G 中没有与 T_1 和 T_2 相容的欧拉迹. 这个例子也说明，用贪婪算法不可能解决猜想 6.36 的. 然而，这个事实已被定理 6.37 和定理 6.38 的等价性说明.

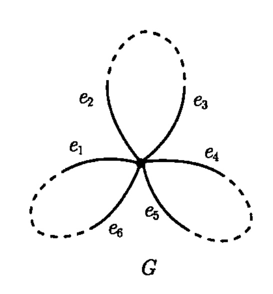


图 6.14 有两个相容欧拉迹 $T_1 = e_1, v, e_2, \cdots, e_3, v, e_4, \cdots, e_5, v, e_6, \cdots$ 和 $T_2 = e_1, v, e_4, \cdots, e_5, v, e_2, \cdots, e_3, v, e_6, \cdots$ 的 6- 正则图 G. G 中没有与 T_1 和 T_2 相容的欧拉迹

有另一种试图解决猜想 6.36 的方法. 它最初由希尔顿 (A.J.W.Hilton) 提出，包含在 [FLEI86a] 中 (尽管它的形式与以下表述不同). 这种方法称为“由上而下法”，它相对于导出猜想 6.39 的讨论中所描述的“由下而上法”.

由上而下法从一个 $\delta(G) > 2$ 的连通欧拉图 G 开始，其中价大于 2 的顶点为 $v_1, \cdots, v_t\,(t \geqslant 1)$. 以 $d(v_1) - 2$ 种方式将 v_1 分裂成 2- 价点，得到 $d(v_1) - 2$ 个连通欧拉图的集 $\mathcal{G}_1$，使得 G 中与 v_1 关联的邻边对至多在 $\mathcal{G}_1$ 的一个元素中出现. 定理 6.37 保证了 $\mathcal{G}_1$ 的存在性：因为若我们在 G 中以下面的方式配对与 v_1 关联的边，使得这个配对在含 v_1 的每个块中产生一个相应的配对，则构造 $\mathcal{G}_1$ 恰是将定理 6.37 应用到 $K_{d(v_1)}$，并用 $L \subset K_{d(v_1)}$ 代表这个配对. 当然，定理 6.37 也许会给出 $K_{d(v_1)} - L$ 的不止一个 1- 因子分解，因而 $\mathcal{G}_1$ 不必是唯一确定的. 虽然 $\mathcal{G}_1$ 的元素 $G_{1,i}\,(1 \leqslant i \leqslant d(v_1) - 2)$ 未必同构，$G_{1,i} - V_2(G_{1,2})$ 却是同构的. 在每个 $G_{1,i}\,(1 \leqslant i \leqslant d(v_1) - 2)$ 中，将定理 6.37 应用于到 v_2. 换句话说，在每个 $G_{1,i}$ 中，对 v_2 产生 $d(v_2) - 2$ 个两两相容的点分裂. 这样对每个 $i\ (1 \leqslant i \leqslant d(v_1) - 2)$，得到一个包含 $d(v_2) - 2$ 个元素 $G_{2,i,k}$ 的集 $\mathcal{G}_{2,i}$，使得 $G_{2,i,k} - V_2(G_{2,i,k})\ (1 \leqslant k \leqslant d(v_2) - 2)$ 是同构的，这甚至对属于不同 $\mathcal{G}_{2,i}$ 的元素也对. 然后从 $\mathcal{G}_{2,i}$ 的每 $2k - 2$ 个集中恰取一个元素构造集 $\mathcal{G}_2$，使得 G 中与 v_2 关联的每对边最多在这些元素的一个里是相邻的边对. 由以上讨论，对 $H_1, H_2 \in \mathcal{G}_2$ 有 $H_1 - V_2(H_1) \simeq H_2 - V_2(H_2)$. 若

这个集 $\mathcal{G}_2$ 能构造出来，则像上面一样，用 $\mathcal{G}_2$ 代替 $\mathcal{G}_1$，v_3 取代 v_2 继续进行. 但 $\mathcal{G}_2$ 存在吗? 也许在构造 $\mathcal{G}_2$ 时，必须更小心地选择这 $2k-2$ 个图，也许必须考虑所有构成 $\mathcal{G}_1$ 的可能选择 (即应用定理 6.37 到 $K_{d(v_1)}-L$ 产生的所有可能的 1- 因子分解). 目前这是未知的. 不过这导出下面的问题："设 $G_1,\cdots,G_{2k-2}$ 是有相同顶点集 V 的图，使得 $G_i-V_2(G_i)\simeq G_j-V_2(G_j)$ 对 $1\leqslant i,j\leqslant 2k-2$ 成立，并且 $2k\leqslant \min\{d(v)\mid v\in V(G)-V_2(G)\}$，那么是否可以对每个 i $(1\leqslant i\leqslant 2k-2)$，分裂 G_i 中相同的点 $v\in V(G)-V_2(G)$，使得 G_i 中任意与 v 关联的 e,f 在这样得到的 $2k-2$ 个图的至多一个中邻接?" 然而，这个问题的肯定回答相当于证明猜想 6.39—— 注意到若不要求上面产生的图 $G_{2,i,k}$ 连通，以使其成为 $\mathcal{G}_2$ 的候选，那么 $\mathcal{G}_2$ 存在. 这由定理 6.37 保证. 于是应用定理 6.37，"由上而下法" 与 "由下而上法" 均得到下面的结果 (见 [FLEI86a，定理 2]，那里给出了代表这两种方法的两个证明)："若 G 是 $\delta(G)\geqslant 4$ 的欧拉图，则存在 $\delta(G)-1$ 个两两相容迹分解." 尽管这个结果无非是用欧拉图的相容性语言解释定理 6.37，但它提出了一个有趣的问题，即若在这个结果中用圈代替迹，是否能得到一个真命题. 注意到在情形 $G=K_{2m+1}\,(m\geqslant 2)$ 下，该问题已被科特奇格所考虑，即 K_{2m+1} 是否有 $2m-1$ 个两两相容的哈密顿圈分解，参见 [KOTZ79a，定义 2 和问题 4] (科特奇格用的术语是"完美"，而非"相容").

6.2.1 有向图中的两两相容欧拉迹

考虑确定有向图中两两相容欧拉迹的最大个数问题，并首先假设连通欧拉有向图 D 的每个块是一个圈且 $\delta(D)>2$. 考虑点 v，正如引出定理 6.37 的讨论一样，构造一个新图，其顶点为与 v 关联的半弧，跟前面一样，这属于 D 的同一块的半弧对 (不可能的转移) 定义了新图的 1- 因子 L，新图的每条其他边联结内关联于 v 的一条半弧与外关联于 v 的一条半弧. 因此，这个新图是 $K_{d,d}$，其中 $d=\mathrm{id}(v)=\mathrm{od}(v)$，像前面一样，"$D$ 的一条欧拉迹 T 对应到 $K_{d,d}$ 的一个哈密顿圈 H，$L\subset E(H)$，并且若 T_1,T_2 是 D 的两个相容欧拉迹，则对应的哈密顿圈 H_1,H_2 满足 $E(H_1)\cap E(H_2)=L$. " 因此，问题是："$K_{d,d}$ 能分解成 1- 因子 $L_1,\cdots,L_d$，使得 $L_1=L$ 且对 $i=2,\cdots,d$，$L\cup L_i$ 是 $K_{d,d}$ 的哈密顿圈吗?" 用类似于无向图情形的方法试着回答这个问题. 在 $K_{d,d}$ 中收缩 1- 因子 L 以得到 K_d (见定理 6.37 的证明). K_d 的哈密顿圈 H' 在 $K_{d,d}$ 中对应于一个 3- 正则图 $P^*_{H'}$，它可以看成由 d- 侧棱柱经添加侧面的对角线，删除上、下底边界的边所得的图. L 的元素为棱柱的侧棱. 因此，$P^*_{H'}$ 能分解成三个 1- 因子 C'_0,C'_1,C'_2，使得 $C'_0=L$ 且对 $i=1,2$，$L\cup C'_i$ 为 $K_{d,d}$ 的哈密顿圈 (见定理 6.37 证明的情形 2) 中 C'_3,C'_4 的定义)，因而我们得出若 d 为奇数 (注意对奇数 d,K_d 有一个哈密顿圈分解)，则上面的问题有肯定的回答. 然而，若 d 是偶数，则上面问题的答案一般来说是否定的，这可以从图 6.15 中

看出，其中 $d=4$.

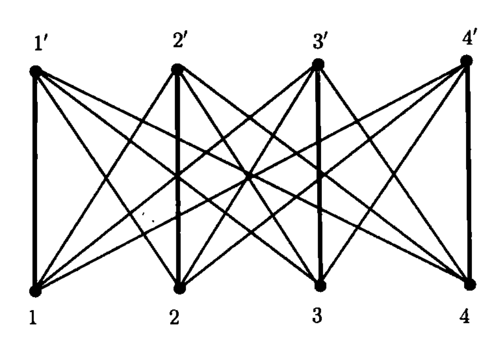


图 6.15 $K_{4,4}$ 不能分解成 1- 因子 L_0, L_1, L_2, L_3，使得 $L_0 = L = \{ii' \mid i=1,2,3,4\}$ 且对 $j=1,2,3, L\cup L_j$ 为哈密顿圈

这个问题的理论原因 (正如后面将看到的，产生于方法的选取) 可由研究定理 6.37 的证明揭示其中一部分. 设 $\{L_1,\cdots,L_{d-1}\}$ 为 K_d 的 1- 因子分解，满足对 $1\leqslant i,j\leqslant d, 1\leqslant |i-j|\leqslant 2, L_i\cup L_j$ 为 K_d 的哈密顿圈. 令 $L_d=L_1$，$L_i\cup L_{i+1}\,(i=4,\cdots,d-2, i\equiv 0 \pmod 2)$，跟前面一样定义了 $P^*_{H'}$，并且再次给出 $K_{d,d}$ 的满足 $H_i\cap H_{i+1}=L$ 的哈密顿圈 H_i, H_{i+1}. 但如果我们观察包含的由 $G_3=\langle L_1\cup L_2\cup L_3\rangle$ 定义 4- 正则图 G_4，那么定理 6.37 的证明表明. 一般地，G_4 不可能分解成 4 个 1- 因子 $L=C'_0, C'_1, C'_2, C'_3$，使得 $L\cup C'_i\,(i=1,2,3)$ 为 $K_{d,d}$ 的哈密顿圈 (虽然 $L_i\cup L_j\,(i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant 3)$ 为 K_d 的哈密顿圈).

假设 G_4 有这样的分解. 定向哈密顿圈 $H_i=L\cup C'_i\,(i=1,2,3)$，使得 L 的边总是以相同的方向经过，如从上往下的方向. 因为 G_4 是二部图 (图 6.16)，故这是可能的. 于是 G_4 转变为二部有向图 D_4.

由 G_4 的定义，D_4 定义了一个 3- 正则有向图 D_6，D_6 可以看成在 G_3 中用两条弧 $(a,b),(b,a)\in A(D_6)$ 代替每条边 $ab\in E(G_3)$ 得到的，并且 D_6 可以分解为三个定向哈密顿圈 H_1^*, H_2^*, H_3^*，它们分别对应于 G_3 的哈密顿圈 $L_1\cup L_2, L_1\cup L_3, L_2\cup L_3$ (图 6.16). 其次，如下定义 D_6 的欧拉迹 T：从 $u\in V(D_6)=V(G_3)$ 开始，通过整个 H_1^*，再次到达 u 后，再继续通过 H_3^*，在全部通过 H_3^* 后，再通过 H_2^* 的弧. T 对应于 G_3 的一条闭覆盖途径 W，W 从 $u\in V(G_3)$ 开始，根据 T 中 H_1^* 的通行方式，首先经过 $L_2\cup L_1$ 的元素，然后根据 H_3 的通行方式，经过 $L_3\cup L_2$ 的元素，最后根据 H_2^* 的通行方式，经过 $L_1\cup L_3$ 的元素，即 W 有下面的性质:“W 以每个方向经过 G_3 的每条边恰好一次，并且 G_3 中没有边在第一次被通过后紧接着被第二次通过.”正如在第 8 章将要看到的 (见定理 8.4)，G_3 的有这个性质的闭覆盖途径推出 $|V(G_3)|\equiv 2 \pmod 4$①. 我们断言 G_3 为 2- 部图. 为此，考虑 D_6 并删去下面

① 由相同的讨论可得 [AUBE82b，定理]. 然而在那篇文章中没有利用定理 8.4.

的弧；若 $ab \in L_1$，则删去 H_2^* 的连接 a, b 的弧；若 $ab \in L_2$，则删去 H_1^* 中相应的弧；若 $ab \in L_3$，则删去 H_3^* 中相应的弧 (图 6.16 中，这对应于在 D_6 中删去 u 的外关联弧). 这样得到的子有向图 $D_3 \subset D_6$ 是 G_3 的一个定向，使得每个点或是源或是汇，即 D_3 和 G_3 都是 2- 部图 (注意在给定的假设下，若已知与 $u \in V(D_6)$ 关联的一条弧属于 H_i^* $(i \in \{1, 2, 3\})$，则剩下的 5 条弧都属于这个 H_i^*，如图 6.16 所示).

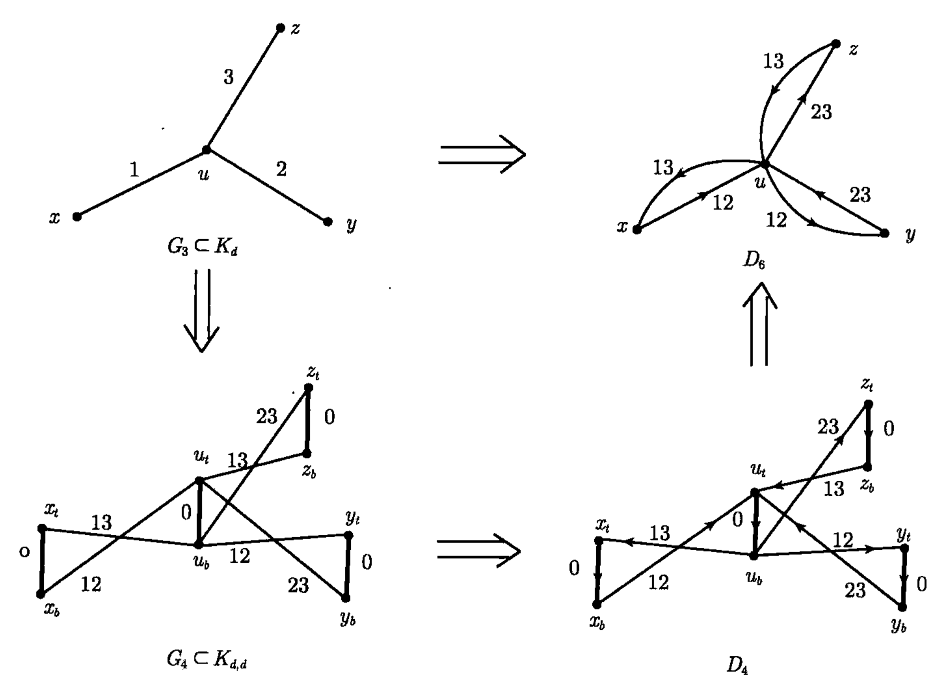


图 6.16　G_3 的哈密顿圈 $L_1 \cup L_2, L_1 \cup L_3, L_2 \cup L_3$ (用 i 标记 L_i 的元素) 分别对应于 G_4 的哈密顿圈 H_1, H_2, H_3 (它的不属于 L 的边用 12,13,23 标记)，又分别对应于 D_4 的定向哈密顿圈. 后者定义了 D_6 的由三个定向哈密顿圈构成的分解. $G_4(D_4)$ 中的 L 的边 (弧) 以 0 标记. 下标 t 和 b 表示 ‘顶端’ 和 ‘底端’

另一方面，用 v_t 和 v_b 取代 $V(D_6)$ 的每个点 v，引进弧 (v_t, v_b)，并且令内关联于 v(外关联于 v) 的弧内关联于 v_t(外关联于 v_b)，这样从 D_6 得到 D_4. 进一步，若 D_6 有一个由三个哈密顿圈构成的分解，则通过 D_4 知，G_4 有 1- 因子分解 $\{C_0', C_1', C_2', C_3'\}$，使得对 $L = C_0'$，$H_i = L \cup C_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ 是 G_4 的哈密顿圈.

由于 D_6 的哈密顿圈 H_1^*, H_2^*, H_3^* 导出 G_3 的哈密顿圈 $L_1 \cup L_2, L_1 \cup L_3, L_2 \cup L_3$ 的一个定向，使得在后面的哈密顿圈的每个方向上，G_3 的每条边恰被经过一次，故图 6.16 中的箭头也可反向. 换句话说，有下面的结论.

命题 6.44　设 G_3, G_4 如上给定，G_3 有 1- 因子分解 $\{L_1, L_2, L_3\}$，使得 $L_1 \cup$

$L_2, L_1 \cup L_3, L_2 \cup L_3$ 是 G_3 的哈密顿圈，那么 G_4 有 1- 因子分解 $\{L, C_1', C_2', C_3'\}$，使得 $L \cup C_i'$ $(i=1,2,3)$ 为 G_4 的哈密顿圈当且仅当 G_3 的以上哈密顿圈有一个圈定向，使得 G_3 的每条边在它所属的两个哈密顿圈的每个方向上被通过恰好一次.

若 G_3 是 3- 正则 2- 部图，则它有 1- 因子分解 $\{L_1, L_2, L_3\}$(见定理 3.48). 若 $\{V_1, V_2\}$ 是 $V(G_3)$ 的二部划分 (它是唯一确定的当且仅当 G_3 是连通的)，并且用弧 $(v_1, v_2)\,(v_1 \in V_1, v_2 \in V_2)$ 取代 $L_1 \cup L_2$ 的每条边 v_1v_2，而用弧 (v_2, v_1) 取代 L_3 中这样的边，则 2- 因子 $L_1 \cup L_3, L_2 \cup L_3$ 作为如此得到的有向图 D_3 的 1- 因子 F_2, F_3 出现. 若用 F_2^{R} 表示 F_2 的反定向，用 F_1 表示由对应于 L_1 的 D_3 的弧导出的 $L_1 \cup L_2$ 的圈定向，则 $F_1, F_2^{\mathrm{R}}, F_3$ 分别定义了 $L_1 \cup L_2, L_1 \cup L_3$ 和 $L_2 \cup L_3$ 的圈定向，使得 G_3 的每条边 e 在含 e 的两个 2- 因子的每个方向上恰被经过一次. 结合前面所述有下面的结果成立.

命题 6.45 设 G_3 是 3- 正则图且有 1- 因子分解 $\{L_1, L_2, L_3\}$，使得 $H_i = L_i \cup L_{i+1}\,(i=1,2,3)$ 为 G_3 的哈密顿圈 (其中令 $L_4 = L_1$). 下面的叙述等价：

1) $|V(G_3)| \equiv 2 \pmod 4$ 且 G 是 2- 部图；

2) 可以指定 $H_i\,(i=1,2,3)$ 的一个圈定向，使得每条边在相应的两个 H_i 的每个方向上恰被通过一次.

鉴于命题 6.44 和命题 6.45 以及它们前面的讨论，我们用最初用来研究 $K_{d,d}$ 的满足 $L_1 \cup L_i\,(i=2,\cdots,d)$ 为 $K_{d,d}$ 的哈密顿圈的 1- 因子分解 $\{L_1, \cdots, L_d\}$ 的方法引出下面的问题：

确定正整数 $d > 2, d \equiv 2 \pmod 4$，使得 K_d 有满足下面性质的 1- 因子分解 $\{L_1, \cdots, L_{d-1}\}$：

a) $L_i \cup L_{i+1}\,(i=1,\cdots,d-2)$ 和 $L_1 \cup L_3$ 为 K_d 的哈密顿圈；

b) $\langle L_1 \cup L_2 \cup L_3 \rangle$ 是 2- 部图.

直接可以看出，必须有 $d \geqslant 10$: 因为在 K_6 中有上述性质的图 $\langle L_1 \cup L_2 \cup L_3 \rangle$ 在同构的意义上是唯一确定的，从而 $K_6 - \{L_1 \cup L_2 \cup L_3\}$ 是由两个不交的三角形构成的不连通图，不能分解成两个 1- 因子.

然而，下面的定理是到目前为止我们讨论的肯定的结果的直接推论.

定理 6.46 设给定 $K_{d,d}\,(d \geqslant 2)$ 的 1- 因子 L，那么 $K_{d,d}$ 中存在有如下性质的 1- 因子分解 $\{L, L_2, \cdots, L_d\}$：

a) 对 $i = 2, \cdots, d-1, L \cup L_i$ 为 $K_{d,d}$ 的哈密顿圈；

b) 若 d 是奇数，则 $L \cup L_d$ 也是哈密顿圈；

c) 若 $d \equiv 0 \pmod 4$ 或 $d = 6$，则 $L \cup L_d$ 不是哈密顿圈.

定理 6.46 告诉我们，D 的两两相容欧拉迹的最大个数 N_T 的一些信息，即当 $d = \dfrac{1}{2}\delta(D) > 2, d-2 \leqslant N_T \leqslant d-1$且 d 为奇数时，$N_T = d-1$，而当 $d = 4$

时，$N_T = d-2$ (图 6.15). 但是因为在把处理无向图的方法搬来时，我们丢失了某些信息，故这还是最好的结果.

考虑 $K_{d,d}$ 的最初的 1- 因子分解问题. 设 $L=\{v_iv_i' \mid i=1,\cdots,d\}$ 表示 $K_{d,d}$ 的 1- 因子，其中 $V:=\{v_i \mid i=1,\cdots,d\}, V':=\{v_i' \mid i=1,\cdots,d\}$ 且 $\{V,V'\}$ 是 $K_{d,d}$ 的点二部划分. 定向 $K_{d,d}$ 的边，使得 L 的元素从 V' 到 V 定向，而 $E(K_{d,d})-L$ 的元素从 V 到 V' 定向，记 $K_{d,d}^0$ 是这样得到的有向图. 于是 $K_{d,d}$ 的含 L 的每个哈密顿圈都是 $K_{d,d}^0$ 的哈密顿圈 (反之也对). 若在 $K_{d,d}^0$ 中收缩弧 $(v_i',v_i)\,(i=1,\cdots,d)$，则得到完全对称有向图 K_d^*，其哈密顿圈与 $K_{d,d}^0$ 的哈密顿圈一一对应 (因此，与 $K_{d,d}$ 的含 L 的哈密顿圈也一一对应). 因此，$K_{d,d}$ 的最初的 1- 因子分解问题 (叙述在本小节的开头) 与下面的问题等价："K_d^* 是否能分解成哈密顿圈". 由定理 3.51，只要 $d>1$ 且 $d\neq 4,6$，这是可能的，从而有以下结论:

定理 6.46a　设 L 为 $K_{d,d}(d\geqslant 2)$ 的一个 1- 因子. 若 $d\neq 4,6$，则存在 1- 因子分解 $\{L,L_2,\cdots,L_d\}$，使得对 $i=2,\cdots,d, L\cup L_i$ 为 $K_{d,d}$ 的哈密顿圈.

基于这个讨论的开头所述，下面的结果为定理 6.46a 的直接推论.

定理 6.47　设 D 为连通欧拉有向图且 D 的每个圈都为块，那么对 $d=\dfrac{1}{2}\delta(D)\geqslant 2$，$N_T$ 满足

若 $d\neq 4,6$，则 $N_T=d-1$;

若 $d=4,6$，则 $N_T=d-2$

(注意对 $d'>d$，由定理 6.46 和定理 6.46a 可知，$K_{d',d'}$ 至少有 $d-1$ 个不交的 1- 因子，每个 1- 因子定义了一个包含给定 1- 因子 L 的哈密顿圈).

对欧拉有向图要得到分别类似于定理 6.42 和推论 6.43 的结论. 自然地，我们叙述并证明 2- 部图的一个类似于定理 6.40 的结果 (也见 [BERM81b，定理 3.1]).

推论 6.48　假设具有 $2d>2$ 个顶点的简单 2- 部图 H 有 1- 因子，$\{A,B\}$ 为 H 的二部划分. 再假设对每个 $ab\notin E(H), a\in A, b\in B$ 有 $d_H(a)+d_H(b)\geqslant d+2$，那么 H 的每个 1- 因子含在 H 的一个哈密顿圈中.

证明　沿用定理 6.40 的证明. 因为 H 有 1- 因子，故在任何情形下总有 $|A|=|B|=d$. 注意由定理 6.46，推论 6.48 对 $K_{d,d}$ 成立，假设推论 6.48 对一般图不成立. 选择反例 H，使得 $V(H)$ 尽可能的小，在此条件下，使 $|E(H)|$ 尽可能的大，从而 $d>2$ 且对任意不相邻的 $a\in A, b\in B, H\cup\{ab\}$ 有一个含任意指定 1- 因子 L 的哈密顿圈 C. 于是 $C-\{ab\}$ 可以记为

$$C-\{ab\}=a_1,a_1b_1,b_1,b_1a_2,a_2,a_2b_2,\cdots,a_d,a_db_d,b_d,$$

其中 $a=a_1, b=b_d$ 且 $L=\{a_ib_i|i=1,\cdots,d\}$.

因为 H 是 2- 部图且 $a_1b_d\notin E(H)$，故由次条件

$$d_H(a_1) + d_H(b_d) \geqslant d + 2$$

推出存在某 $i\,(2 \leqslant i \leqslant d-1)$，使得

$$a_1b_i, a_ib_d \in E(H)$$

(注意 $C - \{ab\}$ 含有 d 条边 $e_j := a_jb_j$). 进一步，对满足 $a_jb_k, a_kb_j \notin E(H)$ 的 $e_j = a_jb_j, e_k = a_kb_k \in L$ 有

$$d_H(e_j) + d_H(e_k) = d_H(a_j) + d_H(b_j) + d_H(a_k) + d_H(b_k) \geqslant 2d + 4.$$

令 D_H 及 $D := D_H/L$ 如定理 6.40 的证明中定义 (用 H 取代 H_1)，那么前面的不等式给出，对 D 的每对不相邻的顶点 e_j, e_k 有

$$d_D(e_j) + d_D(e_k) \geqslant 2d = 2|V(D)|$$

(注意 $d_H(e_j) = d_D(e_j) + 2$). 进一步，因为对 $i = 1, \cdots, d-1, (b_i, a_{i+1}) \in A(D_H)$，故

$$A_P := \{(e_i, e_{i+1}) \mid i = 1, \cdots, d-1\} \subset A(D).$$

因此，$P_D := \langle A_P \rangle$ 为 D 的哈密顿路. 再进一步，$a_1b_i, a_ib_d \in E(H)$ 蕴涵 $(b_i, a_1), (b_d, a_i) \in D_H$，因而我们有 $(e_i, e_1), (e_d, e_i) \in A(D)$. 于是 $P_D \cup \{(e_i, e_1), (e_d, e_i)\}$ 为 D 的强连通支撑子有向图，即 D 是强连通的. 这与最后一个不等式允许应用 Meyniel 定理. 由 D 和 D_H 的定义，D 的哈密圈对应于 H 的含 L 的哈密顿圈. 这个矛盾证明了推论 6.48 成立.

推论 6.49 对 $d > 3$ 考虑 $K_{d,d}$，并且令 $L_0, L_1, \cdots, L_r$ 为 $K_{d,d}$ 的 1- 因子，其中 $r \leqslant \dfrac{d-2}{2}$，那么 $\left(K_{d,d} - \bigcup\limits_{i=0}^{r} L_i\right) \cup L_0$ 有含 L_0 的哈密顿圈.

证明 记 $L = L_0, H = \left(K_{d,d} - \bigcup\limits_{i=0}^{r} L_i\right) \cup L_0$，则有

$$d_H(v) \geqslant d - (r+1) + 1 = d - r.$$

因此，若 $ab \notin E(H)$，则

$$d_H(a) + d_H(b) \geqslant 2d - 2r \geqslant d + 2.$$

至此，推论 6.49 从推论 6.48 可得.

注意，若在推论 6.49 中用 $d \geqslant 3$ 和 $r \leqslant \max\left\{1, \dfrac{d-2}{2}\right\}$ 取代 d 和 r 的限制，则结论对 $d = 3$ 不成立. 我们需选择 L_1，使得 $|L_0 \cap L_1| = 1$. 然而，若 $L_0 \cap L_1 = \varnothing$，则这些更弱的限制允许有如推论 6.49 的相同的结论.

根据前面的讨论，应用由推论 6.41 得到定理 6.42 的同样的方法，我们能从推论 6.49 得到下面的结果.

定理 6.50 设 D 是 $\delta(D) > 6$ 的连通欧拉有向图，并且令 $X_1, \cdots, X_r$ 为 r 个转移系统，其中 $r \leqslant \dfrac{\delta(G) - 4}{4}$，那么 D 有与 $X_i\,(i = 1, \cdots, r)$ 相容的欧拉迹.

从定理 6.50 及推论 6.49 下面的注可推出类似于推论 6.43 的结果.

推论 6.51 设 D 是 $\delta(D) > 6$ 的连通欧拉有向图，那么 D 至少有 $\max\left\{2, \dfrac{\delta(D)}{4}\right\}$ 个两两相容的欧拉迹.

一般来说，这个两两相容欧拉迹的最大数目的下界是最好可能的 (见练习 6.4). 然而，鉴于定理 6.47，我们提出下面的猜想 (不过我们没有费心用 $K_{d,d}$ 中 1- 因子分解来阐述猜想 6.52).

猜想 6.52 $\delta(D) > 4$ 的连通欧拉有向图 D 中两两相容欧拉迹的最大数目至少是 $\dfrac{1}{2}\delta(D) - 2$.

注意到上述多数的结果出现在 [FLEI90a] 中.

当然，可试着将到目前为止本节所有的讨论应用到混合图中. 不过，在每个块为圈的情形下，我们面临的不再是寻找 K_{2d} 或 $K_{d,d}$ 的特殊类型的 1- 因子分解，而必须在 $2d$ 阶图 H 中找两两不交的 1- 因子 $L_1, \cdots, L_r$ 的最大数 r，使得对 $i = 1, \cdots, r$，$L_i \cup L$ 是哈密顿圈且 L 为 H 的指定的 1- 因子. 因为一般来说，H 不再是正则图，故它满足不等式 $K_{d,d} \subseteq H \subseteq K_{2d}$. 这个不等式是严格的，当且仅当这个混合图至少有一个含一条弧的块及至少有一个仅含边的块. 因为由定理 4.11 的割条件，若一个块含一条弧，则这条弧限制了这个块的每条边的定向. 对任意欧拉混合图，情况更复杂：在类似于推论 6.41 和推论 6.49 的情形下，含 L_0 的一条哈密顿圈 (L_0 对应于用 d 个 2- 价点取代 $2d$- 阶点 v) 将把一个连通欧拉混合图 M 变换到连通混合图 M_v. M_v 中割条件在每个点仍然满足，但整体不再满足，即我们不再知道 M_v 是否有欧拉迹 (与推论 6.41 后的叙述 (I) 比较). 事实上，甚至当 M 的每个块是圈时，这个问题也会产生. 因此，在混合图的情形下，如何确定两两相容欧拉迹的最大数目这个问题还不是很清楚.

下面以一个注来结束本节，即关于特殊类型欧拉迹的问题已归结为特殊类型哈密顿圈的问题 (某些后者已解决的问题推出某些前者的问题). 这是本节中选用的最一般的描述方法. 下一节将用另一种方式讨论与平面图中特殊类型欧拉迹有关的问题，并说明欧拉问题与哈密顿问题有怎样的关系.

6.3 平面欧拉图中的 A- 迹

在 6.1 节我们已经看到，非交叉欧拉迹与 A- 迹对连通 4- 正则图来说是一致

的 (对 $\Delta(G) \leqslant 4$ 的连通欧拉图也是一致的). 不过，尽管每个可嵌入在某曲面 $\mathcal{F}$ 的连通欧拉图有不交欧拉迹 (见引理 6.7)，这样的叙述对 A- 迹是不正确的，即便 $\mathcal{F}$ 是平面 (或等价地，$\mathcal{F}$ 是球面). 图 6.17 解释了这个事实，也表明 A- 迹的存在可能依赖于可平面图的实际嵌入.

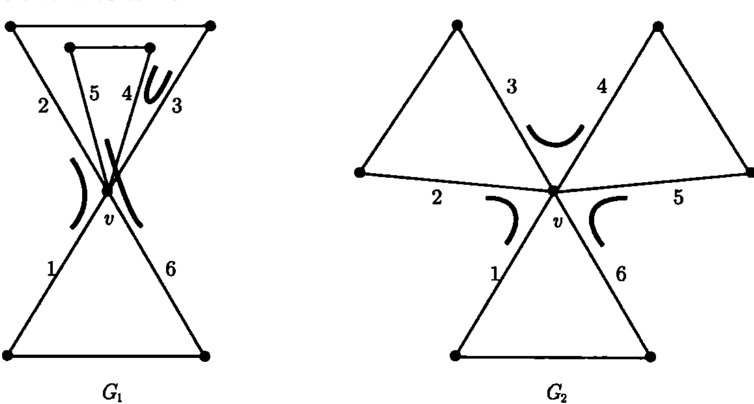


图 6.17 同一个可平面图的两个嵌入 G_1 和 G_2: G_1 没有 A- 迹 G_2 有 A- 迹，但 G_1 和 G_2 都有非交叉欧拉迹

在图 6.17 中，转移 $\{1',2'\},\{3',4'\},\{5',6'\}$ (图中用小弧标记) 定义了 G_2 的唯一 A- 迹，其中 $\{i' \mid i=1,2,\cdots,6\}=E_v^*$. 相同的转移定义了 G_1 的非交叉欧拉迹 T_1，但 T_1 不是 G_1 的 A- 迹. 事实上，若寻找 G_1 的 A- 迹时由指向 v 的边 1 开始，则必有对转移 $\{1',2'\}$(因为唯一适合转移的另一选择 $\{1',6'\}$ 使得图不连通). 因此，$\{3',4'\}$ 一定是 v 的下一个转移 (否则，$\{3',6'\}$ 使“内”三角形与图的其余部分不连通)，这样 $X(v)=\{\{1',2'\},\{3',4'\},\{5',6'\}\}$. 因为与 v 关联的边的循环序，$5'$ 和 $6'$ 不邻接，故 $X(v)$ 并非定义了 A- 迹，而是定义了非交叉欧拉迹 T_1(它可以说已经尽可能地接近于一个 A- 迹). 因此，G_1 根本没有 A- 迹.

图 6.17 也指出在一个有三个或更多的含点 v 的块的连通可平面欧拉图 G 中怎样避免 A- 迹的存在: 设 B_1,B_2,B_3 是 G 的三个这样的块，并且在平面上如下嵌入 G:

$$\text{当 } E(B_3)\cap \mathrm{bd}(F_\infty)=\{v\} \text{ 时，} E(B_1)\cap \mathrm{bd}(F_\infty)\neq \varnothing \neq E(B_2)\cap \mathrm{bd}(F_\infty),$$

并且存在一个面的边界 $\mathrm{bd}(F)$，使得

$$\mathrm{bd}(F)\cap E(B_2)\neq \varnothing \neq \mathrm{bd}(F)\cap E(B_3) \text{ 且 } E_v\cap \mathrm{bd}(F)\cap \mathrm{bd}(F_\infty)\neq \varnothing.$$

用讨论图 6.17 时所用的类似讨论可知，这样得到的平面嵌入没有 A- 迹. 然而，对特殊类型的点分裂，接下来关于 A- 迹的讨论理论上给出了图 6.17 和刚讨论的 G 的平面嵌入中不存在 A- 迹的相关答案.

在下面的讨论中，设 G 是连通欧拉平面图. 由于 G 是平面的，故对每个 $v\in$

$V(G)$，G 在平面上的嵌入给定了与 v 关联的边的逆时针的循环序，记作 $O^+(v) = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_d)$，其中 $d = d(v)$.

引理 6.53 假设 $\Delta(G) > 2$ 的平面欧拉图 G 有 A- 迹 T. 任意选定 $v \in V(G)$, $d = d(v) > 2$，并假设 $\{e'_1, e'_2\}$ 是 v 的由 T 定义的第一个转移. 不失一般性，$T = \cdots, e_1, v, e_2, \cdots$. 那么

$$T = \cdots, e_1, v, e_2, \cdots, e_3, v, e_4, \cdots, e_{d-1}, v, e_d, \cdots,$$

其中

$$O^+(v) = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_{d-1}, e'_d) \quad 或 \quad O^+(v) = (e'_d, e'_{d-1}, \cdots, e'_2, e'_1),$$

并且 $e_{2i} = e_{2i+1}$ 当且仅当 e_{2i} 是环，$i \in \left\{1, \cdots, \frac{1}{2}d\right\}$ (记 $e_{d+1} = e_1$).

证明 假设 T 有如下形式的扩展节 T':

$$T' = e_{2i-1}, v, e_{2i}, \cdots, f, v, g,$$

其中 e_{2i-1}, e_{2i}, f, g 是仅有的与 v 关联的 T' 的边，并且若 $2i = d$，则分别有 $f \neq e_{2i+1}, f \neq e_1$. 若有必要，则旋转 $O^+(v)$ 中的指标. 故可不失一般性地设 $i = 1$. 因此，$f = e_j$，其中 $j \in \{4, \cdots, d\}$，那么 T' 含有一个圈序列 C，其起点、终点均为 v 且含 e_2 和 e_j. 因此，若 $s(e_k), k = 1, 3$ 是 e_k 的细分点，则 $s(e_1)$ 位于 C 的外部当且仅当 $s(e_3)$ 位于 C 的内部. 由于假设 $i = 1$ 且可以循环地旋转序列 T 中的初始点，故不妨如下表示 T:

$$T = T'' \cup T''',$$

其中 T'' 是 T' 的起点，终点均为 v 且不含 e_1 和 g 的子序列，而 T''' 为 T 的剩余部分，即 T 的以 g 为第一条边，以 e_1 为最后一条边的子序列. 由构造，$e_3 \in T'''$. 因此，将 T''' 看成起点、终点均为 v 的闭曲线，从上面就得到 T''' 含开曲线 T_0，其端点为 $s(e_1)$ 和 $s(e_3)$. 由若尔当曲线定理 (定理 3.61) 得到 C 上存在点 w, 使得 T 的至少一个节 f_i, w, f_{i+1} 为 T''' 的节，并且细分点 $s(f_i), s(f_{i+1})$ 位于 C 的不同侧，从而 f_i 和 f_{i+1} 不属于 G 的同一个面的边界 (见推论3.61a). 这个矛盾推出引理 6.53 成立.

由引理 6.53 知，若已知 A- 迹 T 在 $v \in V(G)$ 的一个转移，就确定了 T 在 v 的其他转移，即若 $\{e'_1, e'_2\} \in X_T(v)$ 且 $O^+(v) = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_d)$ 或 $O^-(v) = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_d)$，则 $X_T(v) = \{\{e'_1, e'_2\}, \{e'_3, e'_4\}, \cdots, \{e'_{d-1}, e'_d\}\}$. 因此，更一般地可以说，

若 T 为 $\delta(G) > 2$ 的平面欧拉图 G 的一条 A- 迹，并且对任意选定的 $v \in V(G)$，$O^+(v) = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_{d-1}, e'_d\}$，则

$$\begin{aligned} &或者\ X_T(v) = \{\{e'_1, e'_2\}, \cdots, \{e'_{d-1}, e'_d\}\}, \\ &或者\ X_T(v) = \{\{e'_2, e'_3\}, \cdots, \{e'_d, e'_1\}\}. \end{aligned} \tag{I}$$

注意 (I) 的正确性 (隐含地) 依赖于若尔当曲线定理，而若尔当曲线定理对亏格不是 0 的曲面不成立. 然而，能对嵌入在任意曲面的图 G 定义 A 迹的概念. 事实上，G 的 A- 迹给出了由 (I) 表达的相同的局部信息.

另一方面，(I) 比引理 6.53 弱，因为引理 6.53 表明 A- 迹 T 由 G 的嵌入导出的循环次序的逆时针或顺时针方向来"选取"与 v 关联的边的. 当然到底选取哪种依赖于通过 T 的方向. 在任何情形下，一旦通过确定初始边及初始点选定了一个定向，那么 T 就定义了 $V = V(G)$ 的一个划分 $V = V^+ \cup V^-$，其中 V^+ (V^-) 恰含那些点 v，使得 T 在 v 点根据 $O^+(v)$ ($O^-(v)$)"选取"与 v 关联的边. 若 T 以相反的方向经过，这两个集 V^+ 和 V^- 自然地互换它们的作用，即上面 $V(G)$ 的划分 $\{V^+, V^-\}$ 由 T 唯一确定，其中 V^+, V^- 的意义为依赖于经过 T 的方向. 由此，产生如下问题：是否能得到独立于 T 的定向且不用 $O^+(v)$ 及 $O^-(v)$ 的 $V(G)$ 的划分. 我们利用定理 3.68 来说明这是可能的.

对 $\Delta(G) > 2$ 的平面欧拉图 G 考虑其 2- 面着色 (用 1 和 2 表示这两种颜色)，并且设 T 为 G 的 A- 迹. 任选 $v \in V(G)$，$d = d(v) > 2$，假设与 v 关联的半边标记为 $e_1', e_2', \cdots, e_d'$，使得 $O^+(v) = (e_1', e_2', \cdots, e_d')$. 进一步假设边界含 e_1 和 e_2 的面着色 1，那么对 $i = 1, \cdots, \frac{1}{2}d$，满足 $\{e_{2i-1}, e_{2i}\} \subseteq E(\mathrm{bd}(F_{2i-1}))$ ($\{e_{2i}, e_{2i+1}\} \subseteq E(\mathrm{bd}(F_{2i})))$ 的面 F_{2i-1} (F_{2i}) 着色 1 (2). 若将 v 沿着 $X_T(\mathrm{v})$ 分裂成 $k = \frac{1}{2}d$ 个 2- 价点 $v^{(1)}, \cdots, v^{(k)}$(即 $\{E^*_{v(i)} \mid i = 1, \cdots, k\} = X_T(v)$) 使得到的图 G_v 是平面的，则由 (I)，面 $F_{2i-2+\delta}\,(i = 1, \cdots, k)$ 在 G_v 中 (同伦) 不变，而面 $F_{2i+1-\delta}\,(i = 1, \cdots, k)$ 成为 G_v 的一个面，其中 $\delta = 1$ 还是 $\delta = 2$ 是由 $X_T(v)$ 的模式来定的 (图 6.18). 于是引进下面的定义 (在 2- 面着色中，着色 1 或 2 的面分别称为 1- 面或 2- 面).

定义 6.54 设 G 是 $\Delta(G) > 2$ 的平面欧拉 2- 面着色图，并且任意选定 $v \in V(G)$，$2k = d(v) > 2$. 假设 $O^+(v) = (e_1', e_2', \cdots, e_d')$ 且 e_1', e_2' 在一个 1- 面的边界上. 对 $\delta \in \{1, 2\}$，定义 $X_\delta(v) = \{\{e'_{2i-2+\delta}, e'_{2i-1+\delta}\} \mid i = 1, \cdots, k\}$ (记 $e'_{2k+1} = e'_1$)，构造平面图 G_v，使得 $E^*_{v(i)} = \{e'_{2i-2+\delta}, e'_{2i-1+\delta}\}\,(i = 1, \cdots, k)$，并且 G 的每个 δ-面 F 都有 $\mathrm{bd}(F)$ 在 G 和 G_v 中均为面边界. 那么称 G_v 为将$(\delta + 1)$**- 分裂** 应用到 $v \in V(G)$ 的结果. 这里若 $\delta = 2$，则令 $\delta + 1 = 1$ (图 6.18)[①].

---

① 结合定义 6.54 及前面的讨论，我们可以说若 v 为 G 的割点，则 $\mathrm{bd}(F_{2i-2+\delta})$ 可以是 G_v 的一个圈，即使它不是 G 的圈，它在 G_v 中通过 $\mathrm{bd}(F_{2i-2+\delta})$ 的分支的途径也与 G 的相应的途径之间存在 1-1 对应，即 $c_G(\mathrm{bd}(F_{2i-2+\delta})) = c_{G_v}(\mathrm{bd}(F_{2i-2+\delta}))$. 类似地，若 v 为 G 的割点，则对 $i = 1, \cdots, k$，$F_{2i+1-\delta}$ 可能是 G 的同一个面，因此，这个面也是 G_v 的一个面. 但在这种情形下，$c_G(\mathrm{bd}(F_{2i+1-\delta})) < c_{G_v}(\mathrm{bd}(F_{2i+1-\delta}))$. 用拓扑的观点，可以说从 G 到 G_v 的转换不改变 $F_{2i-2+\delta}\,(i = 1, \cdots, k)$ 的同伦性质. 而若对某个 $j \neq i, 1 \leqslant i, j \leqslant k$ 有 $F_{2i+1-\delta} = F_{2j+1-\delta}$，则这些性质会发生改变. 然而只有当 v 为 G 的割点时才需要这样的考虑.

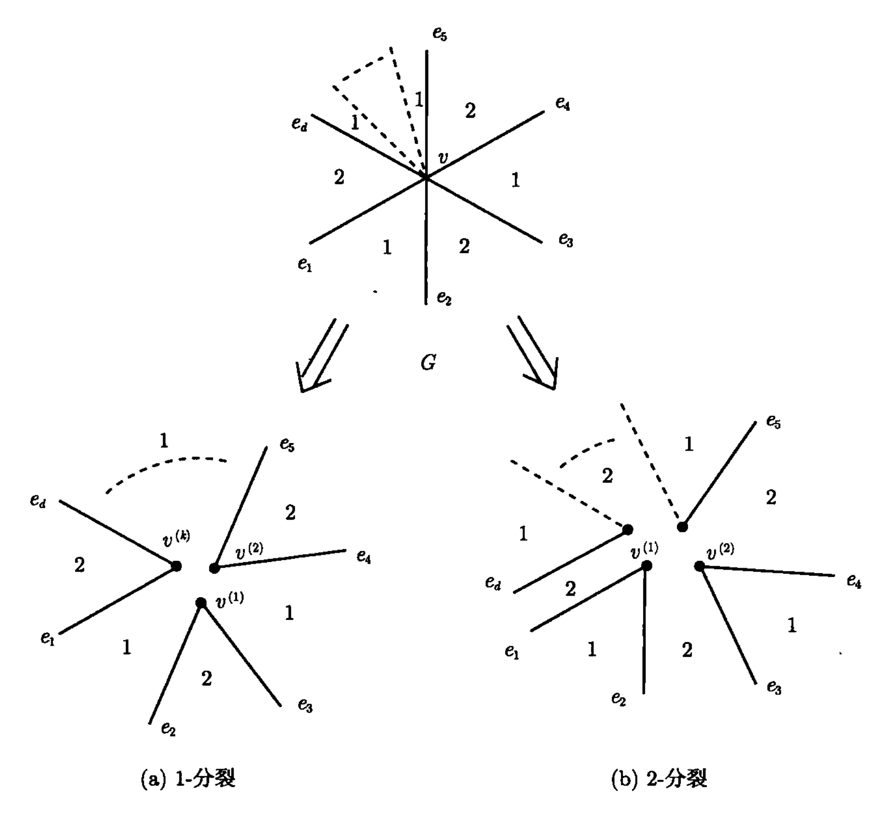


图 6.18　由 G 应用 δ- 分裂 ($\delta=1,2$) 到 $v\in V(G)$ 得到的图 G_v

根据定义 6.54 及其前面一段的讨论，可以说没有 2- 价点的平面欧拉图 G 的 A- 迹 T 导出 $V(G)$ 的一个划分 $\{V_1,V_2\}$，使得 $v\in V_\delta$ 当且仅当 $X_T(v)=X_{\delta+1}(v)$ (对 $\delta=2$ 置 $\delta+1=1$)，即对 $\delta=1,2$，V_δ 恰含那些 T 在其上导出 δ- 分裂的点. 当然，可能 $V_1=\varnothing$ 或 $V_2=\varnothing$，对上面的划分 $\{V^+,V^-\}$ 也一样 (图 6.17 中的图 G_2).

注意定义 6.54 中的 $O^+(v)$ 仅是为了便于使用. 正如图 6.18 所指出的，仅根据平面欧拉图 G 及它的一个固定的 2- 面着色就能定义 δ- 分裂 (见 [FLEI74a，定义 2]).

推论 6.55　设 G 为没有 2- 价点的平面欧拉 2- 面着色图，并且 G 有 A-迹 T. 令 $\{V^+,V^-\}$ 和 $\{V_1,V_2\}$ 为由 T 导出的 $V(G)$ 的两个划分 (如上)，那么 $\{V_1,V_2\}=\{V^+,V^-\}$.

证明　对 T 选择一个初始点 x 及一条初始边 $e=xy$，于是产生了 T 上的一个定向. 不失一般性，设沿着 e 从 x 到 y 时，e 右边着色 1. 有了 A- 迹的这个定向，我们直接地有下面的性质 (也见引理 6.53 和图 6.19):

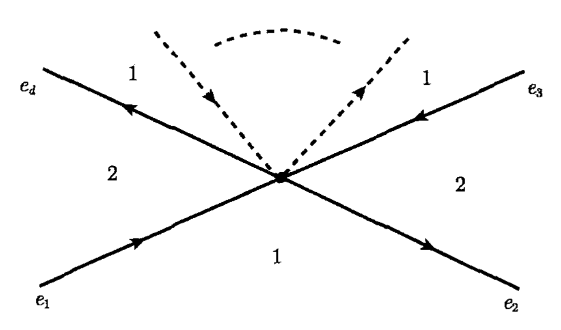


图 6.19 定向 A- 迹 T，弧的右边总着色 1

1) 对每个 $O^+(v)=(e'_1,e'_2,\cdots,e'_d)$, $d=d(v)$, e'_i 是面向 v 被通过当且仅当 e'_{i+1} 是背向 v 被通过 (置 $e'_{d+1}=e'_1$) 的;

2) 对每个 $f=uw\in E(G)$, 若 f 是从 u 到 w 被通过的, 则 f 右侧的面着色 1.

因此，T 在 v 点导出一个 1- 分裂当且仅当 $v\in V^-$ (由此，T 在 v 点导出一个 2- 分裂当且仅当 $v\in V^+$). 至此推论得证.

定义 6.56 设 G 是 $\delta(G)>2$ 的连通平面欧拉 2- 面着色图. $V(G)$ 的一个划分 $\{V',V''\}$ 称为 A- 划分当且仅当 G 有 A- 迹 T, 使得由 T 导出的点划分 $\{V_1,V_2\}$ 满足等式 $\{V',V''\}=\{V_1,V_2\}$.

当 G 为定义 6.56 中所描述的图时，考虑 $V(G)$ 的划分 $\{V',V''\}$. 怎样才能知道 $\{V',V''\}$ 是否是 A- 划分? 换句话说，我们要刻画 G 的 A- 划分. 为此，需引进某些记号. 任意选定 $v\in V(G)$，对 $\delta=1,2$，用 $G_{v,\delta}$ 记由 G 对 v 应用 δ- 分裂得到的 G_v (图 6.18). 对 $V_0=\{v_1,\cdots,v_k\}\subseteq V(G)$, $\delta\in\{1,2\}$，定义 $G_{V_0,\delta}=(\cdots((G_{v_1,\delta})_{v_2,\delta})\cdots)_{v_k,\delta}$. 若 $V_0=\varnothing$，则记 $G_{V_0,\delta}=G$，用这个记号并根据推论 5.10 和推论 5.13，立即得到下面的结果.

推论 6.57 设 G 是定义 6.56 中的图，令 $\{V',V''\}$ 为 $V(G)$ 的划分，则下列叙述等价:

1) $\{V',V''\}$ 是 A- 划分;

2) $(G_{V',1})_{V'',2}$ 和 $(G_{V',2})_{V'',1}$ 中至少一个为圈.

当然，可能 $(G_{V',2})_{V'',1}$ 不是圈，而 $(G_{V',1})_{V'',2}$ 是圈. 这可由图 6.20(a) 中所描述的八面体图说明. 若 $(G_{V',1})_{V'',2}$ 和 $(G_{V',2})_{V'',1}$ 都是圈，则称 A- 划分 $\{V',V''\}$ 是**完美的**. 图 6.20(b) 给出了一个这样的例子. 顺便注意到，[FLEI74a] 中的 A- 划分是这里的完美 A- 划分.

事实上，检查 $V(G)$ 的给定划分 $\{V',V''\}$ 是不是 A- 划分 (或完美 A- 划分)，不必判断 $(G_{V',1})_{V'',2}$ 或 $(G_{V',2})_{V'',1}$ 是否是连通的 (或两者是否都是连通的)，因为无论如何两图都是 2- 正则的. 为弄清楚这点，先叙述一个引理，其证明留作练习 (练习 6.15).

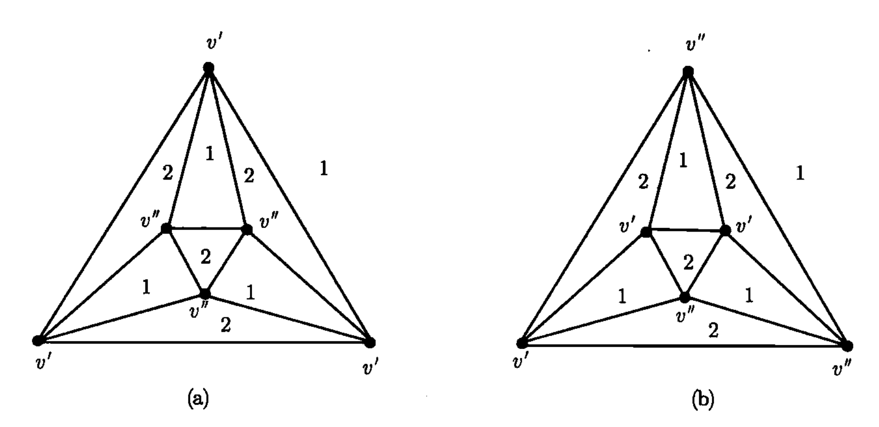


图 6.20 (a) 八面体图及它的一个非完美 A- 划分；(b) 八面体图及它的一个完美 A- 划分 (V' (V'') 的元素标记为 v' (v''))

引理 6.58 设 G 是一个连通图的平面 2- 面着色嵌入，这个连通图的每个块是与 G 的无界面的边界有一条公共边的圈，G 有一条 A- 迹 T. 进一步，若 G 的外面着色 1 (2)，则 T 在每个 $v \in V(G) - V_2(G)$ 导出一个 2- 分裂 (1- 分裂) 蕴涵 T 是唯一确定的.

有了引理 6.58，我们得到有 A- 迹的平面图的下列刻画.

定理 6.59 连通平面 2- 面着色欧拉图 G 有一条 A- 迹当且仅当对一个 $V_0 \subseteq V(G)$ 且 $\delta = 1$ 或 $\delta = 2$，$G_{V_0,\delta}$ 是连通的外平面图，使得 $G_{V_0,\delta}$ 的每个块是一个面边界①.

证明 假设 G 有 A- 迹 T. 设 $\{V_1, V_2\}$ 为由 T 导出的 $V(G) - V_2(G)$ 的划分，这里对 $\delta = 1, 2$，V_δ 恰含那些由 T 导出 δ- 分裂的点 (见定义 6.54 后面的讨论). 不失一般性，假设 G 的外 (无界) 面为 1- 面，并考虑 $H := G_{V_1,1}$. 对 $v \in V_1$，因为应用于 v 的 1- 分裂是由 T 导出的，因而 A- 迹 T 对应于 H 的 A- 迹 T_H (事实上，若将 T 和 T_H 写成边序列, 则 $T = T_H$). 这样 H 是连通的. 若 H 不是外平面图，或者它有一个不是面边界的块，则除了它的外面外，它有 1- 面 F_1. 因为在每个 $w \in V(H) - V_2(H)$，T_H 导出一个 2- 分裂，故 T_H 对应于 $H_1 = H_{V_{12},2}$ 的一条 A- 迹 T_1，其中 $V_{12} = V(\mathrm{bd}(F_1)) \cap V_2$. 另一方面，因为 2- 分裂不改变 1- 面的边界 (看成边序列)(图 6.18(b))，故 F_1 是 H_1 的除了外面以外的一个 1- 面，$\mathrm{bd}_{H_1}(F_1)$ 为一个圈且对每个 $x \in V(\mathrm{bd}_{H_1}(F_1)), d_{H_1}(x) = 2$，即 $\mathrm{bd}_{H_1}(F_1)$ 是 H_1 的非平凡连通分支，也即 H_1 不连通，这与 T_1 为 H_1 的欧拉迹矛盾，因而 H 为外平面图，每个块确实是一个面边界，并且对 $V_0 = V_1$ 和 $\delta = 1$，$G_{V_0,\delta}$ 有所需的性质.

① $G_{V_0,\delta}$ 是一种特殊的休斯密 (Husimi) 树，它通常被定义为每条边属于至多一个圈的连通图 (见 [HARA53a]，[HUSI50a]).

反过来，对 $V_0 \in V(G)$ 和 $\delta \in \{1,2\}$，假设 $G_{V_0,\delta}$ 是连通的外平面图，并且每个块为面边界. 由引理 6.58，$G_{V_0,\delta}$ 有一个 A- 迹 T_0，它对应于 G 的欧拉迹 T，并且 T 在 V_0 的每个元素导出一个 δ- 分裂. 因此，除了 2- 价点外，T 在 G 的每个点导出一个 1- 分裂或 2- 分裂. 因此 T 是 G 的 A- 迹. 定理得证.

从证明的第二部分我们不能得到：若 $G_{V_0,\delta}$ 的外面着色 1，则 G 的 A- 迹 T 对 V_0 的元素导出 1- 分裂. 因为可能 G 本身满足引理 6.58 的假设，从而 T 对任意 $V(G) - V_2(G)$ 的元素导出 2- 分裂.

图 6.21 表明存在没有 A 迹的连通外平面欧拉图.

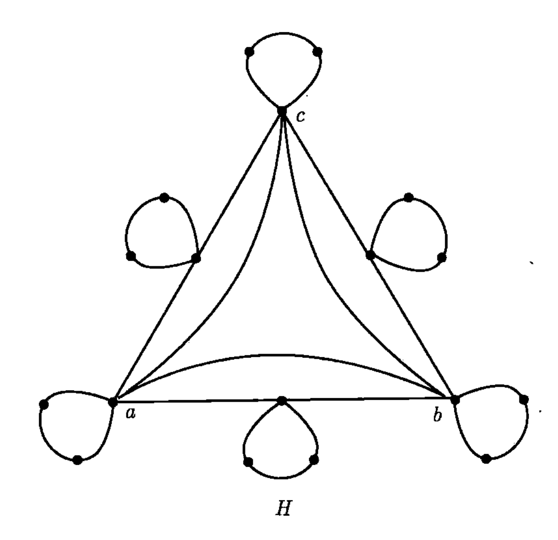


图 6.21 没有 A- 迹的连通外平面简单欧拉图 (注意 H 仅有 2-, 4- 和 6- 价点)

事实上，对图 6.21 中的图 H，若假设它的外面是 1- 面，则三角形 $\langle a,b,c\rangle$ 也是 1- 面 F_1 的边界. a,b,c 中任意一个 1- 分裂产生了一个不连通图，它的一个连通分支含有三角形，并且在 $H_{\{a,b,c\},2}$ 中，$E(\mathrm{bd}(F_1))$ 是一个非平凡分支的边集. 因此，H 不能有 A- 迹. 作为图 6.21 的思想的推广：若 G 是满足引理 6.58 假设的图，则存在连通的外平面简单欧拉图 H，它没有 A 迹且含同伦于 G 的子图 (在拓扑的意义上)，我们把这一证明留作练习 (练习 6.16).

然而，在围绕图 6.21 进行的讨论中考虑的图有割点并不奇怪，因为 [REGN76a] 已证明每个 2- 连通外平面简单欧拉图有 A- 迹. 下面称 $E(G) - E(\mathrm{bd}(F_\infty))$ 的元素为 G 的外面 F_∞ 的**内边**.

此外，我们将利用下面的引理. 为了简洁起见，把 δ- 分裂的概念推广到 2- 价点上，并称 T 在这样的点上导出一个 $\delta = 1$ 或 $\delta = 2$ 的 δ- 分裂，此时适当选择 $\delta \in \{1,2\}$.

引理 6.60　设 H 是平面欧拉 2- 面着色图，它是 (非平凡的) 块链，其外面 F_∞ 是 1- 面. 令 $B_1,\cdots,B_r$ 是 H 的块，使得 $B_i\cap B_j\neq\varnothing$ 当且仅当 $|i-j|\leqslant 1$. 进一步，假设对 $i=1,\cdots,r$，$E(\text{bd}(F_\infty))\cap E(B_i)\neq\varnothing$，那么 H 有 A- 迹当且仅当 B_i 有 A- 迹，这个 A- 迹在 H 的每个包含于 B_i 的割点导出一个 δ- 分裂.

证明　用 $x_{i,i+1}\,(i=1,\cdots,r-1)$ 记 H 的满足 $\{x_{i,i+1}\}=B_i\cap B_{i+1}$ 的割点. 进一步，令 $e_i,f_i,g_i,h_i\in E(B_i)$ 为满足

$$e_i,f_i\in E_{x_{i-1,i}}\cap\text{bd}(F_\infty),\quad g_i,h_i\in E_{x_{i,i+1}}\cap\text{bd}(F_\infty),\quad i=2,\cdots,r-1,$$

$$g_1,h_1\in E_{x_{1,2}}\cap\text{bd}(F_\infty),\quad e_r,f_r\in E_{x_{r-1,r}}\cap\text{bd}(F_\infty)$$

的那些边，并且不失一般性，满足 $O^+(x_{i-1,i})=(e_i',g_{i-1}',\cdots,h_{i-1}',f_i',\cdots)\,(i=2,\cdots,r)$，因而 g_{i-1},e_i 在过 $\text{bd}(F_\infty)$ 的途径的一边相继，h_{i-1},f_i 在通过 $\text{bd}(F_\infty)$ 的途径的另一边相继.

现假设 H 有 A- 迹 T. 由假设及上面选择的记号，并且不失一般性，设 T 沿着边 g_1 从 $x_{1,2}$ 开始，故 T 必然有下面的形式：

$$T=g_1,\cdots,h_1,f_2,\cdots,h_2,f_3,\cdots,h_{r-1},f_r,\cdots,e_r,g_{r-1},\cdots,e_{r-1},\cdots,e_3,g_2,\cdots,e_2\,.$$

注意到 T 为平面图的 A- 迹，故 T 在经过 $B_i\ (2\leqslant i\leqslant r)$ 的边之前通过 B_1 的所有边，同样地，(经过 f_r 后) 在经过 $B_i\ (2\leqslant i\leqslant r-1)$ 的任何其他边之前通过 B_r 的所有边，并且对 $i=2,\cdots,r-1$，T 在两个子迹 (即 $f_i,\cdots,h_i$ 和 $g_i,\cdots,e_i$) 中经过 B_i 的边. 因此，对 $i=1,\cdots,r$，T 导出 B_i 的 A- 迹 T_i 如下所示：

$$T_1=g_1,\cdots,h_1,\quad T_r=f_r,\cdots,e_r,\quad T_i=f_i,\cdots,h_i,g_i,\cdots,e_i,\ 2\leqslant i\leqslant r-1\,.$$

于是 T_i 在 $x_{i-1,i},x_{i,i+1}\in V(B_i)$ 导出一个 2- 分裂 (在情形 $d_{B_i}(x_{i-1,i})=2$ 或 $d_{B_i}(x_{i,i+1})=2$，我们也可以认为 T_i 的作用是导出一个 2- 分裂).

反过来，若 T_i 是 B_i 的 A- 迹，并且在 H 的属于 $B_i\,(i=1,\cdots,r)$ 的割点导出一个 2- 分裂. 那么，不失一般性，它能如上表示，并且上面的 T 能用分解 $T_i\,(i=2,\cdots,r-1)$ 到上面两个子迹来构造，由此，T 为 H 的 A- 迹. 引理证毕.

我们现在研究外平面图的一些性质.

引理 6.61　设 G 是 2- 连通的外平面欧拉简单图，并且它不是一个圈，它的外面 F_0 是 1- 面. 对 $d(v)>2$ 的某点 $v\in V(G)$，定义 $H:=G_{v,1}$. 那么 H 有下面的性质：

1) 若 $F_1\neq F_0$ 是 G 的 1- 面，满足 $v\in V(\text{bd}(F_1))$，则 $V(\text{bd}(F_1))-\{v\}$ 的每个点 w 都是 H 的割点；

2) H 的割点恰为 1) 中定义的点；

3) H 是非平凡的块链.

证明 为证 1)，注意到 G 的外平面性使得 $v,w\in V(\mathrm{bd}(F_1))\cap V(\mathrm{bd}(F_0))$，即平面上存在两条简单开曲线 $\mathcal{C}_0,\mathcal{C}_1$，使得

a) $\mathcal{C}_i\cap G=\{v,w\},i=0,1$；

b) $\mathcal{C}_i-\{v,w\}\,(i=0,1)$ 位于面 F_i 的内部，

因此有

c) $\mathcal{C}:=\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1$ 是平面上满足 $\mathcal{C}\cap G=\{v,w\}$ 的简单闭曲线.

由构造及若尔当曲线定理，$\mathcal{C}$ 将 $F_i-\mathcal{C}\,(i=0,1)$ 分成两部分. 它们在 $\mathcal{C}$ 的不同侧. 由此及 F_0 和 F_1 是 1- 面得到 $\mathcal{C}$ 的每一侧分别含有与 v 和 w 关联的正偶数条边. 因为 G 为简单图，故 $\mathcal{C}$ 的每一侧至少含有 G 的一个点，即 v 和 w 分离 G. 更确切地说，G 能表示为

$$G=G'\cup G'',$$

其中

$$G'\cap G''=\{v,w\}$$

且

$$d_{G'}(v)\equiv d_{G'}(w)\equiv d_{G''}(v)\equiv d_{G''}(w)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2). \tag{$*$}$$

因此，G' 和 G'' 位于 $\mathcal{C}$ 的不同侧 (当然除了位于 $\mathcal{C}$ 上的 v 和 w). 于是若将 v 分裂为 v' 和 v''，使得 $E_{v'}=E_v\cap E(G')$，$E_{v''}=E_v\cap E(G'')$，并且 v' (v'') 与 G' (G'') 位于 $\mathcal{C}$ 的同一侧，这样构成的平面图 H_1 可记为

$$H_1=H_1'\cup H_1'',\quad H_1'\cap H_1''=\{w\},$$

并且由 $(*)$, H_1',H_1'' 和 H_1 都是连通的欧拉图. 此外，w 是 H_1 仅有的位于 $\mathcal{C}$ 上的元素 (因此，除 w 外 H_1' 和 H_1'' 位于 $\mathcal{C}$ 的不同侧). 由构造，w 为 H_1 的割点. 还是由上面的构造，

$$H:=G_{v,1}=((H_1)_{v',1})_{v'',1}$$

且 H 可以写为

$$H=H'\cup H'',\quad H'\cap H''=\{w\}$$

且

$$H'=(H_1')_{v',1},\quad H''=(H_1'')_{v'',1},$$

即除了 w 外，H' 和 H'' 位于 $\mathcal{C}$ 的不同侧. 这也将 w 归为 H 的割点.

接下来证明性质 2).

首先，从 v 的 1- 分裂产生的 $k\left(=\dfrac{1}{2}d_G(v)\right)$ 个 2- 价点 $v^{(i)}\,(i=1,\cdots,k)$ 不可能为 H 的割点，否则，$E_{v^{(i)}}$ 是 H 的两桥构成的集，与 H 是欧拉图矛盾. 现在考虑路

$$P_0=\mathrm{bd}(F_0)-v\subset H\cap G,$$

并且若 $F_1 \neq F_0$ 为 G 的 1- 面，$v \in V(\mathrm{bd}(F_1))$，则依条件 $x \notin V(\mathrm{bd}(F_1))$ 来选择 $x \in V(P_0)$. 由上及 1)，只要证明 x 不是 H 的割点. 在任何情形下，x 的选择总有 $vx \notin E_v - \{e_1, e_d\}$，其中 $\{e_1, e_d\} = E_v \cap E(\mathrm{bd}(F_0))$.

设路 P_1 和 P_2 如下定义:

$$P_0 = P_1 \cup P_2, \quad P_1 \cap P_2 = x$$

(可能 $E(P_1) = \varnothing$ 或 $E(P_2) = \varnothing$). 分两种情况考虑.

a) 假设存在 $x_i \in V(P_i) - \{x\}\,(i = 1, 2)$，使得或者 $x_1x_2 \in E(H)$，或者对某个 $j \in \{1, \cdots, k\}, x_1v^{(j)}, x_2v^{(j)} \in E(H)$. 那么令 $P_3 = P_3(x_1, x_2)$ 为 P_0 上连接 x_1 和 x_2 的路，则有 $x \in V(P_3) - \{x_1, x_2\}$. 如下定义 H 的圈 C_j:

$$\text{若 } x_1x_2 \in E(H), \text{ 则 } C_j = \langle E(P_3) \cup \{x_1x_2\}\rangle; \text{ 否则, } C_j = \langle E(P_3) \cup E_{v^{(j)}}\rangle$$

(注意若 $x_1x_2 \notin E(H)$，则 $\{x_1v^{(j)}, x_2v^{(j)}\} = E_{v^{(j)}}$). 在任何情形下，$H^{(j)} := \langle V(C_j)\rangle$ 是 H 的 2- 连通子图. 事实上，$C_j \subset \mathrm{bd}(F_\infty)$，其中 F_∞ 为 H 的无界的 (外) 面. 因为 H 和 $H^{(j)} \subset H$ 也是外平面且 C_j 为 $H^{(j)}$ 的外面的边界，故对每个 $u \in V(C_j) - \{x_1, x_2, v^{(j)}\}$ 有 $E_u \subset E(H^{(j)})$ (注意 $E_u \cap E(P_3)$ 的元素在 $O^+(u)$ 中相继). 由于 $H^{(j)}$ 为 H 的 2- 连通子图，从而为 H 的一个块的子图，故 u 不能为 H 的割点. 注意到

$$V(C_j) - \{x_1, x_2, v^{(j)}\} = V(P_3) - \{x_1, x_2\},$$

可以得知 x 为这些点 u 之一，因此，x 不是 H 的割点.

b) 假设不存在具有 a) 中叙述的性质的 $x_i \in V(P_i) - \{x\}\,(i = 1, 2)$，即得下列等式成立:

$$E(G) = E_1 \cup E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \varnothing, \quad E_i = E(\langle V(P_i) \cup \{v\}\rangle), \; i = 1, 2 \text{ ①}.$$

因此，首先假设 $E(P_1) \neq \varnothing \neq E(P_2)$，于是 v 和 x 分离 G. 此外，这两个等式甚至蕴涵了 G 中存在面 $F \neq F_0$，使得 $v, x \in V(bd(F))$②. 由 x 的选择，F 不能是 1- 面，因此，在 G 和 H 中，它是 2- 面. 于是对某个 $j \in \{1, \cdots, k\}$，$v^{(j)} \in V(\mathrm{bd}(F)) \cap V(H)$. 类似于情形 a)，令 $P_3 = P_3(x_1, x_2) \subset P_0$ 表示含 x 的由 $\{v^{(j)}x_1, v^{(j)}x_2\} = E_{v^{(j)}}$ 定义的路. 使用相同的符号，如情形 a)，定义 C_j 和 $H^{(j)}$，则有 $C_j \subset \mathrm{bd}(F_\infty)$，并且 C_j 在 G 和 H 中是圈. 继续如情形 a) 的讨论，若存在 $u \in V(P_3) - \{x_1, x_2\}$，使得 $x = u$，则 x 不是 H 的割点. 由此及 x 的选择知，$vx \notin E_v - \{e_1, e_d\}$，我们导出下面的结论: $x \in \{x_1, x_2\}$，因此，$vx \in E_v \subset E(G)$，于是有 $vx \in \{e_1, e_d\}$，因而或者 $E(P_1) = \varnothing$，或者 $E(P_2) = \varnothing$. 不失一般性，令 $vx = e_1$. 设 x' 表示

---

① 注意在 P_1 的定义中，并未说 P_0 中的路 P_1 在 x 的“左边”还是“右边”，因此，不失一般性，我们能在最后的等式的两边写相同的指标 i.

② 这个推导对 2- 连通平面图的每个分离点对都是正确的.

$V(G)-\{v\}$ 的与 e_2 关联的元素，它由 $O^+(v)=(e'_1,e'_2,\cdots,e'_d)$ 定义，并且在这种情形中，令 $P_3=P_3(x,x')\subset P_0$ 为 P_0 中连接 x 和 x' 的路. 再用前面的符号并注意在这种情形 $j=1$，用前面同样的方式定义圈 C_1，它是 $H^{(1)}$ 的外面的边界，和前面一样，$H^{(1)}:=\langle V(C_1)\rangle$ 为 H 的 2- 连通外平面子图. 但在此情形下，我们有 $E_x\subset E(H^{(1)})$，因为 C_1 能表示为

$$C_1=P'_3\cup\{e_2\},\quad 其中\ P'_3=P_3\cup\{v,vx\}.$$

这给出情形 a) 的情况，而 v 和 x' 起了 x_1 和 x_2 所起的作用，即 x 不是 P'_3 的端点. 因此，如前一样，$E_x\subset E(H^{(1)})$. 由此，x 不为 H 的割点. 这就完成了性质 2) 的证明.

为了证明 H 是非平凡的块链，再次考虑性质 2) 的证明开始时所定义的 P_0，令 x_1,x,x_2 为 P_0 上依此次序的三个不同点. 我们断言：若 x_1,x_2 属于 H 的同一个块 B，则 x 不是 H 的割点.

由于 H 是欧拉简单图，故 B 为 2- 连通的. 因此，B 中存在一个圈 C，使得 $x_1,x_2\in V(C)$. 对 P_0 的子路 $P_3=P_3(x_1,x_2)$，用

$$B_1:=C\cup P_3$$

来定义 H 的 2- 连通子图 B_1 (可能 $B_1=C$. 若 $B_1\neq C$，则 $B_1\neq B$). 在任何情形下，由于 $C\subseteq B$ 且 $\kappa(B_1)\geqslant 2$，故 $B_1\subseteq B$. 由于 $x\in V(P_3)$，也有 $x\in V(B_1)$，因此，$x\in V(B)$. 此外，$P_3\subset B$ 蕴涵 $P_3\subset \mathrm{bd}(F^*)$，其中 F^* 是外平面图 B 的无界 (外) 面. 同前面一样，注意到 $E_x\cap E(P_3)$ 的元素在 $O^+(x)$ 上相继，因此，$E_x\subset E(B)$，即 x 不是 H 上的割点. 也就是说，由于 $v^{(j)}$ $(j=1,\cdots,k)$ 不是 H 的割点，又由于 $V(P_0)=V(H)-\{v^{(j)}\mid j=1,\cdots,k\}$，故 H 的块至多含 H 的两个割点. 因此，由于 H 是连通的，但是不是 2- 连通的，又由于 H 是简单图，故得到 H 的割点属于 H 的两个块，即 $\mathrm{bc}(H)$ 是非平凡路. 这蕴涵了性质 3) 的正确性，从而完成引理 6.61 的证明.

最后证明 2- 连通外平面图的一个性质.

引理 6.62 设 B 为 2- 连通外平面简单图，B 的外面为 F_∞，令 $B^-=B-e$，其中 $e=xy\in E(\mathrm{bd}(F_\infty))$. 用 $F_2\neq F_\infty$ 记 B 的满足 $e\in E(\mathrm{bd}(F_2))$ 的另一面. 那么 B^- 有下列性质：

1) $V(\mathrm{bd}(F_2))-\{x,y\}$ 为 B^- 的割点集；

2) B^- 是 (非平凡的) 块链，x,y 属于 B^- 的不同的端块，并且它们不是 B^- 的割点.

证明 若 B 是圈，即若 B^- 是路，则引理显然成立. 因此，假设 B 不是圈. $V(\mathrm{bd}(F_2))-\{x,y\}$ 的任意点 w 为 B^- 的割点：这从 $w\in V(bd(F_2))\cap V(bd(F_\infty))$ 和 $xy\in E(bd(F_2))\cap E(bd(F_\infty))$ 的事实得到，这个事实蕴涵了存在平面简单闭曲线

C，它除了 w 及边 xy 的恰好一个端点外不含 B 的任何元素 (将 xy 看成开单位区间 $(0,1)$ 的拓扑象)，于是 x,y 位于 C 的不同侧，因此，B^- 中从 x 到 y 的每条路都经过 w，即 w 不是 B^- 的割点. 注意因为 G 为简单图，$V(\mathrm{bd}(F_2))-\{x,y\}\notin\varnothing$.

现令 z 为 B^- 的任一割点. 因为 B 是 2- 连通的而 B^- 不是 2- 连通的，故由定理 3.32 得 B^- 为非平凡块链，满足 x,y 属于 B^- 的不同的端块且它们不是 B^- 的割点. 因此，B^- 的每条路 $P(x,y)$ 含 z，于是 B 的每个含 xy 的圈也含 z. 由于 $\mathrm{bd}(F_2)$ 是这样的一个圈，又由于 x,y 不是 B^- 的割点，故 $z\in V(\mathrm{bd}(F_2))-\{x,y\}$. 引理得证.

现转到瑞格尼尔 (Regner) 的外平面欧拉图中有关 A- 迹的结果.

定理 6.63　设 G 是 2- 连通的外平面简单欧拉图，并考虑 G 的一个 2- 面着色，使得外面 F_0 是 1- 面. 任意选择 $v\in V(\mathrm{bd}(F_0)), d(v)>2$(如果存在)，那么 G 有导出 v 的 1- 分裂的 A- 迹.

证明　若 G 仅有 2- 价点，则它是一个圈，沿着这个圈便有一个 A 迹，因而能假设 G 至少有一个点其价大于 2. 注意到 G 是 2- 连通的简单图，在这种情形下便有 G 至少有三个价大于 2 的点. 因此，满足定理条件的不是圈的最小图 G^0 恰有三个 4- 价点及三个 2- 价点，它可以认为是从八面体图的平面嵌入中删去外面边界的边得到的 (图 6.22). v 的 1- 分裂产生图 $G^0_{v,1}$，它恰有两个 4- 价点 x,y，并且它们必为 $G^0_{v,1}$ 的割点. 事实上，$G^0_{v,1}$ 满足引理 6.58 的假设条件，因此，G^0 有 A- 迹 T^0，它导出 v 的一个 1- 分裂及 x,y 的 2- 分裂. 利用同样的讨论得到，若 G 是同胚于 G^0 的外平面图，则 G 有一个 A- 迹 T，它导出选定点 v 的一个 1- 分裂及其他两个 4- 价点的 2- 分裂.

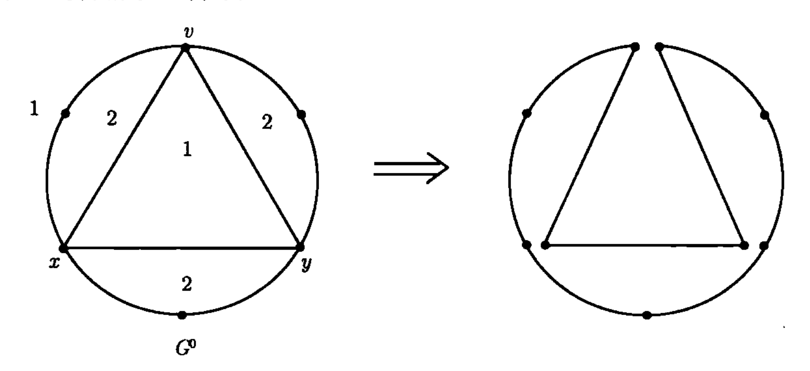


图 6.22　存在导出 v 的 1- 分裂的 2- 连通外平面欧拉图 G^0

现在使用归纳法. 考虑图 G，它满足定理的假设条件且有 $n(>3)$ 个价大于 2 的点，假设定理对所有相应的至多有 $n-1$ 个这样点的图 H 成立.

考虑 G 中的选定点 v 及 $O^+(v)=(e_1',e_2',\cdots,e_d')$，其中 $d=d(v)>2$，并且不

失一般性，假设 $e_1, e_d \in E(\mathrm{bd}(F_0))$，其中 F_0 为 G 的外面. 构造 $H = G_{v,1}$ 且记 $P_0 = \mathrm{bd}(F_0) - v$. 在任何情形下，$H$ 是连通的外平面欧拉图.

若根据 P_0 上出现的次序，记 H 的割点为 $x_1, \cdots, x_r$，则利用证明引理 6.61 性质 3) 的讨论得到，x_i 和 x_j 属于 H 的相同块当且仅当 $|i-j|=1$. 因此，能用 $B_1, \cdots, B_{r+1}$ 记 H 的块，使得 $x_1 \in V(B_1)$, $x_r \in V(B_{r+1})$ 且 $x_{i-1}, x_i \in V(B_i)\,(2 \leqslant i \leqslant r)$. 至于 $v^{(j)}\,(j=1,\cdots,k)d(v)=2k$ 在这些 $B_i\,(i=1,\cdots,r+1)$ 中的分布，因为 G 是 2- 连通的，并且由 $v^{(j)}$ 的定义，有

$$|\{v^{(1)}, v^{(k)}\} \cap V(B_1)| = |\{v^{(1)}, v^{(k)}\} \cap V(B_{r+1})| = 1.$$

不失一般性，$v^{(1)} \in V(B_1), v^{(k)} \in v(B_{r+1})$ (注意记号 $B_i\,(i=1,\cdots,r+1)$ 能“从左到右”也能“从右到左”选择). 对 $j=2,\cdots,k-1$，令 i_j 表示满足 $v^{(j)} \in V(B_{i_j})$ 的指标. 当然，H 中也许存在不含任何 $v^{(j)}\,(j=1,\cdots,k)$ 的块. 但对 $j \neq m$ 有 $i_j \neq i_m$，因为在与 $E_{v^{(j)}} \cup E_{v^{(m)}}$ 的元素关联的 P_0 的 4 个点中，有两个为 H 的割点，这两个割点中的任一个都将剩下的两个点相互分离 (见引理 6.61 性质 3) 的证明，并注意 G 是简单图，并且由引理 6.61 性质 1) 知，与 $E_v - \{e_1, e_d\}$ 的一个 e 关联的 P_0 的点为 H 的割点). 从 G 的外平面嵌入及 $v^{(j)}\,(j=1,\cdots,k)$ 的定义得到，若 $j<m$，则 $i_j < i_m$. 除了 $x_i\,(i=1,\cdots,r)$ 外，引进 x_0 和 x_{r+1}，在 G 中，它们由 $vx_0 = e_1$ 和 $vx_{x+1} = e_d$ 定义. 这样 $B_i \cap \{x_j \mid j=0,\cdots,r+1\} = \{x_{i-1}, x_i\}$. 图 6.23 说明了 H 的结构，它从引理 6.61 及上面的讨论得到.

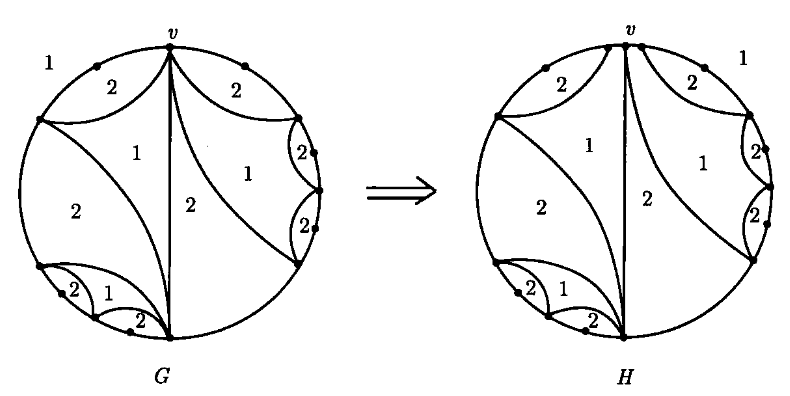


图 6.23 图 G 和 $H = G_{v,1}$

块链 H 的外面 F_∞ 是 1- 面，且 $P_0 \subset \mathrm{bd}(F_\infty)$. 此外，因为 $E(B_i) \cap E(P_0) \neq \varnothing$，故 $\mathrm{bd}(F_\infty) \cap E(B_i) \neq \varnothing\,(i=1,\cdots,r+1)$. 这与所选的记号允许利用引理 6.60. 因此，G 的导出 v 的 1- 分裂的 A- 迹必然导出 $x_1, \cdots, x_r$ 的 2- 分裂. 另一方面，若能证明 B_i 中存在导出 x_{i-1} 和 $x_i\,(i=1,\cdots,r+1)$ 的 2- 分裂的 A- 迹，则由引理 6.60，H 有 A- 迹，等价地说，G 有导出 v 的 1- 分裂的 A- 迹. 因此，只要证明

$(B_i)_{\{x_{i-1},x_i\},2}$ 有 A- 迹，就能完成定理的证明. 为此，任意固定 $i \in \{1,\cdots,r+1\}$ 并考虑 B_i，根据 B_i 在 H 中的位置及结构，考虑下面的情形.

(I) $V(B_i) \cap \{v^{(j)} \mid j = 1,\cdots,k\} = \varnothing$.

为简便起见，记 $B = B_i, x = x_{i-1}, y = x_i$. 令 $\Delta_1 = \langle x, v, t_1\rangle, \Delta_2 = \langle y, v, t_2\rangle$ 是两个三角形，其中 $t_1, t_2 \notin V(G)$，并构造可平面图

$$B^+ = B \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$$

的平面嵌入，使得 t_1 和 t_2 为 B^+ 的 2- 价点，并且位于 B^+ 的无界面的边界上 (图 6.24). 注意 B 的无界面 F'_∞ 有

$$V(\mathrm{bd}(F'_\infty)) = V(P(x,y)), \quad P(x,y) = \mathrm{bd}(F'_\infty) \cap P_0;$$

否则，$P_0 \cup \{e_1, e_d\} = \mathrm{bd}(F_0)$ 是 G 中的圈，它的有界区域含有圈 $\mathrm{bd}(F'_\infty)$ 的点，与 G 是外平面图矛盾. 因此，上面定义的并用图 6.24 来说明的 B^+ 的嵌入确实是外平面的. 由于 B 是 2- 连通的，类似地可以推出 $P'(x,y) := \mathrm{bd}(F'_\infty) - P(x,y)$ 外，除了 xy 外，不含边 (图 6.24).

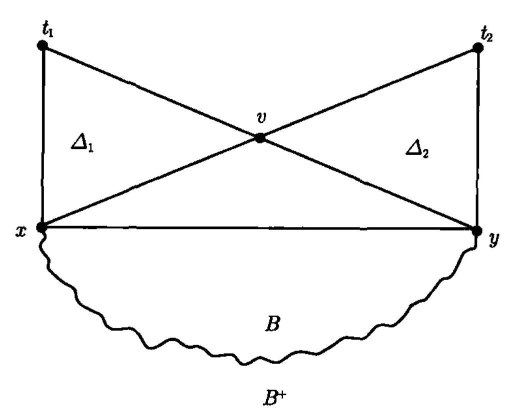


图 6.24　从外平面图 B 上增加三角形 Δ_1 和 Δ_2 构造外平面图 B^+

现假设 B 至多有 $n-2$ 个价大于 2 的点，那么 B^+ 至多有 $n-1$ 个这样的点. 因此，对 B^+ 应用定理得到 B^+ 的一个导出 v 的 1- 分裂的 A- 迹 (B^+ 的 2- 面着色由 G 的 2- 面着色通过 B 的导出 2- 面着色导出). 注意到边序列 T^+ 也能看成 $B^+_{v,1}$ 的 A- 迹，我们用引理 6.60 得到，B 有 A- 迹 T，使得由 $X_T(x)$ 和 $X_T(y)$ 定义的点分裂是 2- 分裂.

然而，若 B 恰有 $n-1$ 个价大于 2 的点，则不能对如上构造的 B^+ 应用归纳假设，在这种情形下，我们需要用不同的方法. 考虑 B 的满足 $xy \in \mathrm{bd}(F_2)$ 的 2- 面 F_2(实际上它也是 G 的 2- 面)，并构造 $B^- = B - \{xy\}$.

由引理 6.62，将块链 B^- 写出成它的块的并，

$$B^- = B_1^- \cup \cdots \cup B_t^-,$$

其中 $t = |V(\mathrm{bd}(F_2))| - 1$ 且 $B_i^- \cap B_j^- \neq \varnothing$ 当且仅当 $|i-j| = 1$. 进一步，对 $j = 1, \cdots, t-1$，定义

$$\{w_j\} = B_j^- \cap B_{j+1}^-,$$

由引理 6.62，$w_j \in V(\mathrm{bd}(F_2)) - \{x, y\}$. 此外，记 $w_0 = x, w_t = y$(不失一般性，$x \in B_1^-, y \in B_t^-$). 注意到

$$d_B - (z) \equiv 1 \pmod 2 \quad 当且仅当 \quad z \in \{x, y\}.$$

我们有对 $j \in J := \{1, \cdots, t\}$，

$$d_{B_j^-}(w_{j-1}) \equiv d_{B_j^-}(w_j) \equiv 1 \pmod 2),$$

$$若\ u \neq w_{j-1}, w_j,\ 则\ d_{B_j^-}(u) \equiv 0 \pmod 2).$$

由于 B 是外平面且 $V(\mathrm{bd}(F_2)) = \{w_j \mid j = 0, \cdots, t\}$，因此，

$$E(\mathrm{bd}(F_2)) - \{x, y\} = \{w_{j-1}w_j \mid j \in J\},$$

从而对 $j \in J$ 有 $w_{j-1}w_j \in E(B_j^-)$，并且由上面的同余，$B_j' := B_j^- - \{w_{j-1}, w_j\}$ 是欧拉的. 当然，可能对某个 (但不是全部)$j \in J, E(B_j') = \varnothing$. 考虑 $J_0 := \{j \in J \mid E(B_j') \neq \varnothing\}$，并注意到 B_j^- 是 B^- 的块，故 B_j^- 为 2- 连通的，由此，B_j' 为连通的欧拉外平面图. 由证明引理 6.62 中所用的同样的理由，能够得到 B_j' 是一个非平凡的块链，这样它有割点且 w_{j-1}, w_j 属于 B_j' 的不同的端块且不是 B_j' 的割点.

概括上面引理 6.62 的应用，B 能表示为

$$B = \mathrm{bd}(F_2) \cup \bigcup_{j \in J_0} B_j',$$

其中 $B_j' \,(j \in J_0)$ 是非平凡的欧拉块链. 任何两个这样的块链至多有一个公共点，并且这个公共点属于 $V(\mathrm{bd}(F_2))$.

图 6.25 说明了 B 的这个结构.

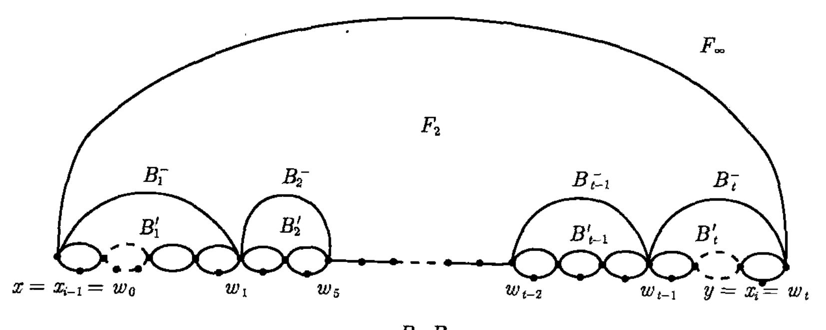


图 6.25 H 的块 $B = B_i, B - \{xy\}$ 的非欧拉块 $B_i^- \,(i \in J)$ 和 $B_j' - \{w_{j-1}w_j\}$ 的欧拉块链 $B_j' \,(j \in J_0)$

我们的目的是对每个 $j \in J_0$ 找两个子迹，它们覆盖了 B'_j，并且用圈 $\mathrm{bd}(F_2)$ 把这两个子迹联结起来，会导出 B 的所需的 A- 迹. 为此，令 c_j 为 B'_j 的任一割点. 正如从 B 定义 B^+ (图 6.24)，我们能对每个 $j \in J_0$ 构造 2- 连通的外平面欧拉图 B_j^+：把两个三角形 $\Delta_1^{(j)} = \langle w_{j-1}, p, t_1 \rangle, \Delta_2^{(j)} = \langle w_j, p, t_2 \rangle$ 分别在 w_{j-1}, w_j 联到 B'_j 上，其中 $p, t_1, t_2 \notin V(G)$ 且 t_1, t_2 是 B_j^+ 的 2- 价点. 若把这个结构与图 6.24 中说明的结构比较，则有 w_{j-1} 代替了 x，w_j 代替了 y，p 代替了 v 和 B'_j 代替了 B. 不在乎 B 是 2- 连通的，而 B'_j 是块链 (因而不能含 $w_{j-1}w_j$) 这个事实.

在任何情况下，B_j^+ 有 $n_j^+ (< n)$ 个度大于 2 的点，这可从 B^- 是非平凡块链这个事实得到. 由归纳假设，B_j^+ 有导出 c_j 的 1- 分裂的 A- 迹 T_j^+. 由引理 6.60，T_j^+ 在 w_{j-1}, w_j 和 p 导出一个 2- 分裂 (注意 $(B_j^+)_{c_j,1}$ 是一个块链，w_{j-1}, w_j, p 为它的三个割点). 因此，可以将 T_j^+ 写成下面的边序列：

$$T_j^+ = pw_{j-1}, T_1^{(j)}, w_{j-1}t_1, t_1p, pt_2, t_2w_j, T_2^{(j)}, w_jp,$$

其中 $T_1^{(j)}$ 和 $T_2^{(j)}$ 是覆盖 B'_j 的边不交的闭迹. $T_1^{(j)}$ 导出 w_{j-1} 的一个 2- 分裂，$T_2^{(j)}$ 导出 w_j 的 2- 分裂. 因为 $T_1^{(j)}$ 和 $T_2^{(j)}$ 是 $(B'_j)_{c_j,1}$ 的两个分支的 A- 迹，故有与 $u \in V(B'_j)$ 关联且在 $O^+(u)$ 中不相继的两条边决不能构成由 $T_1^{(j)}, T_2^{(j)}$ 中任意一个定义的转移.

类似于引理 6.60 的证明，对每个 $j \in J_o$，选择边 e_j, f_j, g_j, h_j 具有性质 $e_j, f_j \in E_{w_{j-1}} \cap E(B'_j), g_j, h_j \in E_{w_j} \cap E(B'_j)$，使得迹 $T_1^{(j)}$ 和 $T_2^{(j)}$ (看成边序列) 能写成如下形式：

$$T_1^{(j)} = e_j, T_{1,j}, f_j \quad \text{且} \quad T_2^{(j)} = h_j, T_{2,j}, g_j \ .$$

对 $j \in J \cup \{0\}$，考察点 w_j. 若 $j, j+1 \notin J_0$，则 $d_B(w_j) = 2$；若 $j \in J_0, j+1 \notin J_0$，则 $T_2^{(j)}$ 含 E_{w_j} 的边而 $T_1^{(j+1)}$ 不存在；若 $j \notin J_0, j+1 \in J_0$，则 $T_1^{(j+1)}$ 含 E_{w_j} 的边而 $T_2^{(j)}$ 不存在；若 $j, j+1 \in J_0$，则 $T_2^{(j)}$ 和 $T_1^{(j)}$ 都存在且含 E_{w_j} 的边. 此外，若注意 B 的 $O^+(w_j)$，则根据上面 $j, j+1 \in J$ 的 4 种情形，或者

$$O^+(w_j) = (w_{j+1}w_j, w_jw_{j-1}),$$

或者

$$O^+(w_j) = (w_{j+1}w_j, w_jw_{j-1}, g_j, \cdots, h_j),$$

或者

$$O^+(w_j) = (w_{j+1}w_j, w_jw_{j-1}, f_{j+1}, \cdots, e_{j+1}),$$

或者

$$O^+(w_j) = (w_{j+1}w_j, w_jw_{j-1}, g_j, \cdots, h_j, f_{j+1}, \cdots, e_{j+1})$$

(若 $j = 0$ 则 $w_{j-1} = w_t$). 对 $i = 1, 2, j \in J$ 定义

$$\text{若 } j \in J_0, \text{ 则 } \delta T_i^{(j)} = T_i^{(j)}; \quad \text{若 } j \in J - J_0, \text{ 则 } \delta T_i^{(j)} = \varnothing,$$

并考虑上面关于 $T_i^{(j)}$ 和 $O^+(w_j)$ 的等式有

$$T_B = w_0w_t, \delta T_2^{(t)}, w_tw_{t-1}, \delta T_1^{(t)}, \delta T_2^{(t-1)}, w_{t-1}w_{t-2}, \cdots, w_2w_1, \delta T_1^{(2)}, \delta T_2^{(1)}, w_1w_0, \delta T_1^{(1)}$$

是 B 的 A- 迹，它在 $w_j, j \in J \cup \{0\}$，因而特别地，在 $w_0 = x_{i-1}$ 和 $w_t = x_i$ 导出一个 2- 分裂. 换句话说，$(B_i)_{\{x_{i-1},x_i\},2}$ 有 A- 迹. 这便完成了情形 (I).

(II) $V(B_i) \cap \{v^{(j)} \mid j = 1, \cdots, k\} \notin \varnothing$.

此时，恰存在一个 $j \in \{1, \cdots, k\}$，使得 $v^{(j)} \in V(B_i)$ (见图 6.23 前的讨论). 为简便起见，再记 $B = B_i, x = x_{i-1}, y = x_i$，置 $v = v^{(j)}$，并且令 $P(x, y) = \mathrm{bd}(F'_\infty) \cap P_0$ 如情形 (I) 中定义.

在任何情形下，B 比 G 有更少的价大于 2 的点. 因此，若 $xy \notin E(B)$，则压平 v 得到 B^*，它具有 (I) 中处理的类型，并且 B^* 的任一 A 迹对应于 B 的 A- 迹，反之亦然. 这样，对 $xy \notin E(B)$，对 B^* 应用归纳假设产生所需的 B 的 A 迹，因而假设 $xy \in E(B)$，B 包含一个三角形的 2- 面 $\Delta = \langle v, x, y\rangle$.

若 $\Delta = B$，则由于 2- 价点的 δ- 分裂的附加定义，沿着 Δ 就得到 B 的所需的 A- 迹. 因此，假设 $\Delta \neq B$. 此时，我们恰有由图 6.25 说明的情况，只是 $t = 2, J_0 = \{2\}$，并且用 v 取代 w_0，用 x 取代 w_1，并且 y 有图 6.25 中相同的意义.

注意到 $B - v$ 是 2- 连通的外平面简单图，于是由引理 6.62，$B^- := (B - v) - \{xy\} = B - \Delta$ 是非平凡的块链. 如情形 (I)，找 $c \in P(x, y) - \{x, y\}$，它是 B^- 的割点，并且由归纳假设找 B 的 A- 迹 T_B，它导出 c 的 1- 分裂，因此，导出 x 和 y 的 2- 分裂. 于是在所有可能的情形下，我们将情形 (II) 归结为情形 (I). 定理 6.63 证毕.

在定理 6.63 的假设中去掉外平面性而对更大的欧拉图类得到正确的叙述，这是一个诱人的想法. 或更谨慎地问每个简单的 2- 连通欧拉平面图有 A- 迹是否成立? 事实上，在最初考虑在平面欧拉图中寻找 A 迹的问题时，我认为对平面欧拉图 G，2- 连通性应该是对某个 $v \in V(G)$，G 有 $V(G) - \{v\}$ 的划分 $\{V_1', V_2'\}$，使得 $(G_{V_1',1})_{V_2',2}$ 不含同胚于图 6.17 中的图 G_1 的子图的充分条件. 因为若从算法的观点考虑，在连通平面欧拉图 G 中寻找 A- 迹的问题，则由定理 6.59 及图 6.17 的讨论，G 有 A- 迹当且仅当对每个 $v \in V(G)$，存在 $V(G) - \{v\}$ 的划分 $\{V_1', V_2'\}$ 具有前面描述的性质. 因此，图 6.17 的图 G_1 刻画了禁用阶段，即在试图用一系列 δ- 分裂 ($\delta \in \{1, 2\}$) 来产生 A- 迹时必须避免的阶段 (这里同胚包括了在拓扑平面中具有的意义，在这个意义上，图 6.17 的两个图必须看成是不同的).

不幸地，存在 2- 连通的平面欧拉简单图，它仅有 4- 价和 6- 价点且不含 A- 迹. 为了看出图 6.26 的图 G_0 是这样的例子，不失一般性，我们首先假设 G_0 有 2- 面着色，外面是 1- 面. 设 G_0 有 A- 迹 T. 注意到 $(G_0)_{\{v_1,v_6\},2}$ 是不连通图并应用推

论 6.57, 由 G_0 的对称性，这个图也有导出 v_1 的 1- 分裂的 A- 迹. 不失一般性，假设选择 T 的有这样的性质.

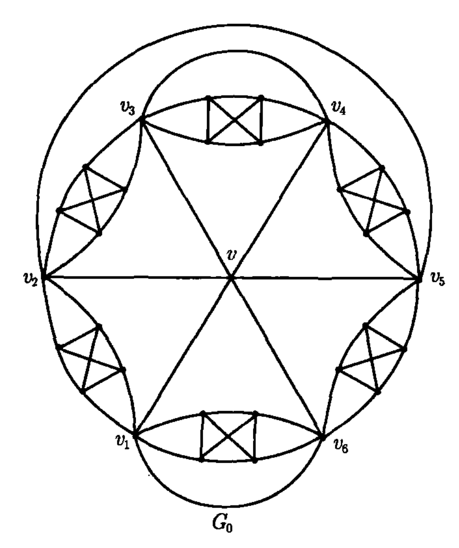


图 6.26 仅有 4- 价和 6- 价点且没有 A- 迹的 2- 连通平面欧拉简单图

然而这必然推出由 T 在 v_i $(2 \leqslant i \leqslant 6)$ 的 δ- 分裂满足同余 $i \equiv \delta \pmod 2$. 也就是说，我们得到图 $H = ((G_0)_{\{v_1,v_3,v_5\}})_{\{v_2,v_4,v_6\},2}$，它由图 6.27 说明，这里将 T 看成边序列，它也是 H 的 A- 迹. 若对 H 的每个 4- 价点应用相应的 δ- 分裂，则得到同胚于图 6.17 中图 G_1 的一个图①. 对 $V(G_0) - \{v\}$ 的每个点无论应用哪种 δ- 分裂 $(\delta \in \{1,2\}$，结果或者是不连通的，或者是禁用阶段，因而 G_0 不能有 A- 迹.

非常有趣的是，稍微改变 G_0 的嵌入便产生平面图 G_0^T，实际上，它有 A- 迹 T (图 6.28)，检查该断言的正确性留作练习.

因此，一般地，2- 连通平面欧拉图中 A 迹的存在性依赖于 (抽象的) 可平面基图的嵌入. 在连通度为 1 的图中已遇到这个事实 (图 6.17，图 6.26 和图 6.28). 于是可能会问，对给定的 2- 连通可平面欧拉图 G，是否存在 G 在平面上的嵌入 H 使得 H 有 A- 迹. 而瑞格尼尔 (在作者的帮助下) 构造了没有 A- 迹的 3- 连通可平面欧拉图. 由于对这样一个图的任两个嵌入 H_1 和 H_2，或者 $O^+_{H_1}(G) = O^+_{H_2}(G)$，或者 $O^+_{H_1}(G) = O^-_{H_2}$(见定理 3.52)，故在 3- 连通可平面欧拉图的情形，这样的图中 A- 迹的存在与否独立于那个图的实际嵌入. 另一方面，借助于引理 6.60，若一个 3- 连通可平面欧拉图 G 没有 A- 迹，则可平面欧拉图 $H_1 = G' \cup G''$ 在 H_1 的任意平面嵌入中没有 A- 迹，其中 G' 和 G'' 是 G 的拷贝且 $G' \cap G'' = \{v\} \in V(H_1)$

① 事实上，对 H 的每个 4- 价点的分裂，若它不产生不连通图，则在同胚的意义下，其结果是相同的，即图 6.17 的 G_1.

(因此，$\kappa(H_1)=1$). 进一步，若 $H_2=G'\cup G''$，其中 G' 和 G'' 同上且 $G'\cap G''=\{v,w\}\in V(H_2)$(因此，$\kappa(H_2)=2$)，则 H_2 的任意平面嵌入没有 A- 迹. 这个结论直接从下面的引理得到 (也可参见 [REGN76a, Bemerkung3.2]). 那里 G_k^+ 表示 G_k 的构造出的图，它采用了证明定理 6.63 时从 B 构造 B^+ 的同样的方式 (图 6.24).

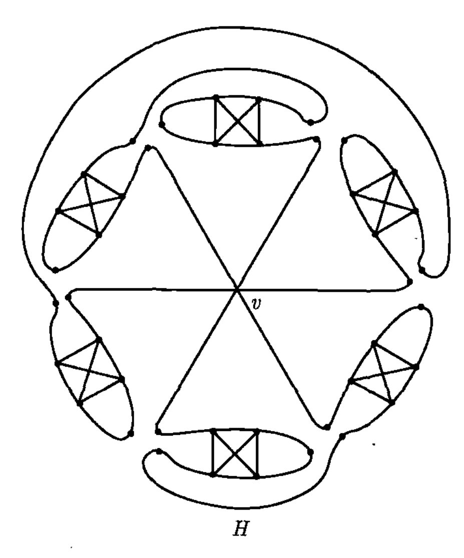


图 6.27 在 G_0 中对 $v_{2j-2+\delta}$ $(j=1,2,3,\delta=1,2)$ 应用 δ- 分裂得到的图 H

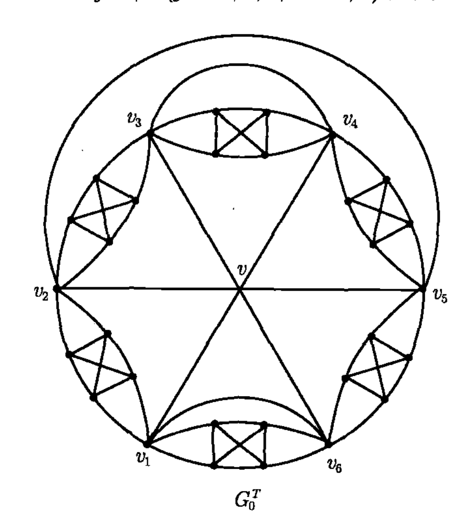


图 6.28 在图 6.26 的 G_0 中仅改变边 v_1v_6 的嵌入得到的 G_0^T：在 G_0 中 v_1v_6 属于外面的边界，在 G_0^T 中属于含 v 的 2- 面的边界. G_0^T 有 A- 迹而 G_0 没有

引理 6.64 对平面 2- 连通欧拉图 G，假设 G 能写成如下形式：

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i \text{ 且对 } i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant k, k \geqslant 2 \text{ 有 } E(G_i) \cap E(G_j) = \varnothing,$$

使得 G_i 是欧拉的，$\kappa(G_i) \geqslant 2$ 且 $G_i \cap G_{i+1} = v_{i,i+1} \in V(G)$，

若 $i+1 < j \leqslant k, i = 1, \cdots, k$，则 $G_i \cap G_j = \varnothing$

(置 $k+1=1$，若 $k=2$，则 $|G_1 \cap G_2| = |\{v_{1,2}, v_{2,1}\}| = 2$). 进一步，假设 G 是 2- 面着色的且外面 F_∞ 是 1- 面，并假设对 $i = 1, \cdots, k$，$E(\mathrm{bd}(F_\infty)) \cap E(G_i) \neq \varnothing$. 下列叙述等价：

1) G 有 A- 迹.

2) 可以如下选择记号：或者 G_1, G_k 有 A 迹，它们分别在 $v_{k,1}$ 导出 1- 分裂，在 $v_{1,2}$ 和 $v_{k-1,k}$ 导出 2- 分裂，而对 $i = 2, \cdots, k-1$，G_i 有 A- 迹，它既在 $v_{i-1,i}$，又在 $v_{i,i+1}$ 导出 2- 分裂. 或者对 $i = 1, \cdots, k-1$，G_i 有 A- 迹，它既在 $v_{i-1,i}$，又在 $v_{i,i+1}$ 导出 2- 分裂 (置 $v_{0,1} = v_{k,1}$)，并且 G_k^+ 有 A- 迹，它在 $v_{k-1,k}, v_{k,1}$ 和 v 都导出一个 2- 分裂，其中 $\{v\} = V_4(G_k^+) - V_4(G_k)$.

证明　首先注意到恰有两个面 F_∞ 及另外一个 1- 面 F_1，在它们各自的边界上含有所有的点 $v_{i,i+1}\,(i = 1, \cdots, k)$. 这可直接从引理的假设得到. 因此，对 $i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant k$，$H = G_{\{v_{i,i+1}, v_{j,j+1}\},1}$ 是不连通图. 为看清这一点，取简单开曲线 $\mathcal{C}_1 \subset F_1 \cup \{v_{i,i+1}, v_{j,j+1}\}$ 和 $\mathcal{C}_\infty \subset F_\infty \cup \{v_{i,i+1}, v_{j,j+1}\}$，它们都连接 $v_{i,i+1}$ 和 $v_{j,j+1}$，便有 $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{v_{i,i+1}, v_{j,j+1}\}$，由此，$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_\infty$ 在有界区域和无界区域上是含 G 的开边的简单闭曲线. 因为每个 $G_i (i = 1, \cdots, k)$ 是欧拉的，因此，能 (拓扑地) 构造 H，使得 $\mathcal{C}$ 在有界和无界区域上也含 H 的开边且 $\mathcal{C} \cap H = \varnothing$. 这样得到 H 是不连通 (与引理 6.61 性质 1) 的证明比较). 由这些观察得到，若 G 有 A- 迹 T 或从 $G_i (i = 1, \cdots, k-1)$ 和 G_k^+ 各自相应的 A- 迹可以构造 T，则 T 在所有 (至多除了一个) $v_{i,i+1} (i = 1, \cdots, k)$ 导出 2- 分裂.

现假设 G 有 A- 迹 T，T 在某 $v_{i,i+1}$ 导出一个 1- 分裂. 不失一般性，假设选择记号使得 $i = k$ (若需要，为得到 $i = k$ 可对下标应用循环置换). 在 G 用两个点 $x, y \notin V(G)$ 取代 $v_{k,1}$ 构造平面图 H_{xy}，使得 $E_x = E_{v_{k,1}} \cap E(G_1)$，$E_y = E_{v_{k,1}} \cap E(G_k)$. 因此，$H_{xy}$ 是非平凡的欧拉块链，其块 H_i 由 $E(G_i)$ 定义，并且 $v_{i,i+1}$ 是它的割点，其中 $i = 1, \cdots, k-1$. 另一种得到 H_{xy} 的方式为在 $G_{v_{k,1},1}$ 中等同于 G_1 (G_k) 的边关联的 2- 价点，从而产生新点 $x(y)$. 这样 $(H_{xy})_{\{x,y\},1} = G_{v_{k,1},1}$. 把 G 的 2- 面着色移到 H_{xy}，从引理 6.60 我们能得到，H_{xy} 的任一 A 迹 T_H 导出 $H_i := \langle E(G_i) \rangle\,(i = 1, \cdots, k)$ 的一个 A- 迹，使得 T_i 在 H_i 的那些 H_{xy} 的割点导出 2- 分裂. 将 T 看成边序列，T 也是 H_{xy} 和 $(H_{xy})_{\{x,y\},1}$ 的 A- 迹. 于是在这种情形，G 中 T 的存在推出 $G_i\,(i = 2, \cdots, k-1)$ 有在 $v_{i-1,i}, v_{i,i+1}$ 都导出 2- 分裂的 A- 迹，并且 G_1 和 G_k 都有 A- 迹，它分别在 $v_{k,1}$ 导出 1- 分裂，在 $v_{1,2}, v_{k-1,k}$ 导出 2- 分裂.

相反地，若 G_i 有上面描述的 A- 迹，则由引理 6.60，如上构造的 H_{xy} 有 A- 迹 T_H，并且 T_H 在 x 和 y 导出 1- 分裂. 由于 $(H_{xy})_{\{x,y\},1} = G_{v_{k,1},1}$，故 $G_{v_{k,1},1}$ 也有 A- 迹，即 G 有在 $v_{k,1}$ 导出 1- 分裂的 A- 迹.

现假设 G 有在 $v_{i,i+1}(i=1,\cdots,k)$ 导出 2- 分裂的 A- 迹 T. 类似于引理 6.60 证明中采用的记号，选择边 $e_i, f_i, g_i, h_i \in E(G_i)\,(i=1,\cdots,k)$，使得

$$e_i \in E_{v_{i-1,i}} \cap E(\mathrm{bd}(F_\infty)),\quad f_i \in E_{v_{i-1,i}} \cap E(\mathrm{bd}(F_1)),$$
$$g_i \in E_{v_{i,i+1}} \cap E(\mathrm{bd}(F_\infty)),\quad h_i \in E_{v_{i,i+1}} \cap E(\mathrm{bd}(F_1)).$$

不失一般性，选择定义 G 的记号，使得 $O^+(v_{i,i+1}) = (e'_{i+1}, g'_i, \cdots, h'_i, f'_{i+1}, \cdots)$.

在固定的 $G_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 中注意 T 的表现. 由于 T 是 A- 迹，故 T 的恰含 G_i 的一条半边的仅有的转移为 $\{e'_i, g'_{i-1}\}, \{f'_i, h'_{i-1}\}, \{g'_i, e'_{i+1}\}, \{h'_i, f'_{i+1}\}$. 因 G 是平面的，故 T 不能有下面的形式：

$$T = \cdots, e_i, T'_i, h_i, \cdots, g_i, T''_i, f_i, \cdots, \tag{1}$$

其中 $E(T'_i) \cup E(T''_i) = E(G_i) - \{e_i, f_i, g_i, h_i\}$.

因此，T 一定或者具有形式

$$T = \cdots, e_i, T^-_i, g_i, \cdots, h_i, T^{--}_i, f_i, \cdots \tag{2}$$

(这里因 T 在 $v_{i,i+1}$ 不导出 1- 分裂，故 $\{g'_i, h'_i\} \notin X_T$)，或者具有形式

$$T = \cdots, e_i, T^*_i, f_i, \cdots, h_i, T^{**}_i, g_i, \cdots \tag{3}$$

其中 $E(T^-_i) \cup E(T^{--}_i) = E(T^*_i) \cup E(T^{**}_i) = E(G_i) - \{e_i, f_i, g_i, h_i\}$ (不失一般性，可设 e_i 为 T 中 G_i 的第一条边)，因而若 T 具有形式 (2)，则

$$T_i := e_i, T^-_i, g_i, h_i, T^{--}_i, f_i$$

是 G_i 的在每个 $v_{i-1,i}, v_{i,i+1}$ 导出 2- 分裂的 A- 迹. 若 T 具有形式 (3)，则

$$T^+_i = vx, e_i, T^*_i, f_i, xt_1, t_1v, vt_2, t_2y, h_i, T^{**}_i, g_i, yv\ , \tag{4}$$

其中 $x := v_{i-1,i}, y := v_{i,i+1}$ 且 $v, t_1, t_2 \notin V(G)$) 是 G^+_i 的 A- 迹，它在每个 $v, v_{i-1,i}, v_{i,i+1}$ 导出 2- 分裂 (图 6.24，其中以 G_i 代替 B).

为弄清对除一个之外所有的 $G_i\,(i \in \{1,\cdots,k\})$，$T$ 一定具有形式 (2)，对剩下的 G_i，T 一定具有形式 (3)，我们注意到 T 不能对所有的 $i\ (i=1,\cdots,k)$ 具有形式 (2)，否则有

$$T = e_1, T^-_1, g_1, e_2, T^-_2, g_2, \cdots, e_k, T^-_k, g_k,$$

即 T 不覆盖 $E(G)$ 的所有的元素，这是因为 $\{g'_k, e'_1\} \in X_T$ (注意对 $i=1,\cdots,k$, $\{g'_i, e'_{i+1}\} \in X_T$). 这样得到 T 一定在某处“回转”，但由于 T 在每个 $v_{i,i+1}\,(i=1,\cdots,k)$ 导出一个 2- 分裂，故这个“转”必定在某个 $G_j\,(j \in \{1,\cdots,k\})$ 内发生.

不失一般性，假设若 T 开始于 $e_i\,(i\in\{1,\cdots,k-1\})$，则对 $j=k$ 发生第一次"转".
这样，T 有如下形式:

$$T=e_i,T_i^-,g_i,\cdots,e_{k-1},T_{k-1}^-,g_{k-1},e_k,T_k^*,f_k,h_{k-1},T_{k-1}^{--},f_{k-1},\cdots,$$
$$h_i,T_i^{--},f_i,\cdots,f_1,h_k,T_k^{**},g_k,e_1,\cdots,e_{i-1},T_{i-1}^-,g_{i-1}. \tag{5}$$

但这样，

$$T^-:=e_i,T_i^-,g_i,\cdots,e_{k-1},T_{k-1}^-,g_{k-1},h_{k-1},T_{k-1}^{--},$$
$$f_{k-1},\cdots,h_i,T_i^{--},f_i,\cdots,f_1,e_1,\cdots,e_{i-1},T_{i-1}^-,g_{i-1} \tag{6}$$

是 $G^-=G-G_k$ 的 A- 迹. 由于当 $k\geqslant 3$ 时，由定义，G^- 为 G 的块链，而当 $k=2$ 时，由假设条件，G^- 是 2- 连通的，故当 $k\geqslant 3$ 时，从引理 6.60，当 $k=2$ 时，从 (6) 得到 T 导出 G_i 的一个 A- 迹 T_i，使得 T_i 在 G^- 的割点导出 2- 分裂，并且由 (6)，在 $v_{k-1,k}$ 和 $v_{k,1}$ 也导出一个 2- 分裂. 此外，T_k^+(如 (4) 中 T_i^+ 的定义) 是 G_k^+ 的 A- 迹，其中 G_k^+ 如引理所述.

为完成定理的证明，只要证明若对 $i=1,\cdots,k-1$，T_i 为 G_i 的 A- 迹，并且 T_k^+ 为 G_k^+ 的 A- 迹，G_k^+ 如引理中的叙述，则 G 有 A- 迹.

如上定义 G^- 并对 G^- 应用引理 6.60. 这导致了 G^- 的 A- 迹 T^-，它在 $v_{k-1,k}$ 和 $v_{k,1}$ 导出 2- 分裂. 对 G_i 的 A- 迹 T_i 选择与上面同样的记号，记 T^- 如 (6) 中定义，T_k^+ 如 (4) 所定义 (用下标 k 代替下标 i). 在 (6) 中插入 (4) 中相应的子迹就能得到 (5) 中表达的 T，并且 T 为 G 的 A- 迹. 引理 6.64 证毕.

事实上，引理 6.64 能够推广，不过只能在一个方向上. 这个推广是练习 6.1.c) 的自然扩展，但同样仅在一个方向上.

引理 6.65 ([REGN76a，引理 1.4]) 若连通平面欧拉图 G 有 A 迹，则 G 的每个块有 A- 迹.

引理 6.65 的证明及表明引理 6.65 的逆命题不成立的例子的构造，留作练习.

在转到构造没有 A- 迹的可平面 3- 连通欧拉图之前，需要研究 A- 划分. 为此，先引进几个概念.

定义 6.66 设 $F_1,\cdots,F_m(m>1)$ 是 2- 面着色平面欧拉图的 m 个不同的面，使得对一个固定的 $\delta\in\{1,2\}$，对 $i=1,\cdots,m$，F_i 是 δ- 面. 假设存在不同的点 $v_{1,2},v_{2,3},\cdots,v_{m,1}$，使得 $v_{i,i+1}\in\mathrm{bd}(F_i)\cap\mathrm{bd}(F_{i+1})\,(i=1,\cdots,m)$ (下标取模 m). 那么称 $R=\{F_1,\cdots,F_m\}$ 为 G 的**唯一着色面环**，并称 $L_R:=\{v_{1,2},\cdots,v_{m,1}\}$ 为 R 的**全连接集**(若 $m=2$，则 $v_{1,2}\neq v_{2,1}$).

下面的结果将 A- 划分联系到面环及全连接集 (见 [FLEI74a，定理 1 和推论 1]).

定理 6.67 设 G 是 2- 面着色的 2- 连通平面欧拉图且没有 2- 价点，并令 $\{V_1,V_2\}$ 为 $V(G)$ 的划分，则下列叙述等价:

(1) G 有 A- 划分为 $\{V_1, V_2\}$ 的 A- 迹 T；

(2) 对 G 的每个唯一着色面环 R 及 R 的每个全连接集 L_R，若 R 的元素是 δ-面，则 $L_R \notin V_\delta\,(\delta \in \{1,2\})$.

此外，若在 (1) 中用"完美 A- 划分"取代"A- 划分"，并且在 (2) 中用"$V_1 \not\supseteq L_R \not\subseteq V_2$"取代"$L_R \not\subseteq V_\delta$"，则这些更强的叙述也是等价的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 对 G 的某唯一着色面环 R(其元素为 δ- 面) 及某全连接集 L_R，假设 $L_R \subseteq V_\delta\,(\delta \in \{1,2\})$. 不失一般性，假设 $\delta = 1$. 我们断言 $H := G_{L_R,1}$ 是不连通的.

因为 R 为 G 的唯一着色面环且 $\delta = 1$，故存在 G 的不同的 1- 面 $F_1, \cdots, F_m$，使得

$$R = \{F_1, \cdots, F_m\}, \quad \varnothing \neq \mathrm{bd}(F_i) \cap \mathrm{bd}(F_{i+1} \subseteq V(G)),\ i = 1, \cdots, m,$$

并且由定义

$$L_R \cap \mathrm{bd}(F_i) \cap \mathrm{bd}(F_{i+1}) = \{v_{i,i+1}\}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

现令 $\mathcal{C}_i \subset F_i \cup \mathrm{bd}(F_i)$ 是满足 $\mathcal{C}_i \cap \mathrm{bd}(F_i) = \{v_{i-1,i}, v_{i,i+1}\}$ 的简单开曲线，那么 $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i$ 为简单闭曲线. 正因为 $F_i\,(i = 1, \cdots, m)$ 是 1- 面，故在 $\mathcal{C}$ 的内部 ($\mathcal{C}$ 的有界区域) 及 $\mathcal{C}$ 的外部 ($\mathcal{C}$ 的无界区域) 中，$\mathcal{C}$ 含有 $E_{v_{i,i+1}}\,(i = 1, \cdots, m)$ 的正偶数条开边 (否则，$\mathcal{C}_i$ 和 $\mathcal{C}_{i+1}$ 将位于不同色的面内，若不然 $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{i+1}$，从而推出 $F_i = F_{i+1}$). 此外，由假设 $\mathcal{C} \cap G = L_R \subseteq V_1$.

不失一般性，如下选择记号：对 $O^+(v_{i,i+1}) = (e_1', e_2', \cdots, e_{d_i}')$，$d_i = d(v_{i,i+1}) > 2$，恰好这些开边 $e_1, e_2, \cdots, e_{n_i}$ 位于 $\mathcal{C}$ 的内部. 那么由前面一段，$2 \leqslant n_i \equiv 0 \pmod 2$ 且 $d_i - n_i \geqslant 2$. 于是可在 $v_{i,i+1}(i = 1, \cdots, m)$ 施行 1- 分裂，使得 $v^{(1)}, \cdots, v^{(m_i)}$ 全位于 $\mathcal{C}$ 的内部，而 $v^{(m_i+1)}, \cdots, v^{(k_i)}$ 全位于 $\mathcal{C}$ 的外部，其中 $m_i = \dfrac{1}{2}n_i$ 和 $k_i = \dfrac{1}{2}d_i$ (图 6.18). 因此，根据 $\mathcal{C} \cap G = L_R \subseteq V_1$ 就得到 H 是不连通的.

由于 H 是不连通的且 $L_R \subseteq V_1$，故有 $G_{V_1,1}$ 是不连通的，进一步有 $(G_{V_1,1})_{V_2,2}$ 是不连通的. 另一方面，由于 $\{V_1, V_2\}$ 是 G 的 A- 迹 T 的 A 划分，满足 V_δ 恰含那些 T 导出 δ- 分裂的点，其中 $\delta = 1,2$，所以有 $(G_{V_1,1})_{V_2,2}$ 是一个圈 (与推论 6.57 比较). 这个矛盾便证明了 (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) 考虑 $H = (G_{V_1,1})_{V_2,2}$，它是 2- 正则图. 若 H 是连通的，则由推论 6.57，$\{V_1, V_2\}$ 是从某个 A- 迹 T 得到的 A- 划分，其中 T 恰在 V_δ 的元素导出 δ- 分裂 ($\delta = 1, 2$). 在这个情形下，(2) $\Rightarrow$ (1) 成立. 因此，假设 H 是不连通的. 选择 $V_0 \subseteq V(G)$ 尽可能小，使得 $H_0 := (G_{V_0',1})_{V_0'',2}$ 是不连通的，其中 $V_0' = V_0 \cap V_1, V_0'' = V_0 \cap V_2$. 于是 H_0 有使得 $\mathrm{bd}(F_0)$ 不连通的面 F_0. 不失一般性，F_0 为 H_0 的无界面. 进一步，由于前面未作有关 G 的 2- 面着色的任何假设，现在可以假设 F_0 是 1- 面.

若 $V_0'' \neq \varnothing$，则考虑 $w \in V_0''$. 我们断言：$H_1 := (G_{V_0',1})_{V_0''-\{w\},2}$ 已有一个不连通的面边界 (因而 H_1 是不连通的)：因为 $H_0 = (H_1)_{\{w\},2}$ 且由 δ- 分裂的定义 $(\delta = 1,2)$，对 H_1 的一点应用 2- 分裂保持 H_1 的 1- 面同伦不变 (见定义 6.54 末的脚注)，即 $\mathrm{bd}(F_0)$ 在 H_1 中已是不连通的. 这与 V_0 的选择矛盾. 由此，$V_0'' = \varnothing$，于是 $V_0 \subseteq V_1$. 再由 V_0 的选择及 G 是连通的，对 $V_{F_0} := V(\langle E(\mathrm{bd}(F_0))\rangle_G)$ 有 $V_0 \subset V_{F_0}$ (因为 $V_0 \subseteq V_1$ 且 H_0 不连通推出 $G_{V_0 \cap V_{F_0},1}$ 有不连通的外面).

考虑 $\mathrm{bd}(F_0)$ 的一个分支 C_1，定义 $C_2 := \mathrm{bd}(F_0) - C_1$ 且令 $\mathcal{C}$ 是位于 F_0 中的简单闭曲线，使得 $\mathrm{int}\,\mathcal{C} \supset H_1$，$\mathrm{ext}\,\mathcal{C} \supset H_0 - H_1$，其中 H_1 为 H_0 的分支且 $H_1 \supset C_1$. 由 V_0 的选择，对每个 $v \in V_0$，某些 $v^{(i)}\left(i = 1, \cdots, \frac{1}{2}d_G(v)\right)$ 位于 $\mathrm{int}\,\mathcal{C}$(即 H_1) 内，某些位于 $\mathrm{ext}\,\mathcal{C}$(即 $H_0 - H_1$) 内；否则，对某个 $v \in V_0$ 有 $\mathcal{C} \cup G_{V_0-\{v\},1} = \varnothing$ 且 $\mathrm{int}\,\mathcal{C} \cap G_{V_0-\{v\},1} \neq \varnothing \neq \mathrm{ext}\,\mathcal{C} \cap G_{V_0-\{v\},1}$. 不失一般性，假设这样画 $\mathcal{C}$，从 H_0 到 G 的转移 (看成拓扑过程) 留下 $\mathcal{C}$ 不变 (即，不失一般性，$\mathcal{C}$ 在 G 中也是简单闭曲线——与图 6.18 比较) 且 $\mathcal{C} \cap G = V_0$，而对 G 的每个 2- 面 $F^{(2)}$，$(\mathcal{C} - V_0) \cap F^{(2)} = \varnothing$.

由 $\mathcal{C} \cap G = V_0$，我们能将 V_0 写成

$$V_0 = \{v_{1,2}, v_{2,3}, \cdots, v_{m,1}\} \tag{i$_1$}$$

其中 $v_{i-1,i}$ 和 $v_{i,i+1}$ 将 $\mathcal{C}$ 分成两个简单开曲线 $\mathcal{C}_i'$ 和 $\mathcal{C}_i''$，使得 $\mathcal{C}_i' \cap V_0 = \{v_{i-1,i}, v_{i,i+1}\}$. $\mathcal{C}_i' - \{v_{i-1,i}, v_{i,i+1}\}$ 位于唯一确定的 1- 面上，记该面为 $F_i\,(i = 1, \cdots, m)$. 由 V_0 的选择得

$$F_i \neq F_j, \quad i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant m \tag{i$_2$}$$

且有

$$\mathrm{bd}(F_i) \cap \mathrm{bd}(F_j) \neq \varnothing \quad \text{当且仅当} \quad |i - j| \in \{1, m-1\}\,, \tag{i$_3$}$$

其中

$$\mathrm{bd}(F_i) \cap \mathrm{bd}(F_{i+1}) = \{v_{i,i+1}\}\ (\text{置 } m + 1 = 1)\,. \tag{i$_4$}$$

否则，能在平面上画一条简单闭曲线 $\mathcal{C}^-$，使得对 G 的每个 2- 面 $\mathcal{C}^- \cap F^{(2)} = \varnothing$，$\mathcal{C}^- \cap G = V_0^- \subset V_0$ 且对至少一个但不是所有的 $i \in \{1, \cdots, m\}$，$(\mathcal{C}^- - V_0^-) \cap F_i = \varnothing$. 用类似于证明第一个蕴涵关系的讨论，由 $\mathcal{C}^-$ 的这些性质推得 $G_{V_0^-,1}$ 不连通. 因此，由 $(\mathrm{i}_1) \sim (\mathrm{i}_4)$，$R = \{F_1, \cdots, F_m\}$ 为唯一着色面环，V_0 为 R 的全连接集. 由于 R 为 1- 面的集且 $V_0 \subseteq V_1$，故 R 和 V_0 使 (2) 不成立，因而在任何情形下，H 必定连通.

为完成定理的证明，现假设 (1) 中的 A- 划分为完美 A- 划分，假设 (2) 中 L_R 满足更强的关系 $V_1 \not\supseteq L_R \not\subseteq V_2$，称相应的叙述为 $(1')$ 和 $(2')$.

若 $\{V_1, V_2\}$ 是完美 A- 划分，则由定义，$(G_{V_1,1})_{V_2,2}$ 是一个圈 (对应于 T) 且 $(G_{V_2,1})_{V_1,2}$ 也是. 用 T^* 表示 G 的对应于第二个圈的 A- 迹，并定义 $V_1^* := V_2, V_2^* =$

V_1. 因为 (1) 蕴涵 (2)，所以重复应用这个蕴涵就有，对每个唯一着色面环 R 和每个全连接集 L_R，$V_\delta^* \not\supseteq L_R \not\subseteq V_\delta$，即 $L_R \not\subseteq V_\delta\,(\delta = 1,2)$，因而 $(1') \Longrightarrow (2')$. 注意到 $\{V_\delta, V_\delta^*\} = \{V_1, V_2\}$ 独立于 $\delta \in \{1,2\}$ 的选择，故不必在唯一着色面环 R 上指定其元素的颜色.

假设 $(2')$ 成立. 如上定义 V_δ^*. 由于 (2) 蕴涵 (1)，故从这个蕴涵的证明得到，$(G_{V_1,1})_{V_2,2}$ 和 $(G_{V_1^*,1})_{V_2^*,2} = (G_{V_2,1})_{(V_1,2)}$ 都是圈，即 $\{V_1, V_2\}$ 是完美 A- 划分. 定理 6.67 证毕.

刚证明的定理 6.67 指出，若考虑 $G_\delta = \langle V_\delta \rangle \subseteq G\,(\delta = 1,2)$，其中 $\{V_1, V_2\}$ 为 A-划分且 G 满足定理的假设，那么 G_δ 一定有非常特别的结构. 为确定这个结构，考虑 G 的不是面边界的任一圈 C. 于是 int C 和 ext C 都包含 G 的 (开) 边 (这里将 C 看成平面上的简单闭曲线). 进一步，int C 和 ext C 也都含有 1- 面和 2- 面. 特别地，$E(C)$ 中的每个 e 属于某个 $\mathrm{bd}(F_\delta)$，其中 F_δ 是 δ- 面 $(\delta = 1,2)$. 因此，考虑

$$R_\delta = \{F_\delta \mid E(\mathrm{bd}(F_\delta)) \cap E(C) \neq \varnothing,\ F_\delta \text{ 是 } \delta\text{ - 面 }\}, \quad \delta = 1,2$$

就得到 R_δ 是唯一着色面环，并且有全连接集 $L_R \subseteq V(C)\,(\delta = 1,2)$. 由定理 6.67，$V(C) \not\subseteq V(\delta)$，因此，$C \not\subseteq G_\delta\,(\delta = 1,2)$. 于是

若 G_δ 含有圈 K，则 K 是一个 δ- 面的边界. $(*)$

若假设 G 为 2- 面着色平面欧拉图，并且 $\kappa(G) = 1$ 并可能有 2- 价点，则结论 $(*)$ 仍然成立：因为 G 的 A- 迹在 G 的每个块导出一个 A- 迹 (见引理 6.65)，并且 G_δ 的圈必然含在 G 的某个块中. 此外，若 G 的圈 C 含 G 的一个 2- 价点且 C 不是一个 δ- 面的边界，则上面的 R_δ 也能构造且有 $L_R \subseteq \{v \in V(C) \mid d_G(v) > 2\}$ 为 $R_\delta\,(\delta \in \{1,2\})$ 的全连接集. 在此情形下，由定理 6.67，$L_R \not\subseteq V_\delta, \delta \in \{1,2\}$，因此，$\langle L_R \rangle_C \not\subseteq G_\delta$，此外，$C \not\subseteq G_\delta$.

概括这些讨论，就得到下面的结果 [REGN76a，Satz 2.1].

推论 6.68 若 T 为连通 2- 面着色的平面欧拉图 G 的 A- 迹，并且 $\{V_1, V_2\}$ 为 G 的相应的 A- 划分，则只要圈 C 是一个 δ- 面的边界，就有 $G_\delta := \langle V_\delta \rangle\,(\delta \in \{1,2\})$ 含有 C.

不过，我们指出 G_1 和 G_2 都不必连通. 图 6.29 说明了这个事实. 此外，即使 G_δ 是无圈的，推论 6.68 的逆也不成立. 换句话说，尽管 G 没有 A- 迹，G 也可能有点划分 $\{V_1, V_2\}$，使得 $G_\delta = \langle V_\delta \rangle$ 是无圈的. 这可以通过研究图 6.26 的图 G_0 看出，将它留作练习.

然而下面的结果表明，假如 G_δ 是连通的，则推论 6.68 的逆为真. 不过要说明这个结果，还需要对唯一着色面环作一些考虑.

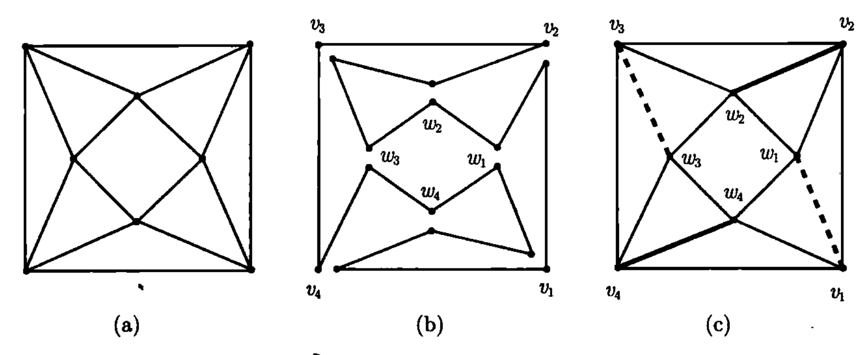


图 6.29　(a) 四侧反棱柱 H; (b) $\hat{\tilde{H}}$ 的 A- 迹 T; (c) T 的 A- 划分导出的子图. 注意 H 是 4- 正则的，并且除了两个四边形面，仅有三角形面

考虑 2- 连通 2- 面着色平面欧拉图 G 的一个唯一着色面环 $R = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}\,(m \geqslant 2)$. 假设

$$\text{bd}(F_i) \cap \text{bd}(F_j) = \varnothing, \quad |i-j| > 1, 1 \leqslant i, j \leqslant m, \{i,j\} \neq \{1, m\}. \tag{$*$}$$

因为 G 是 2- 连通的，故对 $i = 1, \cdots, m$, $\text{bd}(F_i)$ 是圈. 选择如定理 6.67 证明中的记号. 设 L_R 为全连接集，如定理 6.67 证明的第一部分中一样，把 L_R 与简单闭曲线 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(L_R)$ 联系起来，其中 $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i \subset \overline{F_i}$ 且 $\mathcal{C} \cap G = L_R$. 当然，$\mathcal{C}$ 不仅依赖于 $\mathcal{C}_i \subset \bar{F_i}$ 的选择，而且更大程度上依赖 L_R 的选择，L_R 是唯一确定的当且仅当 $|\text{bd}(F_i) \cap \text{bd}(F_{i+1})| = 1\,(i = 1, \cdots, m)$ (如若 G 是 3- 连通的). 在任何情形下，在 L_R 以及相联系的曲线 $\mathcal{C}(L_R)$ 的所有可能选取中，选择 $L_R^{(0)}$ 和 $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(L_R^{(0)})$，使得对每个全连接集 L'_R,

$$\text{int}\,\mathcal{C}_0 \cap L'_R = \varnothing. \tag{$**$}$$

注意到若 $\text{bd}(F_i) \cap \text{bd}(F_{i+1}) \supset \{v_{i,i+1}, v^*_{i,i+1}\}$，则对每个满足 $v_{i,i+1 \in L'_R}$ 的全连接集 L'_R 得到另一个全连接集 $L^*_R = (L'_R - \{v_{i,i+1}\}) \cup \{v^*_{i,i+1}\}$，因而可得出能选择 L^*_R 和 $\mathcal{C}_0$ 满足 $(**)$. 注意到 $L_R^{(0)}$ 是唯一确定的. 类似地，令 $L_R^{(1)}$ 是使得 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(L_R^{(1)})$ 且对每个全连接集 L'_R,

$$\text{ext}\,\mathcal{C}_1 \cap L'_R = \varnothing \tag{$***$}$$

的唯一确定的全连接集. 由 $(*)$ 及 G 是 2- 连通图得知，存在圈 $C_0, C_1 \subset G$，其中

$$C_0 := \bigcup_{i=1}^{m} \langle \text{int}\,\mathcal{C}_0 \cap E(\text{bd}(F_i)) \rangle, \quad C_1 := \bigcup_{i=1}^{m} \langle \text{ext}\,\mathcal{C}_1 \cap E(\text{bd}(F_i)) \rangle. \tag{$****$}$$

现在我们给出瑞格尼尔 (S.Regner) 的博士论文中的另一结果 (见 [REGN76a, Satz2.2]). 她的原始证明有个缺陷，这里给出的证明在详细程度上与她的证明有很大不同.

推论 6.69 考虑平面 2- 连通 2- 面着色的欧拉图 G 的点划分 $\{V_1, V_2\}$. 若对 $\delta = 1, 2$，$G_\delta := \langle V_\delta \rangle$ 是连通的且 G_δ 的每个圈是一个 δ- 面的面边界，则 $\{V_1, V_2\}$ 是 A- 划分.

证明 借助于定理 6.67，只需证明对每个唯一着色面环 R 及每个全连接集 L_R，若 R 的元素为 δ- 面，则 $L_R \not\subseteq V_\delta\,(\delta \in \{1, 2\})$.

假设不然，选取一个唯一着色面环 R，使 $|R|$ 最小 (R 的元素为 δ- 面)，并对某个全连接集 $L_R, L_R \subseteq V_\delta\,(\delta \in \{1, 2\})$，不失一般性，设 $\delta = 1$. 记 $R = \{F_1, \cdots, F_m\}\,(m \geqslant 2)$ 且 $L_R = \{v_{1,2}, \cdots, v_{m,1}\}$. 从 R 的选取可得 $\mathrm{bd}(F_i) \cap \mathrm{bd}(F_j) = \varnothing$，其中 $|i - j| > 1, 1 \leqslant i, j \leqslant m, \{i, j\} \neq \{1, m\}$.

选取曲线 $\mathcal{C}_i\,(1 \leqslant i \leqslant m)$，并如定理 6.67 证明的第一部分，定义简单闭曲线 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{C} \cap G = L_R \subseteq V_1$. 正是因为 $\mathcal{C} \cap G = L_R \subseteq V_1$ 及 G_2 是连通的，所以有

$$\text{或者 } \mathrm{int}\,\mathcal{C} \cap V_2 = \varnothing, \quad \text{或者 } \mathrm{ext}\,\mathcal{C} \cap V_2 = \varnothing;$$

因为应用若尔当曲线定理，G 中连接 $x \in \mathrm{int}\,\mathcal{C}$ 和 $y \in \mathrm{ext}\,\mathcal{C}$ 的每条路 $P(x, y)$ 满足 $P(x, y) \cap L_R \neq \varnothing$. 不失一般性，

$$\mathrm{int}\,\mathcal{C} \cap V_2 = \varnothing. \tag{1}$$

利用推论 6.69 前的讨论及 (1)，甚至能假设已选取的 L_R 和 $\mathcal{C}$ 满足 $L_R = L_R^{(0)}$，$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$，因此，满足 (**). 设 C_0 是 (****) 中定义的圈，由 (1) 及 $\mathcal{C}_0$ 的定义，并由于假设 $L_R \subseteq V_1$，故 $C_0 \subset \langle V_1 \rangle$. 因为 C_0 的每条边是 R 的某元素的边界边，也是某个 2- 面的边界边，并且由于 R 至少有两个元素，故 C_0 不可能为 1- 面的面边界. 它与假设矛盾，推论证毕.

因此，作为推论 6.68 和推论 6.68 的应用，设 G 为 2- 连通平面欧拉图，仅当 $\langle V_1 \rangle$ 和 $\langle V_2 \rangle$ 是无圈的，$V(G)$ 的划分 $\{V_1, V_2\}$ 才是完美 A- 划分，并且当 $\langle V_1 \rangle$ 和 $\langle V_2 \rangle$ 是树时，这个划分为完美 A- 划分. 注意图 6.29 中图的 A- 划分是完美的，但相应的图 $\langle V_1 \rangle$ 和 $\langle V_2 \rangle$ 都是不连通的森林，而图 6.26 中的图尽管没有 A- 迹，但有如此的点分解 (见练习 6.20). 注意到图 6.29 的图仅有两个四边形，而其他的面均为三角形.

然而，若 G 是平面的欧拉三角剖分，则点划分 $\{V_1, V_2\}$ 导出无圈子图 $\langle V_1 \rangle, \langle V_2 \rangle$ 当且仅当这些子图是树 (见命题 3.63). 因此得到下面的结论.

定理 6.70 平面欧拉三角剖分的点划分 $\{V_1, V_2\}$ 是完美 A- 划分当且仅当 $\langle V_1 \rangle$ 和 $\langle V_2 \rangle$ 是树.

不用 A- 划分或完美 A- 划分的概念，我们能重新叙述定理 6.70. 为此，再次考虑平面欧拉三角剖分情形的推论 6.68 和推论 6.69. 在这个情形下，这两个推论互逆. 因为若 $\langle V_i \rangle$ 不连通，则 $\langle V_j \rangle$ 有不是面边界的圈，其中 $\{i, j\} = \{1, 2\}$ (见命题 6.63 和 [FLEI74a，推论 2]).

设 D 为给定的平面欧拉三角剖分，并给定它的 2- 面着色，假设它有 A- 迹 T 且有对应于 T 的点划分 $\{V_1, V_2\}$. 假设 $\langle V_\delta \rangle, \delta \in \{1,2\}$ 含有圈 Δ，由推论 6.68 可知，Δ 是 δ- 面 (三角形) 的边界. 记 $E(\Delta) = \{e_1, e_2, e_3\}$，由定义，$T$ 在 $V(\Delta)$ 的所有点导出 δ- 分裂，即 $\{\{e_1', e_2'\}, \{e_2'', e_3'\}, \{e_3'', e_1''\}\} \cap X_T = \varnothing$. 换句话说，$\Delta$ 的任两条边在 T 中不相继，我们称 T **分离** Δ 的边. 类似地，称 A- 迹 T 为**不分离**的当且仅当 T 不分离 D 的任何面边界. 另一方面，若 T 分离 D 的某个面边界的边，则对应的 $\langle V_\delta \rangle$ 含有一个圈 (它为三角形)，因而可重新叙述定理 6.70 如下：

定理 6.70a 对平面欧拉三角剖分 D 的点划分 $\{V_1, V_2\}$，下列叙述等价：

1) 对 $i = 1, 2$，$\langle V_i \rangle$ 是树；

2) D 有不分离的 A- 迹.

注意为确定一个不分离的 A- 迹，不必从一个 2- 面着色开始，我们是可以从相关于 $O^+(D)$ (或 $O^-(D)$) 的点划分 $\{V^+, V^-\}$ 开始的 (见引理 6.53):

定理 6.70 和定理 6.70a 是熟知的. 因为我们知道 2- 连通平面 3- 正则图 G_3 有哈密圈当且仅当它的对偶 $D = D(G_3)$ 有一个点划分 $\{V_1, V_2\}$，使得 $\langle V_1 \rangle$ 和 $\langle V_2 \rangle$ 都是树 (引理 3.74)，并且若 G_3 还是 2- 部图，则 $D = D(G_3)$ 是平面欧拉三角剖分. 在这种情况下，D 有重边当且仅当 $\kappa(G_3) = 2$. 因此，我们得到下面有关哈密顿圈和 A- 迹的等价性的结果 [FLEI74a，定理 2].

定理 6.71 2- 连通平面 3- 正则 2- 部图有哈密顿圈当且仅当它的对偶有不分离 A- 迹.

对定理 6.71 有更直接的证明，但据我所知，这个证明目前尚未发表，我把它归于塔特[①]. 由于它优美简短，我们将详细给出这个证明 (证明的本质是塔特的，叙述是作者的).

定理 6.71 的塔特证明 设 H 为 2- 连通平面 3- 正则 2 部图 G_3 的哈密顿圈. 从拓扑学的观点来看，H 构成了平面上的一条简单闭曲线，使得 $L := E(G_3) - E(H)$ 的某些开元素位于 $\operatorname{ext} H$ 中，某些位于 $\operatorname{int} H$ 中. 将 H 写成边序列，$H = e_1, e_2, \cdots, e_{2k}$，用 $s(e_j)$ 记开边 e_j 的点，其中 $j = 1, \cdots, 2k$. 构造简单闭曲线 $\mathcal{C}$ 如下：对 $i = 1, \cdots, k$，令 $\mathcal{C}_{2i-1}$ 为连接 $s(e_{2i-1})$ 和 $s(e_{2i})$ 的简单开曲线，使得

$$\mathcal{C}_{2i-1} - \{s(e_{2i-1}), s(e_{2i})\} \subset \operatorname{int} H$$

(并且位置充分靠近 H 的含与 e_{2i-1}, e_{2i} 关联的节). 类似地，对 $i = 1, \cdots, k$，令 $\mathcal{C}_{2i}$ 为连接 $s(e_{2i}), s(e_{2i+1})$ 的简单开曲线，使得

$$\mathcal{C}_{2i} - \{s(e_{2i}), s(e_{2i+1})\} \subset \operatorname{ext} H,$$

① 我不确信塔特是否知道我知道这个证明是他的，但他的证明是判断 [FLEI74a] 中提出的 A- 迹方法的本质. 当初稿及审稿人的意见返回给我时，塔特的名字被不正确地删除了. 然而我决定保持这里给出的方法及更早的出现在 [FLEI74a,REGN76a] 中的方法. 因为在某种程度上，它被证明是富有成效的，并且目前发展的 A- 迹的理论可能对找下面叙述的有关 A- 迹猜想的证明具有某些作用.

置 $e_{2k+1}=e_1$，不失一般性，对 $e\in L$ 和 $j=1,\cdots,2k$，$|\mathcal{C}_j\cap e|\leqslant 1$，

$$\mathcal{C}:=\bigcup_{j=1}^{2k}\mathcal{C}_j$$

有如下性质：每个 $e\in E(G_3)$ 恰与 $\mathcal{C}$ 有一个公共点. 对 $e\in E(G)$，这一性质从 $\mathcal{C}$ 的定义即得. 对 $e\in L$，这是 $|\mathcal{C}_j\cap e|\leqslant 1$ 及 G_3 是 2- 部图的推论. 注意 $e=xy$ 将 H 分成两条路 $P_1(x,y),P_2(x,y)$，使得 $P_1(x,y)\cup\{e\}$ 和 $P_2(x,y)\cup\{e\}$ 是偶图，并且沿着 $\mathcal{C}$，若 H 的某点位于 $\mathcal{C}$ 的左侧，则 H 的下一点位于 $\mathcal{C}$ 的右侧.

对每个 $j\in\{1,\cdots,2k\}$，G_3 中存在面 F_j' 和 F_j''，使得

$$\mathcal{C}_j\cap F_j'\neq\varnothing\neq\mathcal{C}_j\cap F_j''\text{ 且 }\mathcal{C}_j\cap F=\varnothing,\text{ 其中 }F\neq F_j',F_j'',$$

并且

$$F_j'\neq F_j''\text{ 当且仅当对 }e\in L\text{ 有 }\mathcal{C}_j\cap e\neq\varnothing.$$

这从上一段即得. 下面取 $v_j'\in\mathcal{C}_j\cap F_j'$ 和 $v_j''\in\mathcal{C}_j\cap F_j''$，使得 $v_j'=v_j''$ 当且仅当 $F_j'=F_j''$.

集 $V_T:=\{v_j',v_j''\mid j=1,\cdots,2k\}$ 的元素作为顶点，把 $\mathcal{C}$ 转换成平面 (图论的) 圈 T，其开边恰为 $\mathcal{C}-V_T$ 的 (拓扑上的) 连通分支. 由构造，T 的每条边恰与 G_3 的一条边有一个公共点，反之亦真，并且这个点是唯一确定的. 同样由构造，对 G_3 的每个面 F，存在拓扑的圆盘 $K\subset F$，使得 $K\cap\mathcal{C}=\{x\in V_T\cap F\}$. 因此，对 G_3 的每个面 F，能将 K 收缩到一个点 v_F，使得 T 的 (简化过程中发生的) 任何变形中没有一对开边相交. 因此，根据 T 是平面圈 (于是能看成它自身的 A- 迹)，T 被转换为图 D 的 A- 迹，其中 D 的顶点是上面的 v_F，其开边一一对应到 $\mathcal{C}-V_T$ 的连通分支. 正因为 H 为 G_3 的哈密顿圈，D 的这个 A- 迹是不分离的，由 T 和 D 的构造，不仅存在 $v_F\in V(D)$ 和 G_3 的面 F 之间的一一对应，而且对 G_3 的任何面 F',F''，$e_D=v_{F'}v_{F''}\in E(D)$ 当且仅当 $e\in E(\mathrm{bd}(F'))\cap E(\mathrm{bd}(F''))$ 存在且 $\mathcal{C}-V_T$ 对应于 e_D 的连通分支与 e 恰有一个公共点，然而这将 D 归为 G_3 的对偶.

反过来，假设 $D=D(G_3)$ 有不分离的 A- 迹 T_D. 考虑对 T_D 适当分裂每个 $v\in V(D)$ 到 $\dfrac{1}{2}d(v)$ 个 2- 价点 v_F 得到的圈 T，这里对 $v\in F$，v_F 属于 G_3 的面 F. 由构造，T 的每条开边恰好在一个点与 G_3 的一条开边相交，反之亦真. 这样，对对应于 T 的平面简单闭曲线 $\mathcal{C}$ 及每条边 $e\in E(G_3)$，$\mathcal{C}\cap\{e\}=\{s(e)\}$. $\mathcal{C}$ 对应于平面圈 C，$V(C)=\{s(e)\mid e\in E(G_3)\}$，使得 C 的边对应于 $\mathcal{C}-V(C)$ 的连通分支. 因为 T_D 是不分离的，对每个 $v\in V(G)$，若 $E_v=\{e_v.f_v,g_v\}\subseteq E(G_3)$，则不失一般性，或者 $s(e_v)s(f_v)\in E(C),s(e_v)s(g_v),s(g_v)s(f_v)\notin E(C)$，或者 $s(e_v)s(g_v),s(g_v)s(f_v)\in E(c),s(e_v)s(f_v)\notin E(C)$. 用 $E(H)=\{e_v,f_v\mid v\in V(G)\}$ 定义 H. 由定义，H 为 G_3 的 2- 正则支撑子图，并且因为对每个 $e\in E(G_3)$，$\mathcal{C}$ 为满足 $\mathcal{C}\cap e=\{s(e)\}$ 的简单闭曲线，因此，H 是连通的. 也就是说，H 为 G_3 的哈密顿圈，从而结束了证明.

6.3.1 平面欧拉图中的 A- 迹和平面 3- 正则图中的哈密顿圈之间的对偶性

有了定理 6.70，定理 6.70a 和定理 6.71，连通平面欧拉图 (更确切地，平面欧拉三角剖分) 的 A- 迹与连通可平面 3- 正则 2- 部图的哈密顿圈之间显然存在密切的关系.

当然，并非每个可平面 2- 连通 3- 正则 2- 部图都有哈密顿圈①. 图 6.30(a) 就是这样的例子，这实际上是最小的这样的例子且它是唯一确定的. 现将这个证明留作练习. 若用少一条边的 3- 正则立方体 Q_3 代替这个图的每个两边形，则得到一个不是哈密顿图的简单 2- 连通 3- 正则 2- 部平面图 (图 6.20(b)). [PETO81a,ASAN82a] 独立且几乎同时证明了这个图实际上是这种类型的最小的例子，并且它是唯一确定的.

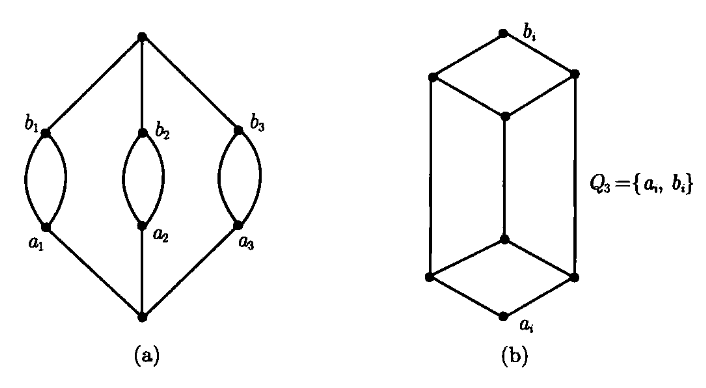


图 6.30　(a) 最小 2- 连通平面 3- 正则 2- 部非哈密顿图；(b) 对 $i=1,2,3$，在 (a) 中用 $Q_3-\{a_i,b_i\}$ 代替两边形 $\langle a_i,b_i\rangle$，得到这样最小的简单图

然而，对平面 3- 正则 2- 部图的哈密顿圈的兴趣，并不来自于定理 6.71 所表达的与平面欧拉三角剖分的 A- 迹的等价性. 回忆一下，在证明四色猜想等价于每个可平面 2- 连通 3- 正则图有 1- 因子分解之后，泰特猜想每个可平面 3- 连通 3- 正则图是哈密顿的 (见 [KÖNI36a，p27, 28]). 这个在 1880 年提出的旨在简单证明四色猜想的猜想，在 1946 年被塔特否定，他随后猜想若在泰特猜想中用 2- 部图代替可平面图，这个图就是哈密顿的 [TUTT71a]. 霍顿 (J.D.Horton) 否定地证明了塔特猜想，他的第一个反例有 96(!) 个顶点 (后来他发现了有 92 个点的反例 [HORT82a]). 更近地，埃林厄姆 (M.N.Ellingham) 构造了 78 个点的反例，并且埃林厄姆与霍顿的联合工作中构造了 54 个点的塔特猜想的反例 (霍顿构造的最早的图见 [BOND76a])，其他反例及更多的细节见 [ELLI82a,ELLI83a]. 不久前，乔治斯

① 与 A- 迹的情形形成对照，哈密顿圈的存在独立于任何实际的嵌入. 另一方面，可平面 3- 正则 2- 部图 G_3 有哈密顿圈当且仅当对 G_3 的每个平面嵌入 H_3，$D(H_3)$ 有不分离的 A- 迹 (定理 6.71). 这是一个有趣的事实，因为在 $\kappa(G_3)=2$ 的情形下，对 G_3 的两个嵌入 H_3', H_3''，$D(H_3')\not\simeq D(H_3'')$ 也许成立.

(J.P.Georges) 和卡尔门斯 (A.K.Kel'mans) 得到了 50 个点的反例，其为圈 4- 边连通图 [GEOR89a,KELM88a]①.

不过下面的猜想通常归功于巴尼特 (D.Barnette). 塔特也已经考虑这个猜想 (1972 年的私人通信), 因而我们称之为巴尼特–塔特猜想 (BTC).

猜想 6.72 (BTC) 每个可平面 3- 连通 3- 正则 2- 部图是哈密顿的.

利用定理 6.71，BTC 等价于下面的猜想 (注意到 3- 连通 3- 正则可平面图以平面简单三角剖分图作为其对偶图，反之也真).

猜想 6.73 每个平面简单欧拉三角剖分有不分离的 A- 迹.

然而，尽管下面的猜想看起来比猜想 6.73 弱，但它确实与后者等价 [FLEI74a].

猜想 6.74 每个平面简单欧拉三角剖分有 A- 迹.

从下面的结果即得到上面两个猜想 (从而猜想 6.74 和 BTC) 的等价. 那里我们考虑平面的两个欧拉三角剖分 D_0 和 D_1，它们如下相互关联：对 D_0 的每个面边界 $\Delta = \langle ab, bc, ca\rangle$，取一个去掉外面边界 $\Delta_0 = \langle a, b, c\rangle$ 的平面八面体，把它嵌入在 Δ 的内部并等同对应点 a, b, c (图 6.31).

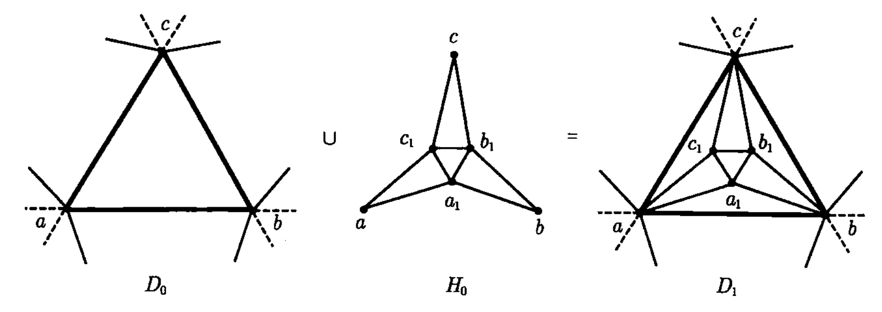


图 6.31 在平面欧拉三角剖分 D_0 中，对 D_0 的每个面嵌入 H_0 的一个拷贝得到平面欧拉三角剖分 D_1 (该图仅给出了对一个面的操作)

引理 6.75 设 D_0 为平面欧拉三角剖分，D_1 如上所述从 D_0 构造出，那么下列叙述等价：

1) D_0 有不分离的 A- 迹;

2) D_1 有 A- 迹.

证明 首先假设 D_0 有不分离的 A- 迹. 应用定理 6.70a，可以记 $V(D_0) = V_1^0 \cup V_2^0$，使得 $\langle V_i^0\rangle\,(i=1,2)$ 是树. 再考虑 D_0 任一面，如 F，使得 $V(\mathrm{bd}(F)) = \{a, b, c\}$. 由于 $\langle V_i^0\rangle\,(i=1,2)$ 是树，故 $V_1^0 \cap V(\mathrm{bd}(F)) \neq \varnothing \neq V_2^0 \cap V(\mathrm{bd}(F))$. 因此，不失一般性，记 $a, b \in V_j^0, c \in V_k^0$，其中 $\{j, k\} = \{1, 2\}$. 将 c_1 边接到 V_j^0，a_1, b_1 边接到 V_k^0. 对 D_0 的每个面 F 施行这种 V_j^0 和 V_k^0 的扩张，得到 D_1 的点划分 $\{V_1^1, V_2^1\}$.

① 格罗普 (H.Gropp) 先生把我的注意力引到这两篇文章. 正如他在 [GROP89a] 中指出的，围长大于等于 6 的 2- 部 3- 正则图早在 1887 年就已经被研究，但那时利用的术语为“对称构形”.

从这个点划分的构造得 $\langle V_1^1\rangle$ 和 $\langle V_2^1\rangle$ 是无圈的，因而它们是树. 由定理 6.70a，D_1 有 (不分离的)A- 迹.

反过来，若 D_1 有 A- 迹，则由推论 6.68，相应的 A- 划分 $\{V_1^1, V_2^1\}$ 有如下性质：$\langle V_1^1\rangle$ 和 $\langle V_2^1\rangle$ 含有一个圈仅当这个圈是 D_1 的一个面边界。这样，对 $V_1^0 = V(D_0)\cap V_1^1$ 和 $V_2^0 := V(D_0)\cap V_2^1$，$\langle V_1^0\rangle$ 和 $\langle V_2^0\rangle$ 是无圈的. 由命题 3.63 的 1) 和定理 6.70a，D_0 有不分离的 A- 迹. 引理得证.

由引理 6.75，并注意到猜想 6.73 和猜想 6.74 都是对所有的平面简单欧拉三角剖分叙述的，并且 D_1 是简单的当且仅当 D_0 是简单的 (注意 $D_0 \subset D_1$)，它们之间的等价性即得.

然而，这两个猜想的等价性与 3- 正则 2- 部图的相应的等价性相配. 因为BTC 等价地说，*每个可平面 3- 连通 3- 正则 2- 部图有控制圈*. 用 3- 正则图的术语，沿用引理 6.75 的证明，这个等价性的证明即得，证明留作练习.

[FLEI74a] 中猜想：*每个可平面 3- 连通欧拉图有 A- 迹* (注意在这种情形下不必谈及平面图，因为嵌入的变化或者使 $O^+(v)$ 不变，或者对每个点 v，用 $O^-(v)$ 代替 $O^+(v)$). 若这个猜想成立，则由于除了 K_3 外，平面简单三角剖分都是 3- 连通的，故它解决了猜想 6.74.

如瑞格尼尔所做的，为构造没有 A- 迹的可平面的 3- 连通欧拉图，用类似于上面从 D_0 构造 D_1 的方法进行.

从非哈密顿的平面 3- 连通 3- 正则图 G_3 开始，这样的图存在 (见 P55). 考虑它的对偶 $D := D(G_3)$，并且记 D 的奇顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k-1}, v_{2k}\,(k \geqslant 1)$. 考虑路集合 $P := \{P_{1,2}, \cdots, P_{2k-1,2k}\}$，使得 $P_{2j-1,2j}$ 连接 v_{2j-1} 和 v_{2j} (见推论 5.3)，其中 $1 \leqslant j \leqslant k$.

对任意固定的 $j\,(1 \leqslant j \leqslant k)$，记

$$P' := P_{2j-1,2j} = x_0, x_0x_1, x_1, \cdots, x_{t-1}x_t, x_t, \quad \{x_0, x_t\} = \{v_{2j-1}, v_{2j}\},$$

并且对 $i = 1, \cdots, t$，令 y_i 为定义含 $x_{i-1}x_i$ 的面边界的两点之一，并令 $\varDelta_i$ 为含 x_{i-1}, x_i, y_i 的面边界 (三角形). 采用为从 D_0 得到 D_1 而把 H_0 嵌入到 $\varDelta$ 的内部 (图 6.31) 那样的方法，把图 6.32 所示的 H_i 嵌入到 $\varDelta_i$ 的内部. 对 $i = 1, \cdots, t$ 这样做，就得到仅含三边形和四边形面边界的平面图 D' 且 $D \subset D'$. 因为

$$d_{D'}(v_{2i-1}) = d_D(v_{2j-1}) + 3 \equiv d_{D'}(v_{2j}) = d_D(v_{2j}) + 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),$$

$$d_{D'}(x_i) = d_D(x_i) + 6 \equiv d_D(x_i) (\mathrm{mod}\ 2), \quad i = 1, \cdots, t-1,$$

$$d_{D'}(y_i) = d_D(y_i) + 2 \equiv d_D(y) (\mathrm{mod}\ 2), \quad i = 1, \cdots, t,$$

故 D' 仅有 $2k - 2$ 个奇点.

注意到 D' 中四边形面边界不含 D 的边. 因此，若选取 $P'' \in P$, $P'' \neq P'$，则用从 D 得到 D' 同样的方法可从 D' 得到 D''. 当然，对应于上面 y_i 之一的点可能不位于 $V(D)$ 中，但由于对 D' 的每个四边形面边界 Q，$E(P'') \cap E(Q) = \varnothing$ (注意 $P'' \subset D$)，故这没有关系. 于是 D'' 仅有 $2k-4$ 个奇点. 因此，k 步后，我们得到仅有三边形和四边形面边界的平面欧拉图 $D^{(k)}$ 且 $D \subset D^{(k)}$. 因为 $|V(G_3)| > 2$，故 $D \neq K_3$，即 D 是 3- 连通的，由此，$D^{(k)}$ 是 3- 连通的简单图 (这从 $D^{(k)}$ 的构造得到).

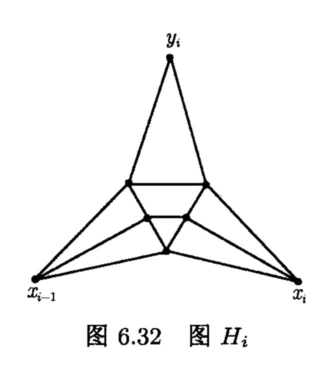


图 6.32 图 H_i

然而，$D^{(k)}$ 可能含有也是 D 的面边界的面边界 Δ. 对这样的 Δ，用图 6.31 中通过在 D_0 中嵌入 H_0 得到 D_1 的方法. 最后得到的图 G 有下列性质:

1) G 是平面 3- 连通欧拉图;

2) $D \subset G$;

3) D 中没有面边界为 G 的面边界.

由于这些性质，若 G 有 A- 迹，则 $V(G)$ 的相应的 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 必导出 D 的点划分 $\{V_1', V_2'\}$，使得 $\langle V_1' \rangle$ 和 $\langle V_2' \rangle$ 是无圈图 (见性质 3) 和推论 6.68). 因此，根据 D 是平面简单三角剖分，它们是树. 也就是说 (见引理 6.74)，满足 $D = D(G_3)$ 的 G_3 有哈密顿圈. 这与 G_3 的选取矛盾，表明 G 没有 A- 迹.

下面一般性观察是这个从 $D = D(G_3)$ 构造 G 的正面结果，它的完整证明包含在后面定理 6.91 的证明中.

设 G 是 3- 连通可平面 3- 正则图，那么存在满足 $D = D(G_3) \subset G$ 的平面 (甚至是可平面 3- 连通) 欧拉图 G，使得 D 的面边界都不是 G 的面边界，并且 G_3 是哈密顿的当且仅当 G 有 A- 迹. **(6.A)**

此外，我们可作如下观察: 在上面构造不具有性质 1)~3) 的 A- 迹的平面 3- 连通欧拉图 G 中，能做到使得 D 的每个面至多含图 6.32 的图 H_i 的一个拷贝. 这从 [FLEI74c，定理 10 及其证明] 得到 (也见下面关于图 6.35 的调整集的讨论). 另一种得到具有那个性质的 G 的方式是根据中国邮递员问题的应用，将在集中讨论复杂性的一节中处理.

将上面从平面 3- 连通 3- 正则图 G_3 经 $D = D(G_3)$ 构造平面 3- 连通欧拉图 G 与猜想 6.74 比较，并注意到 G 只有三边形和四边形面边界，人们怀疑是否可能否定这个猜想 (进而否定 BTC). 人们所需要的是这样的平面三角剖分 D_2，除了两个点外均为偶价点，并且剩下的两点在相同的面边界上并为奇价点. 不失一般性，假设这两点 (称为 x_{i-1}, x_i) 位于外面边界 $\mathrm{bd}(F_\infty)$ 上，那么 $H_i' := D_2 - \mathrm{bd}(F_\infty)$ 的外面边界就会像图 6.32 的 H_i 的情形是六边形，x_{i-1} 和 x_i 为 H_i' 的仅有的奇点，并

且 H_i' 除了外六边形外仅有三边形面边界. 那么上面由非哈密顿图 G_3 开始的构造给出没有 A- 迹的平面简单三角剖分 G. 不幸的是，这样的 D_2 不存在 [MOON65a, FLEI74b].

引理 6.76　不存在平面三角剖分 G 恰有两个奇顶点 x, y，使得 $xy \in E(G)$.

证明　我们给出两个证明，它们都是用反证法. 第一个是睦恩 (Moon) 给出的证明，第二个是作者数年前发现的，但之前从未发表.

1) 假设存在这样的 G，那么 $H := G - \{xy\}$ 是有一个四边形面 Q 及其他面都是三边形的平面欧拉图. 考虑使 Q 为 1- 面的 H 的 2- 面着色，令 $\mathcal{F}_i = \{F \mid F$ 是 i- 面$\}$ $(i = 1, 2)$. 因为 H 的每条边恰在一个 1- 面及一个 2- 面的边界上，故

$$|E(H)| = \sum_{F \in \mathcal{F}_1} |E(\mathrm{bd}(F))| = \sum_{F \in \mathcal{F}_2} |E(\mathrm{bd}(F))|.$$

另一方面，对 $F \neq Q$，$|E(\mathrm{bd}(F))| = 3$ 推出

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_1} |E(\mathrm{bd}(F))| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \quad 和 \quad \sum_{F \in \mathcal{F}_2} |E(\mathrm{bd}(F))| \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3).$$

显然，与以上的等式矛盾.

2) 假设 G 存在. 令 $H = G - \mathrm{bd}(F_\infty)$，这里我们不妨设 $x, y \in V(\mathrm{bd}(F_\infty))$. 考虑 K_4 的平面嵌入，并记 $V(K_4) = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$，使得 x_1y_1, x_2y_2 为 K_4 的 1- 因子. 设 F_i 为满足 $x_iy_i \in E(\mathrm{bd}(\mathcal{F}_i))$ 的面，其中 $i = 1, 2$，于是 $F_1 \neq F_2$. 在 F_1 和 F_2 中分别嵌入 H 的一个拷贝，并在 H 的每个拷贝中分别等同 x_i 和 x 及 y_i 和 y，其中 $i = 1, 2$. 在 H 的相应拷贝中，将 $\mathrm{bd}(F_\infty) \cap H$ 的顶点 $z \neq x, y$ 与 $\mathrm{bd}(F_i) \subset K_4$ 的相应顶点 z_i 等同起来，其中 $i = 1, 2$ (注意：$z_1 \in \{x_2, y_2\}, z_2 \in \{x_1, y_1\}$). 因为对 $v \in V(K_4)$ 有

$$d_{G_1}(v) \equiv 3 + d_H(x) + d_H(z) \equiv 3 + d_H(x) \equiv 3 + d_H(y) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2),$$

所以新图 G_1 为平面欧拉三角剖分，$\chi(G_1) = 3$ 且 $K_4 \subset G_1$，由 $\chi(K_4) = 4$ 得到矛盾.

用 3- 正则图的语言来叙述，引理 6.76 说明不存在平面 (2- 连通)3- 正则图，它恰有两个奇面边界且这两个奇面边界有一条公共边.

然而，[GOOD75a] 部分地解决了 BTC. 为叙述古迪 (Goodey) 的结果，设 G_3 是有下列性质的可平面 3- 连通 3- 正则 2- 部图：

1) 对 G_3 的每个面 F，$|E(\mathrm{bd}(F))| \in \{4, 6, 8\}$；

2) 对 G_3 的至多一个面 F，$|E(\mathrm{bd}(F))| = 8$；

3) 若存在满足 $|E(\mathrm{bd}(F_8))| = 8$ 的面 F_8，那么存在 F_4 满足 $|E(\mathrm{bd}(F_4))| = 4$ 且 $\mathrm{bd}(F_8) \cap \mathrm{bd}(F_4) \neq \varnothing$.

令 $\mathcal{B}_0$ 是有上面性质的所有 G_3 的集合.

从欧拉多面体公式可知，若 $\mathcal{B}_0$ 中的 G_3 没有八边形面边界，则它恰有 6 个四边形面边界；否则，它恰有 7 个四边形面边界 (见练习 6.23).

古迪的结果可如下叙述：

定理 6.77 设在 $\mathcal{B}_0$ 中任意选定 G_3，并且设 $F_{\max}$ 是满足 $|E(\mathrm{bd}(F_{\max}))| = \max$ 的面，使得存在四边形面 F_4 满足 $\mathrm{bd}(F_{\max}) \cap \mathrm{bd}(F_4) \neq \varnothing$，那么 G_3 存在哈密顿圈 H 满足 $(E(\mathrm{bd}(F_{\max})) \cap \mathrm{bd}(F_4)) \in E(H)$ (注意到 3- 连通可平面 3- 正则图中的任意两个面 F', F'' 有 $|E(\mathrm{bd}(F')) \cap E(\mathrm{bd}(F''))| \in \{0, 1\}$).

我们将把古迪的定理 6.77 的证明翻译成 A- 迹的理论. 为此，若 $e \in E(G_3)$ 为 G_3 的哈密顿圈 H 的一条边，则首先要弄清从 $D(G_3)$ 中点的 δ- 分裂来看，这意味着什么. 此时不考虑 G_3 是 2- 部图. 由引理 3.74，G_3 有哈密顿圈 H 当且仅当对 $D = D(G_3)$，可记 $V(D) = V_1 \cup V_2$ 而 $\langle V_i \rangle_D$ 为树，其中 $i = 1, 2$. 此外，再由这个引理，H 恰含 D 中对应于 $\{v_1 v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ 的那些边. 也就是说，对固定的 $i \in \{1, 2\}$，考虑 G_3 对应于 $v_j \in V_i$ 的面边界 $\mathrm{bd}(F_j)$，则 $E(H) = \bigcup\limits_{v_j \in V_i} E(\mathrm{bd}(F_j)) - \{g_{j,k} \in E(\mathrm{bd}(F_j) \cap \mathrm{bd}(F_k)) \mid v_j, v_k \in V_i\}$ (见引理 3.74 的证明). 现注意到 G_3 是 2- 部图，故 D 为简单欧拉三角剖分. 因此，考虑与 $H \subset G_3$ 相对应的 D 的完美 A- 划分 V_1, V_2 (见定理 6.70，定理 6.70a 和定理 6.71)，对与 $E(H)$ 中边 e 对应的边 $e^* = xy$ 有 $|\{x, y\} \cap V_1| = |\{x, y\} \cap V_2| = 1$. 此外，因 $\{V_1, V_2\}$ 为完美 A- 划分，即 $(D_{V_1,1})_{V_2,2}$ 和 $(D_{V_2,1})_{V_1,2}$ 都是圈，故不妨设 $x \in V_1, y \in V_2$. 用 δ- 分裂的语言，这意味着若 D 是 2- 面着色的，则 D 有不分离的 A- 迹，它在 x 导出 1- 分裂，在 y 导出 2- 分裂.

令 $\mathcal{T}_0$ 表示所有平面的 2- 面着色简单欧拉三角剖分 D 的 (外面为 1- 面的) 集，具有以下性质：

1') 对每个 $v \in V(D)$，$d_D(v) \in \{4, 6, 8\}$；

2') 对至多一个 $v \in V(d)$，$d_D(v) = 8$；

3') 若 $V(D)$ 中存在 v_8，使得 $d_D(v_8) = 8$，则 v_8 邻接到 D 的一个 4- 价点.

同上，从欧拉多面体公式可知，若 $\mathcal{T}_0$ 中 D 没有 8- 价点，则它恰有 6 个 4- 价点；否则，它有 7 个 4- 价点 (见练习 6.23).

注意 $\mathcal{B}_0$ 和 $\mathcal{T}_0$ 都是无限集，这从 [GRÜN67a, p254, 定理 2] 或引理 3.58，以及由对偶化 $\mathcal{B}_0$ 和 $\mathcal{T}_0$ 的元素一一对应这个事实得到. 因此，有以下关于 A- 迹的结果：

定理 6.77a 设任意选定 $D \in \mathcal{T}_0$，令 $v_{\max}$ 为 $V(D)$ 中的最大价点且使得它与一个 4- 价点 w 相邻，那么 D 有不分离 A- 迹，它在 $v_{\max}$ 导出 1- 分裂，在 w 导出 2- 分裂.

在证明定理 6.77a 之前需要建立某些其他结果. 为此，定义特别的平面欧拉三角剖分类.

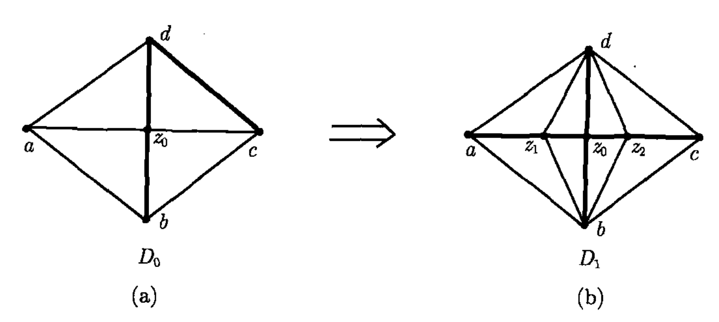


图 6.33　用 W_4 扩张从平面欧拉三角剖分 D_0 得到平面欧拉三角剖分 D_1 (可能 $a=c\neq d$ 或 $b=d\neq c$)

设 D 为平面三角剖分且设 $\Delta=\langle a,b,c\rangle$ 为 D 的一个面边界. 在 D 的对应面上嵌入图 6.31 中的图 H_0 (即用八面体 O_6 代替 Δ)，称得到的图为 D_1. 称D_1 **源于 D 在 Δ 作八面体扩充**(简称为 **O_6- 扩充**). 为定义第二个运算，假设 $V(D)$ 中存在 4- 价点 z_0，并考虑由 $N^*(z_0)$ 定义的 4- 轮 W_4. 由 $O^+(z_0)=(az_0,bz_0,cz_0,dz_0)$ 定义 $N(z_0)=\{a,b,c,d\}$ (W_4 可能是退化的，即 $a=c$ 或 $b=d$). 定义平面三角剖分 D_1 如下：

$$D_1=(D-\{az_0,cz_0\})\cup\{z_1,z_2,az_1,bz_1,dz_1,z_0z_1,cz_2,bz_2,dz_2,z_0z_2\}.$$

称 D_1 源于 D 用 4- 价点 z_0 为中心的 **W_4- 扩充** (图 6.33).

令 n 为正整数，记 $D_0=D$，$D_n=D'$，并且对 $i=1,\cdots,n$，D_i 是源于 D_{i-1} 的 O_6- 或 W_4- 扩充. 称 $D_\prime$ 源于 D 的一系列 O_6- 和 (或)W_4- 扩充. 作为上面定义的推论，有下面的论断成立：

1) D' 是欧拉的当且仅当 D 是欧拉的；

2) 若 $|V(D)|>4$，则 D 是简单的当且仅当 D' 是简单的.

不过，条件 $|V(D)|>4$ 不能去掉，八面体能看成从由两个 4- 价点、两个 2- 价点构成的平面欧拉三角剖分通过一个 W_4- 扩充得到的. 若 $|V(D)|>4$ 且 $a=c$ 或 $b=d$，则 D 有两对重边：两条边 ba 及相应的两条边 z_0a 或两条边 z_0b. 然而，通过一个 W_4- 扩充只能消去一对这样的重边. 这由下面的观察即得.

首先，若 D_i 源于 D_{i-1} 的一个 O_6- 扩充，则 $E(D_{i-1})\subset E(D_i)\,(i\in\{1,\cdots,n\})$. 因此，若 $|V(D_{i-1})|>3$，则与 D_{i-1} 中 a,b,c 的价无关 (其中 $\Delta=\langle a,b,c\rangle$，图 6.31)，对每个 $j\,(i\leqslant j\leqslant n)$，$D_j-\{a,b,c\}$ 不连通 (若 D_{i-1} 有一个 2- 价点 $x\in\{a,b,c\}$，则 $D_j-(\{a,b,c\}-\{x\})$ 已经不连通. 若 D_{i-1} 中 a,b,c 均不是 2- 价点，则对 $y\in\{a,b,c\}$，$d_{D_i}(y)\geqslant 6$. 这蕴涵了在 D_k 中，a,b,c 都不能是 W_4- 扩充的中心，其中 $i\leqslant k\leqslant n$).

其次，若 D_i 源于 D_{i-1} 的 W_4- 扩充且 $d_{D_{i-1}}(a) > 4$，$d_{D_{i-1}}(c) > 4$，则 $Q = \langle a,b,c,d\rangle$ 在每个 D_j 中是一分离 4- 边形，其中 $i-1 \leqslant j \leqslant n$. a 和 c 的价条件蕴涵了点 $x \notin \{a,b,c,d,z_0\}$ 的存在性，此外，$E(Q) \subset E(D_j)$，其中 $i-1 \leqslant j \leqslant n$.

我们通过这些讨论导出了下面的结构化结果，并且采用图 6.31 和图 6.33 的记号来叙述.

引理 6.78 设 D 为平面简单欧拉三角剖分，它由八面体 O_6 经一系列 O_6- 和 (或) W_4- 扩充得到 (这个序列非空). 那么下面的论断至少一个为真:

1) D 含一个分离三角形 $\varDelta = \langle a,b,c\rangle$ 和 $O_6 \supset \varDelta$ 作为导出子图，使得 $D_0' := D - H_0$ 能从 O_6 经一系列 (可能为空) O_6- 和 (或)W_4- 扩充得到 $(H_0 := O_6 - \varDelta)$;

2) D 至少含两个 4- 价点 z_0', z_0''，使得相应的 4- 轮 W_4', W_4'' 有下面的性质:

$$d_D(z_1') = d_D(z_2') = d_D(z_1'') = d_D(z_2'') = 4,$$

$$E(W_4') \cap E(W_4'') = \varnothing,$$

$$D_0' := (D - \{z_1', z_2'\}) \cup \{a'z_0', c'z_0'\} \quad \text{和} \quad D_0'' \text{ (类似定义)}$$

能从 O_6 经一系列 (可能为空)O_6- 和 (或)W_4- 扩充得到.

证明 由假设，存在一系列平面欧拉三角剖分 $D_0, D_1, \cdots, D_n$，使得 $D_0 = O_6$，$D_n = D$，并且对 $i = 1, \cdots, n$，D_i 源于 D_{i-1} 的 O_6- 或 W_4- 扩充.

假设 $n = 1$. 若 D 源于 O_6 的 O_6- 扩充，则这个 (唯一确定的) 分离三角形 $\varDelta = \langle a,b,c\rangle$ 的两个面都是同构于 $H_0 := O_6 - \varDelta$ 的图. 因此，引理的论断 1) 成立. 但若 D 源于 O_6 的 W_4- 扩充，则 D 同构于 6- 侧双棱锥. 因此，能将 $V_4(D)$ 划分成 $\{V_4', V_4''\}$，使得 $P' := \langle V_4'\rangle$ 和 $P'' := \langle V_4''\rangle$ 都是长为 2 的路 (其中 $V_4(D)$ 定义了这个双棱锥的 6- 边形基)，那么 $W_4' := \langle V_4' \cup V_6(D)\rangle$ 和 $W_4'' := \langle V_4'' \cup V_6(D)\rangle$ 是满足引理论断 2) 的 4- 轮 (z_0', z_0'' 分别是 P', P'' 的 2- 价点，并且 z_1', z_2' (z_1'', z_2'') 是 P' (P'') 的端点). 于是当 $n = 1$ 时，引理成立.

考虑 $n > 1$ 的情形，首先假设对某 $i \in \{1, \cdots, n\}$，D_i 源于 D_{i-1} 的 O_6- 扩充. 不失一般性，假设对 D_{i-1} 中实施 O_6- 扩充的三角形 $\varDelta = \langle a,b,c\rangle$ 有 $\varDelta \neq \mathrm{bd}(F_\infty)$，其中 F_∞ 为 D_{i-1} 的外面. 因此，用于在 $\varDelta$ 实施 O_6- 扩充的图 H_0 位于 $\varDelta$ 的有界区域内. 此外，$\varDelta$ 分离 D_i 且对任意 $x \in \{a,b,c\}$，于是有 $d_{D_i}(x) \geqslant 6$. 于是，在 $\varDelta$ 的 O_6- 扩充后实施的每个 O_6- 或 W_4- 扩充或者完全在 $\varDelta$ 的“外部”，或者完全在 $\varDelta$ 的“内部”.

若后期的这些扩充不都在 $\varDelta$ 的同一面上发生，则考虑最后发生在 $\varDelta$ 外面和最后发生在 $\varDelta$ 内部的扩充. 记相应的图为 D_j 和 D_k $(i < j, k \leqslant n)$.

若 D_j, D_k 分别源于 D_{j-1}, D_{k-1} 的 W_4- 扩充，则对相应的 4- 轮 $W_4^{(j)}$ 和 $W_4^{(k)}$，引理的论断 2) 成立，这时 $W_4' := W_4^{(j)}, W_4'' := W_4^{(k)}$: 这从 j 和 k 的选取及引理 6.78

前面的讨论，并通过定义 D_0' 的系列 $D_0^*, \cdots, D_{n-1}^*$ 和 D_0'' 的系列 $D_0^{**}, \cdots, D_{n-1}^{**}$ 得到，其中

$$D_r^* = D_r,\ r = 0, \cdots, j-1, \quad D_s^{**} = D_s,\ s = 0, \cdots, k-1,$$

$$D_r^* = \left(D_{r+1} - \left\{z_1^{(j)}, z_2^{(j)}\right\}\right) \cup \left\{a^{(j)}z_0^{(j)}, c^{(j)}z_0^{(j)}\right\}, \quad r = j, \cdots, n-1,$$

$$D_s^{**} = \left(D_{s+1} - \left\{z_1^{(k)}, z_2^{(k)}\right\}\right) \cup \left\{a^{(k)}z_0^{(k)}, c^{(k)}z_0^{(k)}\right\}, \quad s = k, \cdots, n-1,$$

其中对 $\ell = j, k$, $z_0^{(\ell)}, z_1^{(\ell)}, z_2^{(\ell)}, a^{(\ell)}, c^{(\ell)}$ 对应于图 6.33 的 z_0, z_1, z_2, a, c. 注意到对每个 $r \in \{j, \cdots, n\}$ 及每个 $s \in \{k, \cdots, n\}$, $d_{D_r}(z_1^{(j)}) = d_{D_r}(z_2^{(j)}) = d_{D_s}(z_1^{(k)}) = d_{D_s}(z_2^{(k)}) = 4$.

因此，不失一般性，假设 D_j 源于 D_{j-1} 的 O_6- 扩充. 用 $H_0^{(j)} \simeq H_0$ 记对三角形 $\Delta^{(j)}$ 实施 O_6- 扩充所用的图. 由 j 的选取，对 $r = j, \cdots, n$，八面体 $O_6^{(j)} = \Delta^{(j)} \cup H_0^{(j)}$ 属于每一个 D_r，故我们有 $D_0' := D - H_0^{(j)}$ 源于 O_6 的一系列 O_6- 和 (或) W_4- 扩充，即

$$D_0, \cdots, D_{j-1}, D_{j+1} - H_0^{(j)}, \cdots, D_n - H_0^{(j)}.$$

因为当在 Δ 的 O_6- 扩充都在 Δ 的外部时，我们能用同样的讨论 (用 Δ 和 H_0 取代 $\Delta^{(j)}$ 和 $H_0^{(j)}$)，由已解决的情形，我们只需假定后面的所有扩充发生在 Δ 的内部.

特别地，可以假设 D_n 不源于 D_{n-1} 的 O_6- 扩充 (否则，对 $D := D_n$，$D_0' := D_n - H_0^{(n)}$，$H_0^{(n)} = H_0$，引理的论断 1) 成立). 用 W_4'' 记相应于从 D_{n-1} 得出 D_n 的 W_4- 扩充的 4- 轮. 取使得 D_i 源于 D_{i-1} 的 O_6- 扩充的最小的 i ($i \in \{1, \cdots, n\}$).

若 $i = 1$，则 $H_0^* := D_1 - (H_0 \cup \Delta) \simeq H_0$，由此，$H_0^* \subset D_t$ ($t = 2, \cdots, n$)，因为 $H_0 \cup \Delta \simeq O_6$，我们能定义

$$D_0^* := H_0 \cup \Delta \quad 和 \quad D_{t-1}^* := D_t - H_0^*,\ t = 2, \cdots, n,$$

得到 $D_{n-1}^* = D - H_0^* =: D_0'$ 源于 O_6 的一系列 O_6- 和 (或)W_4- 扩充.

若 $i = 2$，则 D_1 同构于 6- 侧双棱锥. 根据 $O^+(W) = (wv_1, wv_2, \cdots, wv_6)$，记 $V_4(D_1) = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$，其中 $V_6(D_1) = \{w, x\}$. 不失一般性，选择这个记号，使得 $\Delta = \langle v_5, v_6, w\rangle$ $(= \langle a, b, c\rangle)$. 但这样，$W_4' = \langle\{v_1, v_2, v_3, w, x\}\rangle$ 是完全位于 Δ 外部的 4- 轮且 $W_4' \subset D_j$ ($j = 1, \cdots, n$). 因此，从 D_{n-1} 到 D_n 的 W_4- 扩充 (如上) 蕴涵 W_4'' 完全位于 Δ 内部，于是 $E(W_4') \cap E(W_4'') = \varnothing$. 由于 v_2, v_1, v_3, v_6, v_4 分别起了图 6.33 中 z_0, z_1, z_2, a, c 的作用，定义

$$D_{j-1}^* := (D_j - \{v_1, v_3\}) \cup \{v_6v_2, v_4v_2\}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

这便有 $D_0^* \simeq O_6$，$D_{n-1}^* = D_0'$ (如引理论断 2) 的定义)，并且 D_j^* 源于 D_{j-1}^* 的从 D_j 到 D_{j+1} 的相同扩充，其中 $j = 1, \cdots, n-1$.

为结束引理的证明，还必须考虑情形 $i>2$ 或者 D 源于 O_6 的一系列 W_4- 扩充. 首先假设 D_j 是 $(4+2j)$- 侧双棱锥，其中若 $i>2$, 则 $j=i-1$; 若 $D:=D_n$ 源于 O_6 的 n 次 W_4- 扩充，则 $j=n$. 或者类似于情形 $i=2$，找到 W_4' 和 W_4''，或者可取 $(4+2n)$- 侧双棱锥的两个边不交的 4- 轮 W_4', W_4''. 在这两种情况下，W_4'，W_4'' 都满足引理的论断 2).

最后我们考虑存在 $k<i$, $k\leqslant n$，使得对 $1\leqslant j\leqslant k-1$, D_j 为 $(4+2j)$- 侧双棱锥，而 D_k 不是双棱锥的情形. 注意到此时 D_1 是 6- 侧双棱锥，由此，D_k 含一个四边形 $Q=\langle w,x,v_r,v_{r+2}\rangle$，其中对 $s\in\{r,r+2\}$ 有 $\{w,x\}=V(D_{k-1})-V_4(D_{k-1})$，$d_{D_{k-1}}(v_s)=d_{D_k}(v_s)-2=4$，并假设选择记号使得对 $t=1,\cdots,2k+2$ 有 $v_tv_{t+1}\in E(D_{k-1})$ (置 $v_{2k+3}=v_1$). 不失一般性，令 $r=1$，于是 $Q=\langle w,x,v_1,v_3\rangle$ 是不含 D_j $(j\geqslant k\geqslant 2)$ 的 4- 价点的分离四边形. 这样每个从 D_j 产生 D_{j+1} 的 O_6- 或 W_4- 扩充或完全发生在 Q 的内部，或完全发生在 Q 的外部，$j=k,\cdots,n-1$. 按前面的思路 (用 Q 取代 Δ)，得到所有这些扩充都发生在 Q 的同一侧. 另一方面，在 D_k 中，v_2 和 v_5 分别为 4- 轮 $W_4^{(2)}=\langle N^*(v_2)\rangle$ 和 $W_4^{(5)}=\langle N^*(v_5)\rangle$ 的中心，它们位于 Q 的不同侧，因而对某 $W_4'\in\{W_4^{(2)},W_4^{(5)}\}$ 及 $j=k,\cdots,n$，$W_4'\subset D_j$ 且 $|V_4(W_4')\cap V_4(D_j)|=3$. 用 W_4'' 记对应于从 D_{n-1} 产生 D_n 的 W_4- 扩充的 4- 轮. 由序列 $D_0,\cdots,D_{n-1}=D_0''$，相应地，定义由 O_6 得到的 D_0''. 至于 D_0'，记 $W_4'=\langle\{z_0',z_1',z_2',b',d'\}\rangle$ 且 a',c' 类似于图 6.33 的记号，这里若 $W_4'=W_4^{(2)}$，则 $\{b',d'\}=\{v_1,v_3\}$ 和 $\{a',c'\}=\{w,x\}$；若 $W_4'=W_4^{(5)}$，则 $\{b',d'\}=\{w,x\}$ 和 $\{a',c'\}=\{v_3,v_7\}$ (若 $k=2$，置 $v_7=v_1$). 定义

$$D_j^*=D_j,\quad 0\leqslant j\leqslant k-1-\delta,$$

$$D_\ell^*=(D_{\ell+1}-\{z_1',z_2'\})\cup\{a'z_0',c'z_0'\},\quad k-\delta\leqslant\ell\leqslant n-1,$$

这里若 $W_4'=W_4^{(2)}$，则 $\delta=0$；若 $W_4'=W_4^{(5)}$，则 $\delta=1$. 因为 D_j^* 源于 D_{j-1}^* 的从 D_j 产生 D_{j+1} 的同一扩充，$j=k-\delta,\cdots,n-1$，故得到 $D_0'=D_{n-1}^*$ 源于 O_6 的一系列 O_6- 和 (或)W_4- 扩充序列. 注意到对 $k=2$ 及 $\delta=1$，D_1^* 源于 D_0^* 的 W_4- 扩充，并且 D_1 源于 D_0 的 W_4- 扩充，但这些 W_4- 扩充的中心是不同的. 至此引理 6.78 证毕.

现用引理 6.78 来证明有关 A- 迹的一个结果，它推广了古迪的结果的一个特殊情形.

定理 6.79 设 D 为平面的 2- 面着色欧拉三角剖分，D 或者本身为八面体，或由八面体经一系列 O_6- 和 (或)W_4- 扩充得到. 令 $\Delta=\langle x,y,z\rangle$ 是任意选定的面边界，$x,y,z\in V(D)$. D 有一个不分离的 A- 迹，其完美 A- 划分 $\{V_1,V_2\}$ 满足 $x\in V_1$，$y,z\in V_2$.

证明 不失一般性，Δ 是 D 的外面 F_∞ 的边界，并且 F_∞ 是 1- 面 (注意完

美 A- 划分与 2- 面着色无关). 若 D 是八面体，则它有不分离的 A- 迹 T，如取图 6.20(b) 中的图，并且令 $V_1 = V'$，$V_2 = V''$，则有 $|V_1 \cap V(\Delta)| = 1$，$|V_2 \cap V(\Delta)| = 2$. 由八面体的对称性，我们不妨假设 $x \in V_1$，$y, z \in V_2$. 于是在八面体情形定理成立.

现设 D 满足定理的假设，但 D 不是八面体. 由 D 的构造及引理 6.78，分以下两种主要情形:

(1) D 满足引理 6.78 的论断 1). 用 D 取代 D_1 而保持图 6.31 的记号，令

$$D_0' = D - H_0,$$

其中 $\Delta_0 := \langle a, b, c\rangle$ 是面边界.

由 $\Delta_0 \cup H_0$ 中 Δ 的可能情形的对称性，不妨假设，若 $\Delta \subset \Delta_0 \cup H_0$，则或者 $x = a_1, y = b_1, z = c_1$，或者 $x = a_1, y = a, z = c_1$，或者 $x = c, y = a, z = c_1$，或者 $x = b_1, y = b, z = c$.

现对 D_0' 用归纳法. 不失一般性 (若 $\Delta \not\subset \Delta_0 \cup H_0$，则由对称性；若 $\Delta \subset \Delta_0 \cup H_0$，则由于选择的自由性)，得到 $a \in V_j^{(0)}$ 且 $b, c \in V_k^0$，$\{j, k\} = \{1, 2\}$，因为 $V(D_0')$ 的完美 A- 划分 $\{V_1^0, V_2^0\}$ 对应于 D_0' 的某个不分离 A- 迹. 令

$$V_j = V_j^0 \cup \{b_1, c_1\}, \quad V_k = V_k^0 \cup \{a_1\}, \quad \{j, k\} = \{1, 2\},$$

因而若 $\Delta \not\subset \Delta_0 \cup H_0$，或者 $j = 2, k = 1$ 且 $\{x, y, z\} \neq \{b_1, b, c\}$，则 $\{V_j, V_k\}$ 是所需的完美 A- 划分. 另一方面，若 $\Delta \subset \Delta_0 \cup H_0$ 且 $j = 1, k = 2$，如果 $\{x, y, z\} = \{b_1, b, c\}$，则 $\{V_1, V_2\}$ 是所需的完美 A- 划分. 其他情形利用 $\langle V_\delta^0\rangle$ 和 V_δ $(\delta = 1, 2)$ 是 D 中的树这个事实，因此，对 $V_1^* := V_2$ 和 $V_2^* := V_1$，$\{V_1^*, V_2^*\}$ 是所需要的完美 A- 划分. 最后，在情形 $j = 2, k = 1$ 且 $\{x, y, z\} = \{b_1, b, c\}$ 中，如前定义 V_1^*, V_2^* 就得到所需的完美 A- 划分 $\{V_1^*, V_2^*\}$. 这便证明了情形 (1).

(2) D 满足引理 6.78 的叙述 2). 那么 D 含图 6.33(b) 中的 4- 轮 W_4 且 $\Delta \not\subset W_4$. 用 D 代替 D_1，D_0' 代替 D_0 而保持这个图中的记号. 我们定义 D 到 D_0' 的约化，并对 D_0' 用归纳法得到如上的 $\{V_1^0, V_2^0\}$. 根据 a, z_0, c 在 V_1^0 和 V_2^0 中的分布考虑两种情形.

若对 $\{j, k\} = \{1, 2\}$，或者 $\{a, z_0, c\} \subset V_j^0$，或者 $\{a, z_0\} \subset V_j^0$ 且 $c \in V_k^0$ (由对称性，$\{c, z_0\} \subset V_j^0$ 且 $a \in V_k^0$ 这种情况不必另外考虑)，则必然有 $\{b, d\} \subset V_k^0$. 在这两种情况中，为得到 D 的所需的完美 A- 划分 $\{V_j, V_k\} = \{V_1, V_2\}$，定义

$$V_j := V_j^0 \cup \{z_1, z_2\}, \quad V_k := V_k^0, \quad \{j, k\} = \{1, 2\}.$$

因此，必须考虑情形 $\{a, c\} \subset V_j^0$，$z_0 \in V_k^0$. 由于 $\{V_j^0, V_k^0\}$ 是一个 A- 划分，故 $\{b, d\} \not\subset V_j^0$. 由对称性，不妨假设 $b \in V_j^0$，$d \in V_k^0$. 为得到定理所需的 D 的完美 A- 划分 $\{V_j, V_k\} = \{V_1, V_2\}$，在该情形下，定义

$$V_j := V_j^0 \cup \{z_0\}, \quad V_k := (V_k^0 - \{z_0\}) \cup \{z_1, z_2\}, \quad \{j, k\} = \{1, 2\}.$$

注意到这些讨论包含了所有的情形，不管 $\Delta \cap W_4 = \varnothing$ 或 $\Delta \cap W_4 \neq \varnothing$ (因为由引理 6.78，总有 $\Delta \not\subset W_4$). 定理证毕.

转换成 3- 正则图的理论，由对偶性，定理 6.79 实际上等价于下面有关哈密顿圈的结果 (也参考定理 6.77 后面的讨论).

推论 6.80 设 G_3 是 (3- 连通) 可平面 3- 正则 2- 部图，它能由立方体经下面的一系列运算得到：

1) 用三个相互邻接的四边形取代一点；

2) 用三个四边形 (其中两个不相邻) 取代一个四边形 Q，

则给定 $e \in E(G_3)$，G_3 中存在不含 e 的哈密顿圈.

下面的推论的证明可以直接从定理 6.79 的证明部分得到，故将它留作练习.

推论 6.81 设 D_0 和 D_1 是平面欧拉三角剖分，使得 D_1 源于 D_0 的一系列 O_6- 和 (或)W_4 扩充，则 D_0 有不分离的 A-迹当且仅 D_1 有不分离的 A- 迹.

我们略去把推论 6.81 转换成 3- 正则图理论，利用从定理 6.79 得到推论 6.80 的同样方法能够做到.

为了从一个给定的平面欧拉三角剖分 D_0 得到一个新的平面欧拉三角剖分 D_1，有一个类似于 W_4- 扩充的程序，即设点 $a, b, c, d \in V(D_0)$ 如图 6.33 中给定，并且假设 $ac \in E(D_0)$. 用两个新点 z_1, z_2 细分 ac，z_1, z_2 均连边到 b, d. 这样得到的图 D_1 就是一个平面欧拉三角剖分，称从 D_0 得到 D_1 的这个构造为**弱 W_4- 扩充** (下面的图 6.34). 转换成平面 3- 正则图理论，弱 W_4- 扩充对应于用两个相邻的四边形 Q_1, Q_2 代替 $E(G_3)$ 中的边 e，使得对 G_3 的每个面 F，$|E(\mathrm{bd}(F))|$ 的奇偶性不变. 也就是说，若 G_3 是 2- 部图，则新图也是 2- 部图.

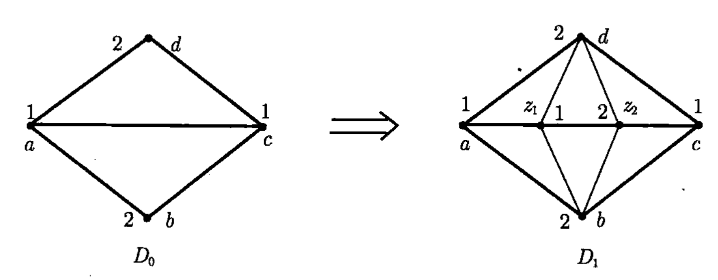


图 6.34 从 D_0 经一个弱 W_4- 扩充得到 D_1. 若 D_1 有完美 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ (由顶点标号 1,2 给出)，则对 $V(D_0)$ 的相应划分 $\{V_1^0, V_2^0\}$，图 $\langle V_1^0 \rangle$ 有含 ac 的圈，而 $\langle V_2^0 \rangle$ 不连通

然而，若重新叙述引理 6.78 使其涵盖从 O_6 经一系列 O_6- 和 (或) 弱 W_4- 扩充得到的图，则得到的叙述不成立，即从 O_6 开始，能用一系列弱 W_4- 扩充得到平面欧拉三角剖分 D，使得对每个 $v \in V_4(D)$，$N(v) \cap V_4(D) = \varnothing$，除了 $V_4(D)$ 的一对相邻点 (我们将构造这样的例子留作练习). 然而，事实上并不奇怪，只要注意到推论 6.81 中，D_0 的 A- 迹与 D_1 的 A- 迹的关系是双射 (也见定理 6.79 的证明). 若

在推论 6.81 中用“弱 W_4- 扩充”代替“W_4- 扩充”，这个性质将不再成立. 因为当 D_0 的不分离的 A- 迹可以扩充为 D_1 的不分离 A 迹 (从 D_0 经一系列 O_6- 和 (或) 弱 W_4- 扩充得到)，对 D_1 的某个不分离的 A- 迹，逆命题可能不成立.

图 6.34 解释了这个原因.

注意到从 O_6 开始经 O_6-，W_4- 和弱 W_4- 扩充仅得到平面的某种欧拉三角剖分. 因为一般地，平面欧拉三角剖分不必含有相邻的 4- 价点. 事实上，若 G_3 是平面 3- 连通 3- 正则图且围长为 5，则能找到一个边独立集 E_0，使得从 G_3 用四边形 Q_e 取代 E_0 的每个元素 e 得到的图 C_3^* 是平面图，并且还是 2- 部图 (图 6.35). 这样的 E_0 称为 (边) **调整集**，并且 G_3 的每个 1- 因子 L 是调整集，因为 G_3^* 中它给出一个由偶边界圈构成的 2- 因子 Q^*，即 $Q^* = \{Q_e \mid e \in L \subset E(G_3)\}$ (由定理 3.66 和定理 3.67，平面 3- 正则图是 2- 部图当且仅当它有一个由偶边界圈构成的 2- 因子). 另一方面，G_3 的调整集不必是 1- 因子 $L \subset E(G_3)$ 的子集①. 在任何情形下，转换成欧拉图的语言，(借助于调整集 E_0) 从 G_3 到 G_3^* 的转换就是将 $D_0 := D(G_3)$ 转变成平面的欧拉三角剖分. 这个转换由细分对应于 $e \in E_0 \subset E(G_3)$ 的每个 $e^* = ac \in E(D_0)$ 得到细分点 z_0 连到 b 和 d，其中 a, c, b 和 a, c, d 是含 e^* 的边界三角形的顶点 (图 6.34). 此外，由于 E_0 为边独立集，故没有对应于 $e, f \in E_0$ 的边对 $e^*, f^* \in E(D_0)$ 属于 D_0 的面边界，即 D_0 的上面的转换能同时对所有相应的 e^* 实施，这也是为什么在上面构造没有 A- 迹的平面 3- 连通欧拉图时，使得 D 的每个面至多含图 6.32 的图 H_i 的一个拷贝. 我们指出调整集的概念已在 [FLEI74c] 中引入和研究. 现将定理 6.77 的古迪证明转换成 A- 迹理论. 然而，注意到我们的证明推广了古迪证明的两个特殊情形，它们在 [GOOD75a] 中被处理为“容易看出”. 这个推广已表述在定理 6.79 中.

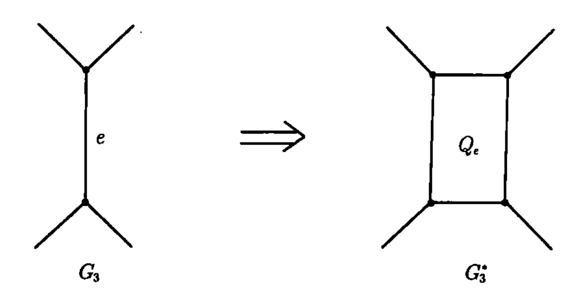


图 6.35　用四边形 Q_e 代替某边独立集 E_0 的边 e，将平面 3- 正则图 G_3 转变成平面 3- 正则 2- 部图 G_3^*

定理 6.77a 的证明　首先注意 D 的一个一般性的结构性质，它能直接从 D

① 注意到即使 $\kappa(G_3) = 2$，G_3^* 也可以是 3- 连通的. 然而这种情形当且仅当 G_3 中所有的 2- 割集 E_S 都属于 G_3 的某个调整集 E_0 中 (注意 $|E_S| = 2$ 蕴涵 $|E_0 \cap E_S| \neq 1$. 证明这个事实的方法之一是用引理 6.76 的对偶).

是平面的简单三角剖分这个事实得到.

a) 若 P_4 是满足 $\ell(P_4)=3$，$V(P_4)\subset V_4(D)$ 的路，则 P_4 是导出路且 $V(P_4)\subset N(v_8)$，其中 $d(v_8)=8$；否则，D 是 6- 侧双棱锥或 $D\simeq O_6$.

注意到由定理 6.79 可知，定理 6.77a 对 $O_6\in\mathcal{T}_0$ 成立，我们能用归纳法，并根据所选 $D\in\mathcal{T}_0$ 的 4- 价点的分布分成以下几个情形：

情形 1 *D 源于平面欧拉三角剖分 D_0 的一个 O_6- 扩充.* 那么 D_0 含一个边界三角形 $\Delta=\langle a,b,c\rangle$，这个 O_6- 扩充在此实施. 首先假设 $\Delta(D)<8$，那么 $d_D(a)=d_D(b)=d_D(c)=6$，由此，在 $D_0=D-H_0$ 中 (对 H_0，图 6.31) 有 $d_{D_0}(a)=d_{D_0}(b)=d_{D_0}(c)=4$，即 D_0 源于某个平面的欧拉三角剖分 D' 的一个 O_6- 扩充 …… 因此，在此情形下，D 源于 O_6 的一系列 O_6- 扩充. 在此情形下得到，定理 6.79 推出定理 6.77a. 另一方面，若 $\Delta(D)=8$，则由归纳及推论 6.81，D 中存在不分离的 A- 迹. 定理 6.79 的证明表明 $V(D_0)$ 的一个完美 A- 划分 $\{V_1^0,V_2^0\}$ 可以扩充成 $V(D)$ 的这样的划分 $\{V_1,V_2\}$. 特别地，若 v_8 $(d_D(v_8)=8)$ 位于 Δ 上，不失一般性，$v_8=v_{\max}=a$ 且 $w=a_1$ (见定理 6.77a 的叙述)，因而由归纳并因为有 $d_{D_0}(a)=6=\Delta(D_0)$，$d_{D_0}(b)=4$，$a_1\notin V(D_0)$ 成立，我们得到 $a\in V_1^0$，$b\in V_2^0$. 因此，可以定义 V_1,V_2，使得 $a_1\in V_2$，$b_1\in V_1$，并且 $c_1\in V_k$ 当且仅当 $c\in V_j$，其中 $\{j,k\}=\{1,2\}$. 于是在任何情形下，$\{V_1,V_2\}$ 即为所需.

情形 2 *D 源于平面欧拉三角剖分 D_0 的 W_4- 扩充.* 由归纳及推论 6.81，D 有不分离的 A- 迹，因为 D_0 有一个，并且由定理 6.79 的证明知，当 $v_{\max}w\in E(D_0-\{z_0\})$ 时如何将 $V(D_0)$ 的完美 A- 划分 $\{V_1^0,V_2^0\}$ 扩充为 $V(D)$ 的这样的划分 $\{V_1,V_2\}$. 然而，若 $\{v_{\max},w\}\cap V(W_4)\neq\varnothing$，则可如下进行：若 $\Delta(D)<8$，则类似于情形 1 得到 D 源于 O_6 的一系列 W_4- 扩充. 由此，在这种情形下，从定理 6.79 即得定理 6.77a. 但若 $\Delta(D)=8$，则根据 $v_{\max}=v_8$ 和 w 在 $W_4\cup\{a,c\}$ 的位置采取不同的约化 (利用图 6.33 的记号). 因为 $d(v_8)=8$，故 $v_8\neq z_i$ $(i=0,1,2)$. 因此，由对称性，不妨设 $v_8\in\{a,d\}$. 因为我们必然有 $v_8\in\{a,b,c,d\}$，由性质 a)，当 $\min\{d(a),d(c)\}=4$ 时，由于 $D\supset P_4\supset\{z_0,z_1,z_2\}$，故 $v_8=d$. 于是不妨设，若 $\min\{d(a),d(c)\}=4$，则 $d(a)=4$.

(i) $d(a)=4$. 那么 $v_{\max}=v_8=d$ 且必有图 6.36 所述的情形，其中

$$\{a^-\}=N(b)-\{a,z_0,z_1,z_2,c\}$$

(注意必然有 $d(b)=6$)，于是

$$ca^-\in E(D),\quad N(a^-)\cap N(c)=\{d,b,b^-\},$$
$$N(d)\cap N(a^-)=\{a,c,d_1\},\quad N(d)\cap N(c)=\{z_2,a^-,d_2\}.$$

注意到有 $d(a^-)=d(c)=6$，故或者 D 为图 6.36 中所画的图，或者，$\Delta=\langle d_1,d_2,b^-\rangle$ 是 D 的分离三角形. 对所选的邻接到 $v_{\max}$ 的 4- 价点 w 有 $w\in$

$\{a, z_0, z_1, z_2\}$. 在两种情形下，均将含 z_0 的 Δ 的面约化为八面体，于是得到一个更小的图 D_1，它满足 $\Delta(D_1) = 6$ (图 6.36). 因此，或者 $D_1 \simeq O_6$，或者 D_1 源于 O_6 的一系列 O_6- 扩充 (见情形 1). 在任何情形下，由定理 6.79 可以假定对 $V(D_1 - V(\text{int}\,\Delta))$ 的相应的完美 A- 划分 $\{V_1^1, V_2^1\}$，$b^- \in V_1^1$，$d_1, d_2 \in V_2^1$ 成立. 于是由这个定理并定义

$$V_1 := V_1^1 \cup \{b, c, d\}, \quad V_2 := V_2^1 \cup \{a^-, a, z_0, z_1, z_2\},$$

可将 $\{V_1^1, V_1^2\}$ 扩充为 $V(D)$ 的所要求的完美 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$. 注意到当 $w \in V_2$ 时，$d = v_{\max} \in V_1$. 这就解决了情形 (i).

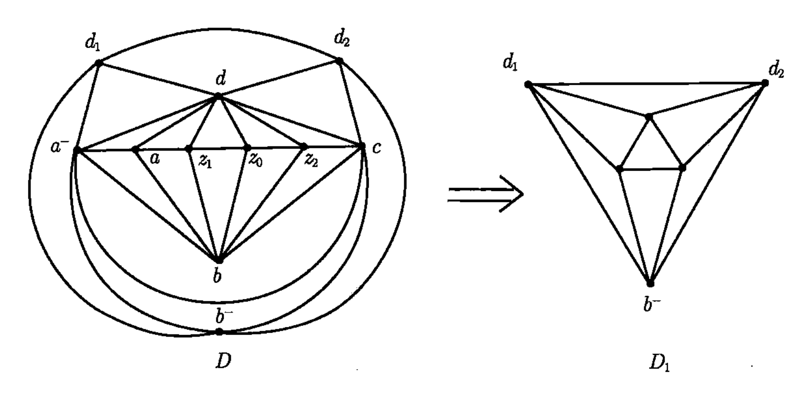


图 6.36　当 $d(a) = 4$，$v_8 = d$ 时，把 D 约简到 D_1

(ii) $d(a) > 4$. 将 D 约化为 D_0，使得 D 源于图 D_0 的 W_4- 扩充. 首先考虑情形 $v_{\max} = v_8 = a$ (于是 $w = z_1$) 或 $v_{\max} = v_8 = d$ 且 $w = z_1$，在这两种情形下，在 D_0 中选 $z_0 = w$. 在第一种情形下，$a = v_{\max}$ 必然成立 (这里有 $d_D(a_0) = 8$)，在第二情形下，可任意选取 (这里有 $\Delta(D_0) = 6$)，于是设 $d = v_{\max}$.

由归纳，$V(D_0)$ 有完美 A- 划分 $\{V_1^0, V_2^0\}$，使得 $v_{\max} \in V_1^0$，$z_0 \in V_2^0$. 在上面两种情形下，定义

$$V_1 := V_1^0, \quad V_2 := V_2^0 \cup \{z_1, z_2\}, \quad b, d \in V_1^0,$$
$$V_1 := V_1^0 \cup \{z_0\}, \quad V_2 := (V_2^0 - \{z_0\}) \cup \{z_1, z_2\}, \quad b \in V_2^0, \quad d \in V_1^0,$$

并且若 $b, d \in V_2^0$ (因此，$v_{\max} = a$)，则定义

$$V_1 := V_1^0 \cup \{z_0, z_2\}, \quad V_2 := \{V_2^0 - \{z_0\}\} \cup \{z_1\}.$$

由于情形 $v_{\max} = a$ 且 $b \in V_1^0$，$d \in V_2^0$ 与情形 $b \in V_2^0$，$d \in V_1^0$ 对称，故不需要另外考虑.

为结束 (ii) 的证明，仅需考虑情形 $v_{\max} = v_8 = d$ 且 $w = z_0$. 令 b^- 是满足 $b^- \in N(b) - \{a, c, z_0, z_1, z_2\}$ 的唯一确定的点. 我们有 $d_{D_0}(b) = 4$ 且 $d_{D_0}(b^-) \in$

$\{4,6\}$. 注意到 $\Delta(D_0)=6$，或由归纳，或由定理 6.79 (根据 $d_{D_0}(b^-)=6$ 还是 $d_{D_0}(b^-)=4$) 得到完美 A- 划分 $\{V_1^0,V_2^0\}$，使得 $b^-\in V_1^0$，$b\in V_2^0$. 注意到由于 4 个点集 $\{a,b,c,d\}$，$\{a,b^-,c,d\}$，$\{a,b,c,z_0\}$ 和 $\{a,b^-,c,z_0\}$ 每个均定义了一个四边形，故对 $i\in\{1,2\}$ 都不能有 $\{a,b,d\}\subset V_i^0$ 或 $\{a,z_0,c\}\subset V_i^0$. 于是若 $\{a,c\}\subset V_i^0$，则 $\{z_0,d\}\subset V_j^0$，其中 $\{i,j\}=\{1,2\}$. 另一方面，若 $a\in V_i^0$，$c\in V_j^0$ $(i\neq j)$，则由对称性，可设 $a\in V_1^0$，$c\in V_2^0$，这就推出 $z_0\in V_1^0$，$d\in V_2^0$. 在这种情形下，由定理 6.79 的证明可以知道如何将 $\{V_1^0,V_2^0\}$ 扩充为 $V(D)$ 的完美 A- 划分，并且通过定义 $V_1:=V_2^*$，$V_2:=V_1^*$ 得到 $V(D)$ 的适当的 A- 划分 $\{V_1,V_2\}$. 因此，剩下情况 $\{a,c\}\subset V_i^0$. 不失一般性，$i=2$ (否则，交换 V_1^0 和 V_2^0，这样 $b\in V_1^0$). 于是 $d,z_0\in V_1^0$. 若 $b\in V_1^0$，则 $V_1:=(V_1^0-\{z_0\})\cup\{z_1\}$，$V_2:=V_2^0\cup\{z_0,z_2\}$ 导出定理所需要的 A- 划分. 对情况 $b\in V_2^0$，定义 $V_1:=(V_1^0-\{z_0\})\cup\{z_1,z_2\}$，$V_2:=V_2^0\cup\{z_0\}$ 就可得到所需要的结果. 这就结束了对 (ii) 的讨论，从而情形 2 得证①.

情形 3 $|N(w)\cap V_4(D)|=1$. 因此，D 源于平面的欧拉三角剖分 D_0 的一个弱 W_4- 扩充. 利用图 6.34 的记号，又由于情形 1 和情形 2 已解决，故对 $x\in\{a,b,c,d\}$，$d(x)\geqslant 6$，由对称性，不失一般性，假设若 $d(x)=8$，则 $x\in\{a,b\}$，因而 $v_{\max}\in\{a,b\}$，由对称性，在任何情形下，假设 $w=z_1$.

等同 $D-\{z_1,z_2,ab,bc\}$ 的点 b,d，称这个新点为 z，这样就定义了平面的欧拉三角剖分 D_1，在任何情形下，$d_{D_1}(c)=4$，而根据 D 中 8- 价点的存在及位置 $d_{D_1}(z)\in\{6,8\}$，$d_{D_1}(a)\in\{4,6\}$. 于是在 D_1 中，记 $v_{\max}=z$ (或由于必然性或可以任意选择) 且选 $w=c$.

首先假设 D_1 是简单的，借助于归纳得到 D_1 的一个完美 A- 划分 $\{V_1^1,V_2^1\}$ 满足 $z\in V_1^1$，$c\in V_2^1$. 于是有 $V(D)-\{z_1,z_2\}$ 的一个划分 $V_1':=(V_1^1-\{z\})\cup\{b,d\}$，$V_2':=V_2^1$，使得 $\langle V_1'\rangle$ 为至多两个分支的森林，而 $\langle V_2'\rangle$ 是树. 下面定义

$$V_1:=V_1'\cup\{z_2\},\quad V_2:=V_2'\cup\{z_1\},\quad b=v_{\max},a\in V_2',$$
$$V_1:=V_1',\quad V_2:=V_2'\cup\{z_1,z_2\},\quad a\in V_1',$$
$$V_1:=V_2'\cup\{z_2\},\quad V_2:=V_1'\cup\{z_1\},\quad a=v_{\max}\text{ 且 }a\in V_2'.$$

在所有的情形中，$\{V_1,V_2\}$ 是 $V(D)$ 的定理所需的 A- 划分.

为结束情形 3，只需证明 D_1 必为简单图. 这等价于证明 $bd\notin E(D)$ 及 $N(b)\cap N(d)=\{a,z_1,z_2,c\}$.

首先假设 $bd\in E(D)$. 那么三角形 $\Delta^*=\langle b,z_1,d\rangle$ 的每一面定义了一个平面的

① 在古迪的证明中，最后一种情形 $v_{\max}=v_8=d$，$w=z_0$(转换成它的对偶形式) 需要不同类型的约化，因为他手中没有定理 6.79 的对偶等价. 注意在此情形下可能有 $d_{D_0}(b)=d_{D_0}(b^-)=4$，它不会归纳地得到 $b^-\in V_1^0$，$b\in V_2^0$. 另一方面，还必须避免情形 $a,c,d\in V_1^0$，$z_0,b\in V_2^0$. 因为这必然会导出 $d,z_0\in V_1$，$z_1,z_2\in V_2$. 当然，在这种情形下，为得到所需结果，仍然可以应用定理 6.79，使得 $d\in V_1^0$，$a,z_0\in V_2^0$. 但由于 $d_{D_0}(d)=d_{D_0}(a)=6$，故不能应用定理 6.77a 归纳地得到 $d\in V_1^0$，$a\in V_2^0$.

三角剖分 D^*，并且 Δ^* 为它的一个面边界. 然而 $d_{D^*}(z_1) \equiv 1 \pmod 2$，并且由于 $D^* - V(\Delta^*)$ 的所有点是 D^* 的偶点，故 b 和 d 中恰有一个是 D^* 的奇点. 于是 D^* 是恰有两个奇点的平面的三角剖分且这两个奇点是相邻的. 这与引理 6.76 相矛盾，于是 $bd \notin E(D)$.

假设存在 $x \in N(b) \cap N(d) - \{a, z_1, z_2, c\}$. 因为 d 是 6- 价的，故或者 $\Delta = \langle c, d, x\rangle$，或者 $\Delta = \langle a, d, x\rangle$ 是 D 的面边界. 考虑 $\Delta_1 = \langle t, b, x\rangle$，$E(\Delta) \cap E(\Delta_1) = \{tx\}$，这里根据出现的情形 $t \in \{a, c\}$，并记 D^* 为平面的三角剖分，Δ_1 是它的一个边界三角形且 D^* 不含 z_1, z_2. 由于 $\min\{d_D(a), d_D(c)\} > 4$，故 $D^* \not\simeq K_3$. 又在任何情形有 $d_{D^*}(t) \equiv 0 \pmod 2$，故由引理 6.76 得到 $d_{D^*}(b) \equiv d_{D^*}(x) \equiv 0 \pmod 2$. 用 y 记满足 $\{t, y\} = \{a, c\}$ 的点，从 $d, y, z_1, z_2 \notin V(D^*)$ 及上面的全等得 $\{d_{D^*}(b), d_{D^*}(x), d_{D_*}(t)\} \subseteq \{2, 4\}$. 因为 $d_{D^*}(x) = 2$ 蕴涵 b 和 t 分离 D^*，因而也分离 D，故必有 $d_{D^*}(x) = 4$. 因为 $d \notin V(D^*)$，故 $d_D(x) = 6$. 同理有 $d_{D^*}(b) = d_{D^*}(t) = 4$ 成立. 此外，由于 $v_{\max} \in \{a, b\}$ 且 $y, z_1, z_2 \notin V(D^*)$，故 $v_{\max} = b$ 且 $d_D(b) = 8$. 又 $d_D(a) > 4$，于是 $d_D(a) = 6$. 因此，不失一般性，设 $t = c$，令 $\{b_1\} = N(b) - (\{a, z_1, z_2\} \cup N_{D^*}(b))$，$\{d_1\} = N(D) - \{a, z_1, z_2, c, x\}$，由前面有关 b 和 x 的次的讨论，并由 d 是 6- 价的，这些等式是有定义的. 此外，$xd_1, xb_1 \in E(D) - E(D^*)$ 且 $xd \in E(D)$ 蕴涵 $d_1 = b_1$，即 $\Delta_2 = \langle a, b, d_1\rangle$ 是三角形，又由于 $N(b) - \{a, d_1\}$ 位于 Δ_2 的同一面上，故 Δ_2 必为一个面边界. 因此，$d_D(a) = 4$，否则，a 和 d_1 分离 D. 然而 $d_D(a) > 4$，这个矛盾完成情形 3 的证明①.

情形 4 $N(w) \cap V_4(D) = \varnothing$. 利用图 6.33(a) 的记号并用 D 代替 D_0，则有 $w = z_0$. 不妨设 $v_{\max} = a$，于是 $d_D(a) \in \{6, 8\}$ 且对 $x \in \{b, c, d\}$ 有 $d_D(x) = 6$. 在 $D - \{z_0, ab, bc\}$ 中等同 b 和 d 来定义 D_1，并如情形 3，称这个新点为 z. D_1 是平面的欧拉三角剖分且 $d_{D_1}(a) \in \{4, 6\}$，$d_{D_1}(c) = 4$，$d_{D_1}(z) = 8$.

首先假设 D_1 是简单的，对 D_1 用归纳得到 $V(D_1)$ 的一个适当的划分 $\{V_1^1, V_2^1\}$ 满足 $z \in V_1^1$，$c \in V_2^1$. 类似于情形 3，这给出了 $V(D) - \{Z_0\}$ 的一个划分 $\{V_1', V_2'\}$ 满足 $b, d \in V_1'$，$c \in V_2'$. 因此，定义

$$V_1 := V_1', \quad V_2 := V_2' \cup \{z_0\}, \quad a \in V_1',$$
$$V_1 := V_2', \quad V_2 := V_2' \cup \{z_0\}, \quad a \in V_2',$$

则 $\{V_1, V_2\}$ 为 $V(D)$ 的所需的 A- 划分.

---

① 分开考虑 $D^{**} := (D - D^*) \cup \Delta_1$ 和 D^*，并对 D^{**} 用归纳，对 D^* 用定理 6.79 (注意到 $\Delta(D^*) \leqslant 6$ 且对 $s \in V(\Delta_1)$，$d_{D^*}(s) = 4$)，可能有不同的方式完成情形 3. 但对这个例子，我更喜欢这里给出的方法，因为它不依赖于定理 6.79. 不幸的是，古迪在他的证明中略去了相应的部分 (不可否认，其证明是相当粗略的)，并且对下面的情形 4 的对偶限制了连通度，那里他用了引理 6.76 的对偶式. 此外，甚至他的限制条件下的考虑也是不完全的且有缺陷 (见该证明最后的脚注).

于是为了完成情形 4 的证明，从而完成定理 6.77.a 的证明，只要证明 D_1 是简单的. 类似于情形 3 的相应考虑，假设存在 $x \in N(b) \cap N(d) - \{a, z_0, c\}$ (像前面一样用 z_0 取代 z_1 证明 $bd \notin E(D)$).

首先证明对至少一个 $t \in \{a, c\}$，$xt \notin E(D)$. 反设 $xa, xc \in E(D)$，那么三角形 $\Delta_1 = \langle x, d, a\rangle$ 和 $\Delta_2 = \langle x, b, a\rangle$ 中至少有一个不是 D 的面边界，并且关于三角形 $\Delta_3 = \langle x, d, c\rangle$ 和 $\Delta_4 = \langle x, b, c\rangle$ 有同样的结论成立；否则，分别有 $d_D(a) = 4$，$d_D(c) = 4$ 成立. 由于 $b, d \in V_6(D)$，故不妨设 Δ_3 不是 D 的面边界. 但如同情形 3 中的考虑，得到平面三角剖分 $D^* \not\simeq K_3$，Δ_3 是 D^* 的面边界且 $z_0 \notin V(D^*)$. 由引理 6.76，$\kappa(D) \geqslant 3$ 及 $b, c \in V_6(D)$，$d_D(x) \in \{4, 6\}$ 得 $d_{D^*}(d) = d_{D^*}(c) = d_{D^*}(x) = 4$，于是 $d_D)(x) = 6$. 因此，Δ_2 为 D 的面边界，由此，Δ_1 分离 D. 特别地，因为 $d_D(x) = 6 = d_{D^*}(x) + |\{xb, xa\}|$，所以 Δ_1 的不含 z_0 的面含 E_a 的 2 个或 4 个元素，含 E_d 的 2 个元素，但不含 E_x 的元素，即 a, d 分离 D，矛盾.

假设 $xa, xc \notin E(D)$，那么四边形 $Q_1 := \langle a, b, x, d\rangle$ 的不含 z_0 的面恰含一个 $e_b \in E_b$，恰含一个 $e_d \in E_d$，并且对四边形 $Q_2 := \langle c, b, x, d\rangle$ 有相同的结论成立. 这由 $b, d \in V_6(D)$ 即得. 记 $e_b = bu_b$，$e_d = du_d$，从 E_b, E_d 的元素关于 Q_1 的面的分布得 $xu_b, xu_d \in E(D)$. 为弄清 $u_b = u_d$，考虑四边形 $Q^- = \langle b, x, d, z_0\rangle$ 的由 Q^- 的不含 a 的面定义的三角剖分 D^-. 由上面的考虑有 $d_{D^-}(b) = d_{D^-}(d) = 4$，$d_{D^-}(z_0) = 3$，因此，$d_{D^-}(x) \equiv 1 \pmod 2$. 用上面定义 u_b, u_d 同样的方式定义关于 Q_2 的 v_b, v_d，注意到

$$O^+(b) = (bx, bv_b, bc, bz_0, ba, bu_b), \quad O^+(d) = (dx, du_d, da, dz_0, dc, dv_d),$$

并且由此，$\langle b, c, v_b\rangle$ 和 $\langle d, c, v_d\rangle$ 为面边界. 由于 $d_D(c) = 6$ 且 $\kappa(D) \geqslant 3$，故 $v_b \neq v_d$. 因此，对 $s \in V(D^-)$ 有 $O^+(c) = (cv_d, cd, cz_0, cb, cv_b, cs)$. 这与 $d_D(x) \leqslant 6$ 和 $d_{D^-}(x) \equiv 1 \pmod 2$ 一起就蕴涵了 $d_{D^-}(x) = 5$. 由于位于一边的 u_b 和 u_d 与位于另一边的 v_b, v_d 在 Q^- 的不同面上，所以必然有 $u_b = u_d$. 但另一方面，必然有

$$O^+(a) = (au_b, ab, az_0, ad), \quad \text{即 } d_D(a) = 4,$$

与 $d_D(a) \in \{6, 8\}$ 矛盾 (注意到 $\langle a, d, u_d\rangle$ 和 $\langle a, b, u_b\rangle$ 为 D 的面边界). 于是

$$xa \in E(D) \text{ 当且仅当 } xc \notin E(D). \tag{$*$}$$

那么从引理 6.76 及 $d_D(c) = 6$ 知，若 $xc \in E(D)$，则 Δ_3 和 Δ_4 中恰有一个不是面边界且 $Q_1 = \langle a, b, x, d\rangle$ 的不含 z_0 的面与 E_b 或 E_d 没有公共点 (注意到 $b, d \in V_6(D)$). 于是 $xa \in E(D)$，与 $(*)$ 矛盾，因而必然有 $xa \in E(D)$，$xc \notin E(D)$. 若 $d_D(a) = 6$，则由对称性讨论可得相同的矛盾，即 $d_D(a) = 8$. 在所有情形下，$d_D(a) \in \{6, 8\}$ 且 $xa \in E(D)$ 蕴涵 $\Delta_1 = \langle x, d, a\rangle$ 和 $\Delta_2 = \langle x, b, a\rangle$ 中至少一个不是面边界，事实上，$d_D(x) \leqslant 6$ 和引理 6.76 蕴涵了 Δ_1 为面边界当且仅当 Δ_2 不是面边界. 对上面

$xc \subset E(D)$ 的情况用对称性的讨论就得到矛盾：$xa, xc \in E(D)$. 因此得到结论 x 不存在，即 $\kappa(D_1) \geqslant 3$. 定理 6.77a 证毕①.

然而，作为自我批评，应该指出定理 6.77a (因而古迪的结果) 在 [FLEI83b，定理 4.4] 中的叙述是不正确的，因为假设中要求 8- 价点相邻于一个 4- 价点的那部分被遗漏了，并且定理的结论被叙述成弱的形式，即 D 仅仅有一个 A- 迹.

很遗憾，我不能将定理 6.77a 推广以得到如定理 6.79 的相同的结论. 另一方面，若假设猜想 6.72~ 猜想 6.74 中的任何一个成立，则有这种推广. 为此，叙述另一个有关 A- 迹 (A- 划分) 的猜想，然后证明它等价于猜想 6.73 (因而也等价于猜想 6.74).

猜想 6.82　设 D 为平面的简单 2- 面着色欧拉三角剖分，并且令 $\varDelta = \langle x, y, z\rangle$ 为 D 的面边界. 那么 D 有完美 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$，使得 $x \in V_1$，$y, z \in V_2$.

命题 6.83 ([REGN76a，Satz 3.2 和 Satz 3.3])　猜想 6.82 与猜想 6.73 等价.

证明　因为在平面欧拉三角剖分情形，不分离的 A- 迹与完美 A- 划分的概念是等价的②，所以猜想 6.82 推出猜想 6.73，因而仅需证明猜想 6.73 推出猜想 6.82.

选取 D, x, y, z 如猜想 6.82 所述，令 $\varDelta_1 = \langle x, y, w\rangle$，$w \neq z$，为 D 的面边界，满足 $E(\varDelta) \cap E(\varDelta_1) = \{xy\}$. 令 D' 和 D'' 为 D 的两个拷贝，并以 x', y', z' (x'', y'', z'') 记 D' (D'') 的对应于 x, y, z 的顶点，记 $H' := D' - \varDelta'$，$H'' := D'' - \varDelta''$，其中 $\varDelta'$ 和 $\varDelta''$ 为对应于 $\varDelta$ 的面边界. 按如下叙述方式将 H' 嵌入 $\operatorname{int} \varDelta$，将 H'' 嵌入 $\operatorname{int} \varDelta_1$：等同 y' 与 z，z'，和 y'' 与 x，x'，和 z'' 与 y，和 x'' 与 w 后所得到的图 D_1 是平面的欧拉三角剖分. 因此，$D' \simeq H' \cup \varDelta$ 且 $D'' \simeq H'' \cup \varDelta_1$. 假设 D_1 有一个完美 A- 划分 $\{V_1^1, V_2^1\}$，分别用 $\{V_1^0, V_2^0\}$，$\{V_1', V_2'\}$，$\{V_1'', V_2''\}$ 记由 $\{V_1^1, V_2^1\}$ 导出的 D, D', D'' 的点划分.

由 $x, y \in V_j'$ 有 $z \in V_k'$，其中 $\{j, k\} = \{1, 2\}$，但这样 $x'' \in V_k''$，$y'', z'' \in V_j''$ 等价于 D 有完美 A- 划分 $\{V_1^*, V_1^*\}$，使得 $x \in V_k^*$，$y, z \in V_j^*$，$\{j, k\} = \{1, 2\}$，因而当

① 古迪在他的连通度考虑中有以下错误：用我们的语言，他混淆了点对 $\{a, c\}$ 和 $\{b, d\}$ 断言 $x' \in N(a) \cap N(c) - \{b, z_0, d\} \neq \varnothing$ 是不可能的. 他的证明是不完全的，是不必要的复杂化，并利用了图不能恰有一个奇点 (用它的对偶形式) 这个事实. 为弄清 x' 确实可能存在，考虑 O_6，其四边形基以某种圈序记为 a, b, c, d，并且用 z_0 (x') 记这个双棱锥的“上”(“下”) 顶点. 对面边界 $\langle a, d, x'\rangle$ 用 O_6- 扩充，对以 bx' 为对角线的四边形 $\langle a, x', c, b\rangle$ 用弱 W_4- 扩充. 这样得到的图 D' 满足 $d_{D'}(a) = 8$，$d, c, x' \in V_6(D')$. 但 $d_{D'}(b) = 4$. 对由 a, b, c 定义的 4- 轮及对上述弱 W_4- 扩充产生的两个 4- 价点 W_4- 扩充，得到的 D' 就给出了古迪连通度考虑的一个反例. 此外，古迪没有考虑 $x \in N(b) \cap B(d) - \{a, z_0, c\}$ 的情形. 他的缺陷是：他仅考虑了情形 $d_D(a) = 6$，正式的论证是对的. 但他错误地断言 x' 不存在，因为正如我们的例子所示，若 $d_D(a) = 8$，则它能存在. 然而我们注意到古迪的结果已在 [PETO77a] 中重新证明.

② 仅对平面的三角剖分定义了不分离 A- 迹，但是毫无问题地可以将这个定义扩充到任意平面欧拉图. 在一般情况下，这两个概念的等价性没有给出. 因为完美 A- 划分定义了两个不分离 A- 迹，一般情况甚至在 4- 正则情况下，对应于不分离 A- 迹的 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 也不一定具有完美 A- 划分. 然而，若对 $\delta = 1, 2$，$\langle V_\delta\rangle$ 连通，则这个 $\{V_1, V_2\}$ 实际上是完美 A- 划分 (见推论 6.69).

$k=1$ 时，$V_s := V_s^*$ $(s=1,2)$；当 $k=2$ 时，$V_1 := V_2^*$，$V_2 := V_1^*$，就给出了 D 的一个完美 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 且 $x \in V_1$，$y, z \in V_2$.

考虑 $\{x, y\} \not\subset V_j^1$ $(j=1,2)$，不妨设 $x \in V_1^1$，$y \in V_2^1$. 因此，若 $z \in V_2^1$，则对 $V_1 := V_1^0$，$V_2 := V_2^0$，$\{V_1, V_2\}$ 为所需的 A- 划分. 另一方面，若 $z \in V_1^1$，则有 $x' \in V_2'$，$y', z' \in V_1'$. 这等价于说，D 有完美 A- 划分 $\{V_1^*, V_2^*\}$，使 $y, z \in V_1^*$，$x \in V_2^*$，于是由 $V_1 := V_2^*$，$V_2 := V_1^*$ 定义的 $\{V_1, V_2\}$ 即为所需. 命题得证.

我们把转换猜想 6.82 到 BTC(猜想 6.72) 的更强 (但等价) 形式留作练习.

因此，一方面，我们已部分地 (基本上微不足道地) 解决了猜想 6.73(或等价地分别部分解决了 BTC① 和猜想 6.74). 另一方面，可以得到那个猜想更强的形式，即猜想 6.82. 平面的欧拉三角剖分的 A- 迹与平面 2- 部 3- 正则图的哈密顿圈的等价性已成为考虑本小节的基础 (并导出了描述在 (6.A) 中更一般的等价性，见引理 6.76 之前的讨论)，该等价性可认为为研究一般平面欧拉图的 A- 迹提供了足够的动机. 但在历史上，A- 迹的研究起源于平面 2- 部 3- 正则图的另一个哈密顿问题.

科特奇格 (见 [KOTZ62a,64a]) 已研究并构造性地确定了那些有 1- 因子分解 $\{L_1, L_2, L_3\}$ 的 3- 正则图 G_3，使得对 $i \neq j$，$1 \leqslant i, j \leqslant 3$，$L_i \cup L_j$ 为 G_3 的哈密顿圈，他还证明了除了 2- 阶多重图，不存在有上述类型的 1- 因子分解的平面 2- 部 3- 正则图 [KOTZ62a，定理 3]. 这使我考虑到下面的问题：*设 G_3 是 2- 连通平面 2- 部 3- 正则图，并且令 $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3\}$ 为它的自然的 1- 因子分解*(见定理 3.67)，*那么 G_3 何时含哈密顿圈 H，使得对一个 $L \in \mathcal{L}$ 有 $L \subset E(H)$?* (F)

要回答这个问题，不妨设 $L = L_1$ 且令 $Q = L_2 \cup L_3$. 由 $\mathcal{L}$ 的定义，Q 为 G_3 的 2- 因子，其元素恰为 G_3 的基于 $\mathcal{L}$ 的定义的 3- 面着色中的 1- 面的边界. 收缩 Q 的每个 $\mathrm{bd}(F)$ 到 F 的一个点，在收缩过程中没有开边相交，构成 $G := G_3/Q$. 于是，对每个 $v_F \in V(G)$，其圈序 $O^+(v_F)$ 由关联到 $\mathrm{bd}(F)$ 的点的 $\mathcal{L}$ 的半边在 $\mathrm{bd}(F)$ 中的圈序确定，并且这里 v_F 是 G 的对应于 $\mathrm{bd}(F) \subset G_3$ 的点. 由构造，又由于 G_3 是 2- 部图，G 为连通平面欧拉图. 上面由 G_3 构造 G 导致了下面简单的结果，其证明由上面的讨论即得，证明留作练习.

引理 6.84 设 G_3 为 2- 连通平面的 2- 部 3- 正则图，并令 $\mathcal{L}$ 为它的自然的 1- 因子分解，选定 $L \in \mathcal{L}$，令 $Q := E(G_3) - \mathcal{L}$. 进一步，如上构造 $G = G_3/Q$，则下列叙述等价：

1) G_3 有含 $\mathcal{L}$ 的哈密顿圈；

2) G 有 A- 迹.

这样原问题 (F) 等价于问哪些连通平面欧拉图 G 有 A- 迹. 正如前面已看到的，甚至存在这样的 G，满足 $\kappa(G) = 3$ 且不含 A- 迹. 构造的例子 G 仅有三角形

① [HOLT85a]中已证明了对少于 66 个顶点的图，BTC 成立.

和四边形面边界，但对 $v \in V(G) - V_4(G)$，$d(v)$ 相当大. 相反地，图 6.26 的图 G_0 仅有 4- 价和 6- 价点，$\kappa(G_0) = 2$，但它甚至有 8- 边形面. 用 2- 边形代替那些由 $G_0 - V_6(G_0)$ 定义的 G_0 的 2- 连通子图以及连接它们到 6- 价点的边，可以降低面的大小 (图 6.37). 得到的欧拉多图 G' 是 6- 正则的且仅有 2- 边形、三角形和四边形面边界. 但基于 G_0 没有 A- 迹的同样的理由，它也没有 A- 迹. 然而，基于引理 6.84，我们可以重新将 G' 解释为 $G' = G_3'/Q_6$，其中 Q_6 是 G_3' 的 6- 边形边界的集，G_3' 的其他面边界是四边形、6- 边形和 8- 边形. 注意到 G_3' 恰有两个 8- 边形面边界，有 $D = D(G_3')$ 为具有 4- 价点、6- 价点及恰好两个 8- 价点的简单欧拉三角剖分，即 D"几乎" 属于 $\mathcal{T}_0$，换句话说，G_3'"几乎" 属于 $\mathcal{B}_0$ (分别见定理 6.77a，定理 6.77 之前 $\mathcal{T}_0$ 和 $\mathcal{B}_0$ 的定义). 尽管 G_3' 有 2- 因子 Q_6，其每个元素为一个 6- 边形，但 G_3' 没有含 1- 因子 $E(G_3') - Q_6$ 的哈密顿圈. 然而我们提出下面的问题: *对 $G_3 \in \mathcal{B}_0$，G_3 是否有含 L 的哈密顿圈 H，其中 L 为 G_3 的自然 1- 因子分解中的一个 1- 因子?* 也许有人会对其对偶在定理 6.79 讨论过的 3- 正则图问同样的问题. 借助于欧拉图的 A- 迹，我们提出下面的问题: *若 G 为 2- 连通平面欧拉图，满足对 $n > 6$，$V_n(G) = \varnothing$ 且对每个面 F，$|E(\mathrm{bd}(F))| < 5$，对至多一个面 F'，$|E(\mathrm{bd}(F'))| = 4$，那么 G 中有 A- 迹吗?* 图 6.37(a) 的图 G' 表明不允许有多于一个的 F' 存在. G' 还表明关于 2- 因子 Q 的限定不是很有开发潜力 (因为那里 $Q = Q_6$ 是 6- 边形集). 然而，若一个 (未必为可平面的) 连通 3- 正则图 G_3 有 2- 因子 Q_4，它的每个圈为四边形，则 G_3 有包含 $E(G_3) - Q_4$ 的哈密顿圈 H [KOTZ68c，定理 6]. 这应用推论 6.6 可得，因而留给读者证明.

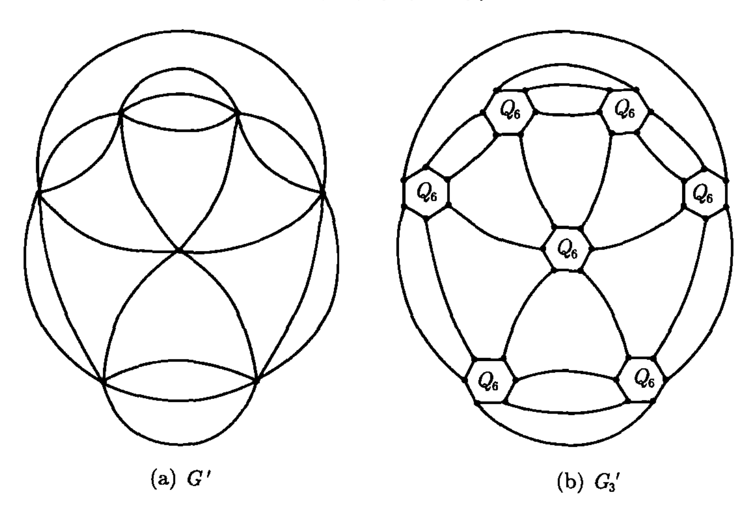


图 6.37　(a) 没有 A- 迹的 6- 正则多重图 G'，对 $n > 4$ 没有 n- 边形面边界，恰有两个四边形面边界; (b) 满足 $G' = G_3'/Q_6$ 的 3- 正则 2- 部图 G_3'' (Q_6 由标号 Q_6 的面的边界定义). G_3' 是哈密顿的，但 G' 没有满足 $E(G_3') - Q_6 \subset E(H)$ 的哈密顿圈

上面的问题 (F)，以及引理 6.84 中叙述的等价性也能用平面欧拉三角剖分的语言来处理.

定理 6.85 设 G_3 为 2- 连通平面 2- 部 3- 正则图，$\mathcal{L}$ 为它的自然 1- 因子分解，并且令 $D = D(G_3)$ 给定并有对应于 G_3 的 (自然)3- 面着色的 3- 点着色 $\{C_1, C_2, C_3\}$ (见定理 6.67). 下面的叙述等价:

1) G_3 有含 $L_1 \in \mathcal{L}$ 的哈密顿圈 H;

2) $V(D)$ 有完美 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 满足等式 $V_1 = C_1' \cup C_2$，$V_2 = C_1'' \cup C_3$，$C_1' \cup C_1'' = C_1$.

证明 考虑 H 为欧几里得平面的简单闭曲线. 对每个 $e \in L_1$，因为对 G_3 的自然 3- 面着色的某个 2- 面 F_2 和 3- 面 F_3，$e \in E(H) \cap E(\mathrm{bd}(F_2)) \cap E(\mathrm{bd}(F_3))$，故有 $F_2 \in \mathrm{int}\, H$ 当且仅当 $F_3 \in \mathrm{ext}\, H$.

对 $e_1, f_1 \in L_1$，假设满足 $e_1 \in E(\mathrm{bd}(F'))$，$f_1 \in E(\mathrm{bd}(F''))$ 的对应的 i- 面 F', F'' 位于 H 的不同面上，$i \in \{2, 3\}$. 通过选择 e_1 和 f_1，使它们在 H 上尽可能地靠近，可以假设 e_1 和 f_1 在 H 中由一条边 g 连接. 不失一般性，$g \in L_2 \in \mathcal{L}$. 用 $e_3, f_3 \in L_3$ 分别记邻接到 g 和 e_1, f_1 的边. 开边 e_3', f_3' 不能位于 H 的同一侧，否则，$E(\mathrm{bd}(F')) \cap E(\mathrm{bd}(F'')) \neq \varnothing$，与 F' 和 F'' 都是 i- 面矛盾. 另一方面，e_3', f_3' 在 H 的不同侧蕴涵对面 F^* 和 F^{**}，$\{e_3, g, f_1\} \subset E(\mathrm{bd}(F^*))$，$\{e_1, g, f_3\} \subset E(\mathrm{bd}(F^{**}))$. 然而，由于在自然 3- 边着色 $\mathcal{L}$ 中，每个面边界仅含有 $\mathcal{L}$ 的两个类的边，而 $\mathrm{bd}(F^*)$ 和 $\mathrm{bd}(F^{**})$ 中，每一个都含有 $\mathcal{L}$ 的三个类的边. 这矛盾蕴涵或者所有 2- 面位于 $\mathrm{ext}\, H$，或它们都位于 $\mathrm{int}\, H$. 不妨设 2- 面位于 $\mathrm{int}\, H$. 由证明的开头的讨论得，3- 面位于 $\mathrm{ext}\, H$. 用 C_1' (C_1'') 记位于 $\mathrm{int}\, H$ ($\mathrm{ext}\, H$) 的 1- 面的必然的非空集，并且进一步记 $V_1 := V(T_1)$，$V_2 := V(T_2)$，其中 T_1, T_2 分别为 $D(G_3)$ 中由 G_3 的位于 $\mathrm{int}\, H$，$\mathrm{ext}\, H$ 的面定义的树，由定义得到 $V_1 = C_1' \cup C_2$，$V_2 = C_1'' \cup C_3$，其中 $C_1' \cup C_1'' = C_1$，$C_1' \cup C_1'' = \varnothing$. 此外，由于 G_3 为 2- 部图，故 $D := D(G_3)$ 为平面的欧拉三角剖分，因而由定理 6.70，$\{V_1, V_2\}$ 为 $V(D)$ 的完美 A- 划分.

反过来，假设 $V(D)$ 完美 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 由 2) 中所述给出，并且令 $T_i = \langle V_i \rangle$ ($i = 1, 2$) 为对应的树. 对每个 $i \in \{1, 2\}$，G_3 的恰属于 V_i 中表示的面中的一个面的边在 G_3 中定义了一个哈密顿圈 H，H 由 V_1，也由 V_2 得到.

因为

$$V_1 = C_1' \cup C_2, \quad 即\ C_3 \cap V_1 = \varnothing,$$

又因为

$$L_1 = \{e \in E(\mathrm{bd}(F_2)) \cap E(\mathrm{bd}(F_3)) \mid F_j\ 为\ j\ 面,\ j = 2, 3\},$$

故我们得到，L_1 的每条边恰属于 V_1 中表示的面的一个边界，即 $L_1 \subset E(H)$. 定理证毕.

因此，关于平面欧拉图的 A- 迹的存在性问题原则上可处理为平面的欧拉三角剖分的特殊 A- 迹 (或者完美 A- 划分) 存在性问题. 同样地，也能处理为平面 2- 部 3- 正则图的特殊哈密顿圈的存在性问题. 这带来一个问题，为什么要处理平面欧拉图中的 A- 迹，而不直接考虑平面 2- 部 3- 正则图中的哈密顿问题 (特别是考虑到 BTC 和猜想 6.73 的等价性，以及古迪的结果 (定理 6.77) 和定理 6.77a 的等价性). 历史似乎对 "哈密顿方法" 提供了理由. 在 6.2 节，我们证明了一个为解决欧拉问题的哈密顿分解的结果. 然而，正如将在相容圈分解内容看到的，处理欧拉图的一些问题以及将相应的结果转换成 3- 正则图的理论已证明是富有成效的方法，特别地，在 A- 迹的情形下，我认为 "欧拉方法" 最终会同样有效. 这个观点不仅来自于多年处理欧拉问题和哈密顿问题的经验，还源自 A 迹和哈密顿圈在各自图类中方法上的差别，即找欧拉迹总含有图的所有边，而找哈密顿圈需要恰当地安排某些边而排斥其余的边，因而后一问题在考虑的图仅有低次点 (特别地，如 3- 正则图) 时变得更复杂. 作为这一观点的证据可比较奥锐定理 (定理 3.75) 和 BTC (猜想 6.72).

结束本小节前，我们给出任意平面 2- 连通图与某些有不分离 A- 迹的平面的欧拉三角剖分的关系 ([REGN76a，Satz5.1])，以及与有哈密顿圈的平面 2- 部 3- 正则图之间的联系，即设 G 为平面 2- 连通图，考虑

$$G_\Delta := S(G) \cup R(S(G)).$$

由这个定义可得 G_Δ 是平面的欧拉三角剖分 (注意 $S(G)$ 是 2- 部图)，并且由于 $\kappa(G) \geqslant 2$，它是简单图. 再由定义，G_Δ 的 3- 点着色 (除了色类的置换，它是唯一确定的) 由 $V(G_\Delta)$ 的划分 $\{V_1, V_2, V_3\}$ 给出，其中

$$V_1 := V(G), \quad V_2 := V(S(G)) - V(G), \quad V_3 := V(R(S(G))) - V(S(G))$$

(注意 V_1 在 $S(G)$ 中已经为独立集，由 $S(G)$ 的定义，V_2 为独立集，并且由于 $S(G)$ 的每个面恰含 $R(S(G))$ 的一个点，故 V_3 是独立集). 注意到 V_2 在 G_Δ 中是 4- 价点的集，由定理 6.67，我们可以得到 $H := ((G_\Delta)_{V_1,1})_{V_3,2}$ 是连通的，并且仅有 2- 价点和 4- 价点. 因此，它有 A- 迹 T_H，T_H 可以解释为 G_Δ 的一个 A- 迹 T. 从 T 的定义可得 T 为不分离的，因而 $G_3 := D(G_\Delta)$ 是哈密顿平面 2- 部 3- 正则图且 $\kappa(G_3) = 3$.

6.3.2　欧拉图中的 A- 迹和哈密顿圈

回到定理 6.85 之前的讨论，我们面临以下问题：为了确定有 A- 迹的平面欧拉图类该往哪个方向走. 正如上面已看到的且等价提出的，在平面的欧拉三角剖分的 3- 点着色中限定点的次，似乎不会有好的结果，除非这个色类的每个点均为 4- 价点. 但在许多图论问题，特别是可平面图论问题中，有一个参数起着本质的作用，即连通度. 前面已看到存在没有 A- 迹的 3- 连通可平面欧拉图. 尽管在构造中，开

始的平面的三角剖分可能是 5- 连通的 (因为存在非哈密顿的可平面圈 5- 边连通的 3- 正则图)，但结果总是一个 3- 连通图 (而不是 4- 连通的可平面欧拉图). 为得到 4- 连通的没有满足叙述 (6.A) 的等价性的 A- 迹 (见引理 6.75 后的讨论) 的可平面欧拉图，我们试图修改这个构造，但未获成功，因而提出如下猜想：

猜想 6.86　每个可平面 4- 连通欧拉图有 A- 迹.

上面不成功的实践不是提出这个猜想的唯一理由. 因为由塔特的"桥定理"(定理 3.70) 知，每个可平面 4- 连通图是哈密顿的 (推论 3.71)，实际上，这是很强的性质. 此外，已经证明在 4- 连通图中找哈密顿圈是多项式问题. 更准确地说是基于塔特的"桥定理"的证明已建立了一个算法，其"时空复杂性 ⋯⋯ 至多 $O(n^3)$"，其中 n 为边数 [GOUY82a，定理 2]. 这与确定可平面 3- 连通 3- 正则图的哈密顿圈的存在性是 NP- 完全问题 [GARE76a] 这个事实形成鲜明的对比，并且这个事实将在确定可平面欧拉图是否有 A- 迹时起一定的作用. 此外，在 2- 部 3- 正则可平面图中找哈密顿圈也是 NP- 完全问题 [PLES83a]. 然而，这个结果不包括所有这样的 2- 连通图 (用 BTC 的观点，它们并不很有意思且经对偶，其重要性也不及考虑 A- 迹). 另一方面，[NISH83a] 中证明了在平面的三角剖分中确定哈密顿途径 (覆盖所有点的最短闭迹) 的问题能在 $O(p^2)$ 时间内解决，并且假如 $p \geqslant 9$，则一条哈密顿途径的长度至多为 $\frac{3}{2}(p-3)$. 因此，在平面的 4- 连通三角剖分中，甚至在 $O(p^2)$ 时间内就能找一个哈密顿圈. 更近的，[ASAN84a] 已建立了在这样的图中找哈密顿圈的线性算法，同年，迟巴 (N. Chiba) 和尼什克 (T. Nishizeki) 对任意 4- 连通可平面图发表了这样的算法 (见 [NISH88a，p182~184]. 由塔特的结果得平面的 4- 连通三角剖分中哈密顿圈的存在性，但这个存在性在 20 世纪 30 年代已被惠特尼 (H.Whitney) 证明 (见推论 3.72). 注意平面的三角剖分不必是哈密顿的 —— 只要对这样的三角剖分的每个面应用 O_6- 扩充). 这些讨论可认为从正面支持了猜想 6.86①.

简单平面图 G 的哈密顿圈 H 定义了两个简单 2- 连通外平面图 G_1, G_2，满足 $G_1 \cup G_2 = G$，$G_1 \cap G_2 = H$②. 因为将 H 看成平面上的简单闭曲线，并将平面图看成某个点集，用

$$V(G_1) = V(G_2) = V(G),$$

$$E(G_1) = \{e \in E(G) \mid e \cap \operatorname{int} H = \varnothing\},$$

① 在一次散步中，罗沙 (A.Rosa) 曾告诉我，以他的观点 (我希望正确地引用了他的观点)，存在两类猜想：一类是"每个人都认为它们一定正确. 但还没有人能证明"的猜想；第二类是"若它们正确，则令人惊奇"的猜想. 我相信这是数学家与猜想 (有多少猜想？) 的关系的很好的描述 (在我自己的研究中，我曾面对这两种情况). 至于猜想 6.86，我愿将它放在这两类猜想之间.

② 当然，G_1, G_2 中恰一个其外面是由 H 定义的有界区域，但不交换 $O^+(G_i)$，重新嵌入相应的 G_i $(i \in \{1,2\})$ 毫无困难 —— 在球面上简单地以 G 的嵌入开始.

$$E(G_2) = \{f \in E(G) \mid f \cap \text{ext } H = \varnothing\}$$

能定义 G_1 和 G_2. 若 G_1 和 G_2 都是欧拉的，则由定理 6.63，它们分别有 A- 迹 T_1 和 T_2. 因而人们会倾向于相信可以从 T_1 和 T_2 开始构造 G 的 A- 迹 T.

不幸的是，有哈密顿圈 H 的 4- 连通可平面欧拉图 G 并不保证容易地找到 G 的 A- 迹. 下面的讨论解释了这个更一般的叙述：若 G 的哈密顿圈 H 满足任意在 H 中相邻的边对 $\{e, f\}$ 属于 G 的一个面边界 (或等价地，e' 和 f' 在 $O^+(v)$ 中相邻，其中 $e', f' \in E_v^*$，参见 [REGN76a，定义 4.2.1])，则称 H 有**A- 性质**. 下面将看到若 G 有这样的具有 A- 性质的 H，则确实能够分别将 G_1, G_2 中的 A- 迹 T_1 和 T_2 连接起来得到 G 的一个 A- 迹. 事实上，在这种情况下，可以从任意 A- 迹开始. 不过我们首先研究外平面欧拉图的 A- 划分. 下面 [REGN76a，Satz 4.1.2] 的结果给出了这种 A- 划分的简单的和精确的刻画 (然而，在建立外平面图的 A- 迹个数的公式时，这个结果更切题. —— 见第 9 章).

定理 6.87　设 G 为简单 2- 面着色 2- 连通外平面欧拉图，其外面 F_∞ 为 1- 面，那么下列叙述等价：

1) G 有 A- 迹；

2) $V(G)$ 有划分 $\{V_1, V_2\}$ 使得对每个 1- 面 $F_1 \neq F_\infty$，$|V(\text{bd}(F_1)) \cap V_1| = 1$.

证明　若 G 是圈，则 1) 和 2) 的等价平凡地成立. 因为此时 $F_1 \neq F_\infty$ 不存在，因此，在下面的讨论中，假设 $\Delta(G) > 2$，即至少存在一个 1- 面 $F_1 \neq F_\infty$.

a) 设 T 为 G 的 A- 迹且任意选定 $F_1 \neq F_\infty$. 此外，设 $\{V_1, V_2\}$ 为由 T 定义的任意 A- 划分. 由于 F_1 是一个 1- 面，故必有 $|V(\text{bd}(F_1)) \cap V_1| > 0$. 这仅从事实 $\Delta(G) > 2$ 就可得到，因为此时 $V(\text{bd}(F_1)) \cap V_1 = \varnothing$ 推出 $G_{V_2,2}$ 不连通且有分支 $\langle E(\text{bd}(F_1)) \rangle$.

现假设 $V(\text{bd}(F_1)) \cap V_1 \supset \{v, w\}$. 那么 $R = \{F_1, F_\infty\}$ 是唯一着色面环，并且有全连接集 $L_R = \{v, w\}$. 由假设 R 的元素是 1- 面且 $L_R \subseteq V_1$. 然而由定理 6.67，这与 $\{V_1, V_2\}$ 为 A- 划分的事实矛盾.

b) 假设 $V(G)$ 的划分 $\{V_1, V_2\}$ 满足对每个 1- 面 $F_1 \neq F_\infty$，$|V(\text{bd}(F_1)) \cap V_1| = 1$. 对固定的 $\delta \in \{1, 2\}$，考虑任意一个其元素为 δ- 面的唯一着色面环 R，并令 L_R 为 R 的全连接集. 由定理 6.67，只要证明 $L_R \not\subseteq V_\delta$. 假设对某个这样的 R 和 L_R 有 $L_R \subset V_\delta$.

首先假设 $\delta = 1$. 因为 $|R| > 1$，故对某个 $F_1 \neq F_\infty$，$F_1 \in R$，并且由定义，$|V(\text{bd}(F_1)) \cap L_R| = 2$. 因此，$|V(\text{bd}(F_1)) \cap V_1| > 1$，与 2) 矛盾.

现假设 $\delta = 2$. 在所有 R 和 L_R 的可能选择中，考虑使 $|L_R|$ 最小的，即 $L \subset L_R$ 意味着不存在唯一着色面环 R' 以 L 为其全连接集. 我们想证明对某个 1- 面 $F^* \neq F_\infty$ 有 $L_R = V(\text{bd}(F^*))$.

从 L_R 的极小性得对 R 的不同元素 F' 和 F''，$|\mathrm{bd}(F')\cap\mathrm{bd}(F'')\cap L_R|\in\{0,1\}$. 于是可如下表达 R 和 L_R:

$$R=\{F_1,F_2,\cdots,F_m\},$$

$$L_R=\{v_{i,i+1}\mid i=1,\cdots,m,\ \text{置}\ v_{m,m+1}=v_{m,1}\},$$

其中

$$L_R\cap\mathrm{bd}(F_i)\cap\mathrm{bd}(F_{i+1})=\{v_{i,i+1}\},\quad i=1,\cdots,m$$

(置 $F_{m+1}=F_1$，$v_{m,m+1}=v_{m,1}$)，并且

$$\mathrm{bd}(F_i)\cap\mathrm{bd}(F_j)=\varnothing,\quad j-i>1,\ 1\leqslant i<j\leqslant m,\ \{i,j\}\neq\{1,m\}.$$

如定理 6.67 证明的第一部分，构造一个简单闭曲线 $\mathcal{C}$，使得

$$G\cap\mathcal{C}=L_R\quad\text{且}\quad\mathcal{C}-L_R\subset\bigcup_{i=1}^{m}F_i.$$

$\mathcal{C}$ 的无界区域 $\mathrm{ext}\,\mathcal{C}$ 含 F_∞，并且由于 G 为外平面的，故 $\mathrm{int}\,\mathcal{C}\cap V(G)=\varnothing$. 因此，其开边位于 $\mathrm{int}\,\mathcal{C}$ 的连接 $\mathrm{bd}(F_i)$ 中的 $v_{i-1,i}$ 和 $v_{i,i+1}$ 的路 $P_{i.i+1}$ 一定满足

$$P_{i,i+1}\subset\mathrm{int}\,\mathcal{C}\cup\{v_{i-1,i},v_{i,i+1}\},$$

由此

$$V(P_{i,i+1})=\{v_{i-1,i},v_{i,i+1}\},\quad\text{即}\ E(P_{i,i+1})=\{v_{i-1,i},v_{i,i+1}\}.$$

因此，

$$\langle L_R\rangle\subset\mathrm{int}\,\mathcal{C}\cup L_R\quad\text{且}\quad\langle L_R\rangle\ \text{为圈}.$$

$\lambda(e)=1$ $(e\in E(G))$ 和 L_R 的极小性推出

$$(\mathrm{int}\,\mathcal{C}-E(\langle L_R\rangle))\cap G=\varnothing,$$

即 $\langle L_R\rangle$ 中的相邻边在 $O^+(v)$ 中相继，其中 v 为它们的公共端点，于是 $\langle L_R\rangle$ 为面边界 $\mathrm{bd}(F^*)$. 因为对 $i=1,\cdots,m$，$E(\langle L_R\rangle)\cap E(\mathrm{bd}(F_i))\neq\varnothing$，故必然有 F^* 为 1-面，并且由于 $\langle L_R\rangle\cap\mathrm{ext}\,\mathcal{C}=\varnothing$，故 $F^*\neq F_\infty$，因而我们已找到一个 1- 面 F^* 满足

$$V(\mathrm{bd}(F^*))=L_R\subseteq V_2,\quad\text{即}\ |V(\mathrm{bd}(F^*))\cap V_1|=\varnothing.$$

这与叙述 2) 矛盾，故情形 $\delta=2$ 得证. 因此，我们得到对 $\delta\in\{1,2\}$ 及其元素为 δ-面的每个唯一着色面环 R，$L_R\not\subset V_\delta$，其中 L_R 为 R 的全连接集. 由定理 6.67，G 有以 $\{V_1,V_2\}$ 为 A- 划分的 A- 迹.

现在证明在定理 6.87 之前的讨论的最后指出的结果.

定理 6.88 ([REGN76a，Satz 4.2.1.]) 设 G 为简单平面欧拉图且有具有 A- 性质的哈密顿圈 H，那么 G 有 A- 迹.

证明　将 G 写成两个 2- 连通外平面欧拉图 G_1 和 G_2 的并，使得 $G_1 \cap G_2 = H$(见定理 6.87 前的讨论). 设 T_1 和 T_2 分别为 G_1 和 G_2 和 A- 迹，由定理 6.63，T_1 和 T_2 存在 (从 G 的 2- 面着色开始，对 G_i 用定理 6.63，其中 G_i $(i=1,2)$ 的 2- 面着色由 G 的 2- 面着色导出. 这样，根据 $i \in \{1,2\}$ 的值，G_i 的边界含 G 的所有点的面或者着色 1 或者着色 2).

由于 H 的 A- 性质，对任意 $v \in V(G)$ 有

$$\text{仅当 } d_{G_j}(v)=2 \text{ 且 } d_{G_i}(v)=d_G(v),\ \{i,j\}=\{1,2\} \text{ 时，} d_{G_i}(G)>2. \tag{$*$}$$

现考虑相应于 G_i 中 T_i 的 A- 划分 $\{V_1^i, V_2^i\}$ $(i=1,2)$，并定义

$$\text{对任意 } i,j \in \{1,2\},\ W_j^i := V_j^i \cap (V(G_i) - V_2(G_i)).$$

这个定义及 $V_1^i \cap V_2^i = \varnothing$ 和 $(*)$ 给出

$$\text{当 } (j,i) \neq (k,\ell),\ \{i,j,k,\ell\} \subseteq \{1,2\} \text{ 时，} W_j^i \cap W_k^\ell = \varnothing \tag{$**$}$$

(注意对 $\{i,k\}=\{1,2\}$，$W_j^i \subseteq V_2(G_k)$).

因此，$\{W_j^i \mid i,j=1,2\}$ 是 $V(G)-V_2(G)$ 的划分，由此，$W_j := W_j^1 \cup W_j^2$ $(j=1,2)$，定义了 $V(G)-V_2(G)$ 的一个划分.

注意到 2- 价点 v_2 不能属于任何唯一着色面环 R 的任一全连接集 L_R，因为 v_2 恰属于一个 δ- 面 $(\delta=1,2)$. 因此，假如 R 的元素为 δ- 面 $(\delta=1,2)$，若能证明对这样的 R 和 L_R，$L_R \not\subseteq W_\delta$，则对任意 $V_2^0 \subseteq V_2(G)$，令 $V_1 := W_1 \cup V_2^0$，$V_2 := W_2 \cup (V_2(G)-V_2^0)$，则得到 $V(G)$ 的 A- 划分 $\{V_1,V_2\}$(见定理 6.67).

因此，设 R 和 L_R 如上. 若 R 的所有元素为 G_i $(i \in \{1,2\})$ 的 δ- 面，则由定理 6.67，T_i 的存在性推出 $L_R \not\subseteq W_\delta^i$ $(\delta \in \{1,2\})$. 因为对 $\{i,j\}=\{1,2\}$，$W_\delta^j \subseteq V_2(G_i)$，故 $L_R \not\subseteq W_\delta$. 因此，必须假设 R 的某些元素为 G_1 的面，某些元素为 G_2 的面且所有面均为 δ- 面 $(\delta \in \{1,2\})$. 进一步指定情形，不妨设 G_1 (G_2) 的“外”面 F^1 (F^2) 着色 δ $(\delta+1)$，其中若 $\delta=2$，则置 $\delta+1=1$ (见定理 6.87 前的讨论的脚注①). 此外，记 $R=\{F_1,\cdots,F_m,\ m>1\}$，$L_R=\{v_{1,2},v_{2,3},\cdots,v_{m,1}\}$ (见定理 6.87 的证明 b) 部分). 若有必要就重新标号 R 和 L_R 的元素，不失一般性，可设 $\mathrm{bd}(F_1) \subseteq G_1$，$\mathrm{bd}(F_m \subseteq G_2)$. 定义

$$i_2 = \min\{i \mid 1 < i \leqslant m \wedge \mathrm{bd}(F_i) \subseteq G_2\} \quad \text{且} \quad i_1 = i_2 - 1,$$

那么在 G_1 中得到唯一着色面环 R'，其元素是 δ- 面，以及相应的全连接集 $L'=L_{R'}$，其中

$$R' := \{F_1,\cdots,F_{i_1},F^1\}, \quad L' = \{v_{1,2},\cdots,v_{i_1,i_2},v_{m,1}\}.$$

于是 $L' \subseteq L_R$ 且 $L' \subseteq V(G_1)$. 若 $L_R \subseteq W_\delta$，则这与 $W_\delta^2 \subseteq V_2(G_1)$ 将推出 $L' \subseteq W_\delta^1 \subseteq V_\delta^1$. 但将定理 6.67 应用到 G_1，则 T_1 的存在性及它的 A- 划分 $\{V_1^1,V_2^1\}$ 蕴

涵着 $L' \not\subseteq V_\delta^1$. 于是必有 $L_R \not\subseteq W_\delta$. 再由定理 6.67 及上面 V_1 和 V_2 的定义，就有 $\{V_1, V_2\}$ 是 G 的 A- 划分，即 G 有 A 迹. 定理 6.88 证毕.

然而正如定理 6.88 的证明所述，不是 G 的每一个 A 迹都能分别从 G_1 和 G_2 的 A- 迹 T_1 和 T_2 得到，即 $V(G)$ 的某个 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 也许不是 $V(G_i) = V(G)$ $(i = 1, 2)$ 的 A- 划分. 这在 O_6 的情形就已经能看出，O_6 可看成从圈 $C_6 = \langle v_1, \cdots, v_6 \rangle$ 中添加 $\Delta_1 = \langle v_1, v_3, v_5 \rangle$ 和 $\Delta_2 = \langle v_2, v_4, v_6 \rangle$ 得到. 在 C_6 的有界区域嵌入 Δ_1，这样 Δ_2 位于 C_6 的无界区域. 假设 2- 面着色 O_6 的外面是 1- 面. 定义 $H := C_6$，$G_1 := H \cup \Delta_1$，$G_2 := H \cup \Delta_2$，并且 $V_1 := \{v_2, v_3, v_6\}$，$V_2 := \{v_1, v_4, v_5\}$. 尽管 $\{V_1, V_2\}$ 是 $V(G)$ 的 (完美)A- 划分，但 $\{V_1, V_2\}$ 不是 $V(G_1) = V(G)$ 的 A- 划分，也不是 $V(G_2) = V(G)$ 的 A- 划分 (注意 H 有 A- 性质). 因为 $(G_1)_{\{v_1, v_5\}, 2}$ 不连通，故 $(G_2)_{\{v_2, v_6\}, 1}$ 也不连通. 然而，若 $V(G)$ 的 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 也是 $V(G_i)$ 的 A- 划分，$i \in \{1, 2\}$，则可以说后者是前者的**导出 A- 划分**. 相应地，可以说 **G_i 的 A- 迹 T_i 由 G 的 A- 迹 T 导出**.

图 6.38 的图给出了一个平面的欧拉三角剖分 D 以及一个哈密顿圈 H，使得满足 $G_1 \cup G_2 = D$ 和 $G_1 \cup G_2 = H$ (见定理 6.87 前的讨论) 的相应的图 G_1 和 G_2 都是欧拉的. 我们讨论这个图 D. 因 $(V(G_1) - V_2(G_1)) \cap (V(G_2) - V_2(G_2)) = \{a, b, c, d, e, f\}$，故 H 无 A- 性质. 从定理 6.63 知，G_i 有 A- 迹 T_i $(i = 1, 2)$. 我们要证明不能用类似于定理 6.88 的证明方法选取 T_1, T_2，使得这些 A- 迹可以扩充到 G 的 A- 迹 T. 为此，只要证明 T_1 不能与 T_2 在 $V_0 := \{a, b, c, d, e, f\}$ 中导出相同类型的分裂. 更确切地，设 G_1 和 G_2 有以 D 的一个 2- 面着色得来的 2- 面着色. 在 G_1 和 G_2 中，设 G_1 是外面 F_∞ 是 H 的无界区域的图 (这里将 H 看成简单的闭平面曲线)，并且不妨设选择 D 的 2- 面着色，使得 G_1 中 F_∞ 是 1- 面，因而有 G_2 的"外"面 $\operatorname{int} H$ 是 2- 面. 如定理 6.88 的证明，设 $\{V_1^i, V_2^i\}$ 是 G_i 的任意选择的 A- 迹 T_i $(i = 1, 2)$ 的 A- 划分. 我们要证明等式 $V_0 \cap V_1^1 = V_0 \cap V_1^2$ 和 $V_0 \cap V_2^1 = V_0 \cap V_2^2$ 都不成立.

假设 $a \in V_1^1$. 因为 d, e, f 是 G_1 的含 a 作为其边界点的 1- 面的边界点，故由定理 6.87 得 $\{d, e, f\} \subset V_2^1$. 然而由同一定理，因为对 G_2 的某个 2- 面 F_2，$\{e, f\} \subset \operatorname{bd}(F_2)$，并且由于 G_2 的"外"部面也是 2- 面，故不可能有 $\{e, f\} \subset V_2^2$. 因此，若 $a \in V_1^1$，则上面的等式不能成立.

现假设 $a \in V_2^1 \cap V_2^2$. 因 b 和 c 为 G_2 的含 a 作为其边界点的 2- 面的边界点，故由定理 6.87，$\{b, c\} \subset V_1^2$. 另一方面，对 G_1 的某个 1- 面 F_1，$\{b, c\} \subseteq V(\operatorname{bd}(F_1))$. 这样，由定理 6.87 必有 $\{b, c\} \not\subseteq V_1^1$. 因此在情形 $a \in V_2^1$，我们也有上面的等式不成立. 然而我们将检查 D 确实有一个 A- 迹留作练习 (注意 $\kappa(D) = 3$).

因此，在一般情形下，不可能从 G 的某个 A- 迹推出 G_i $(i = 1, 2)$ 的 A- 迹 T_i (这里 G_i 如上定义，与哈密顿圈 H 相关)，若进一步地，H 有 A- 性质，可以得到下面有趣的结果 [REGN76a，Satz 4.2.2]. 这里给出完全不同于瑞格尼尔所给出的

证明.

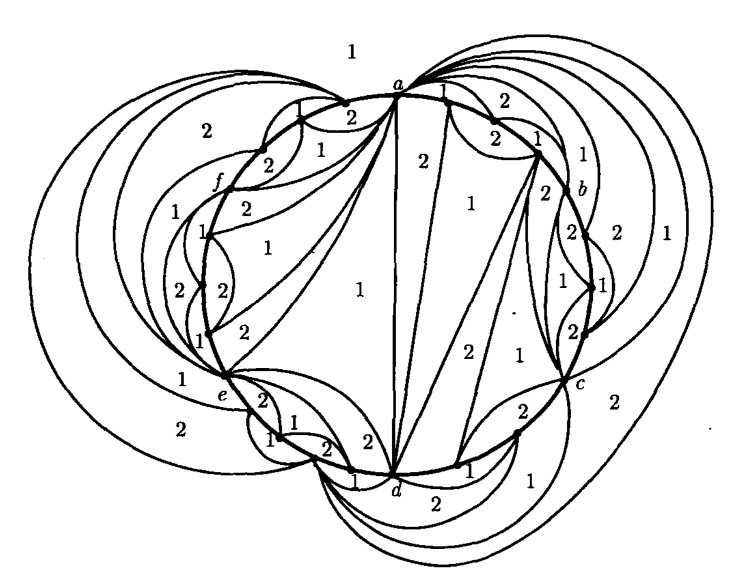


图 6.38　定义了两个 2- 连通外平面欧拉图 G_1, G_2，使得 $D = G_1 \cup G_2$，$H = G_1 \cap G_2$ 的一个平面的欧拉三角剖分 D 以及哈密顿圈 H. D 没有在 G_1 和 G_2 中都导出 A- 划分的 A- 划分 (注意到 $(V(G_1) - V_2(G_1)) \cap (V(G_2) - V_2(G_2)) = \varnothing$)

定理 6.89　对 2- 面着色平面欧拉图 G，假设它有一个哈密顿圈 H，H 有两个满足 $G_1 \cup G_2 = G$，$G_1 \cap G_2 = H$ 的外平面欧拉图 G_1 和 G_2. 若 G 有导出 G_i 的 A- 迹 T_i 的 A- 迹 T，则 T 也在 G_j 中导出 A- 迹 T_j，$\{i, j\} = \{1, 2\}$.

证明　不妨设 G_1 的无界面 F_∞ $(\mathrm{bd}(F_\infty) = H)$ 在 G_1 的由 G 的 2- 面着色导出的 2- 面着色中是 1- 面，并设 G 有 A- 迹 T，T 在 G_2 中导出 A- 迹 T_2. 令 $\{V_1, V_2\}$ 是分别对应于 T 和 T_2 的 $V(G) = V(G_2)$ 的 A- 划分. 我们需要证明 $\{V_1, V_2\}$ 也是 $V(G_1)$ 的 A- 划分. 为此，首先注意到 $G^1 := G_{V_{1,1}}$ 是连通外平面图，其外面 F^1_∞ 是 1- 面且 $E(\mathrm{bd}(F_\infty)) \subseteq E(\mathrm{bd}(F^1_\infty))$，并使得对 G^1 的每个圈 B 有 $E(\mathrm{bd}(F^1_\infty)) \cap E(B) \neq \varnothing$ (引理 6.58，定理 6.59). 若能证明 $G^1 - E(G_1)$ 的每个非平凡块是 G^1 的端块，则 $G^1 - (G_2 - E(H))$ 恰有一个非平凡分支，即 $(G_1)_{V_{1,1}}$，它满足引理 6.58 的假设.

考虑图

$$G^0 := (G_2)_{V_{1,1}} \cup (E(G_1) - E(H)).$$

因为 G_2 的“外”面 F^∞ 在 G_2 的导出 2- 面着色中是 2- 面 (由于 F_∞ 是 1- 面)，故 G^0 是有定义的，并因此有 $E(H) = E(\mathrm{bd}(F^\infty))$，因此，从 $(G_2)_{V_{1,1}}$ 到 G^0 构造致使加上 H 的位于 G_1 的对角线，即加上 $E(G_1) - E(H)$ 的元素. 又因为经过 $(G_2)_{V_{1,1}}$

的唯一确定的 1- 面的边界时出现 T_2，由定义，G^0 是连通的. 此外，$E(\mathrm{bd}(F^\infty)) \subseteq E((G_2)_{V_1,1})$ 推出

1) $(G_2)_{V_1,1}$ 含有块 $\langle E(\mathrm{bd}(F^\infty))\rangle$，

因此，

2) G^0 有包含 $\langle E(\mathrm{bd}(F^\infty))\rangle$ 的块 B^∞，使得 $B^\infty \simeq G_1$；

3) $G^0 - B^\infty$ 的每个块 C 是满足 $E(C) \subseteq E(G_2) - E(H)$ 的圈，由此，C 为 G^0 的端块 (见 2)).

根据 B^∞ 的点在 G 中的原始标号重新标号 B^∞ 的点，则得到 $B^\infty = G_1$ 且

$$G^1 \simeq (G^0)_{V_1,1}. \tag{$*$}$$

对 G^0 的每个除了 B^∞ 的块 C (见 3)) 有 $C \cap B^\infty \subset V_2$. 因此，这个唯一的 $v_C \in C \cap B^\infty$ 不被从 G^0 到 $(G^0)_{V_1,1}$ 的转移影响. 因为每个 $x \in V(C - v_C)$ 在 G^0 中是 2- 价点，因此，在 $(G^0)_{V_1,1}$ 也是 2- 价点，于是 $G^0 - B^\infty$ 的每个块都是 $(G^0)_{V_1,1}$ 的端块. 最后，若将 G_1 和 $(G^0)_{V_1,1}$ 看成无标号图，则同构 $(*)$ 成为等式 (在 $(*)$ 中，能选择同构，使得 $E(G^1) = E((G^0)_{V_1,1})$). 因此，$G^1 - E(G_1)$ 的每个非平凡块是 G^1 的端块，G 的边集属于 $G_2 - H$，因而由 G^1 满足引理 6.58 的假设，故

$$(G^1 - E(G_2 - H)) - V_0(G^1 - E(G_2 - H)) = (G_1)_{V_1,1}$$

也满足引理 6.58 的假设 (上一等式的左端仅表示删去 G^1 的某些端块，这种删去给出了一个连通图，并且保持那个引理表述的嵌入性质不变). 于是 $(G_1)_{V_1,1}$ 有 A- 迹，从而 G_1 有 A- 迹. 至此，定理证毕.

也许上面有关平面哈密顿欧拉图的 A- 迹的讨论有助于最终证明或否定猜想 6.58. 然而，我不知道哪些平面 4- 连通欧拉图有具有 A- 性质的哈密顿圈 H 或者有至少一个 H，使得由 $\mathrm{int}\, H \cup H$ 和 $\mathrm{ext}\, H \cup H$ 定义的图 G_1, G_2 都是欧拉的.

因此，对欧拉三角剖分 D 考虑猜想 6.86. 前面用的构造 (也见猜想 6.86 前的讨论) 不能得到在平面的 4- 连通欧拉三角剖分中 A- 迹与不分离 A- 迹是等价概念这个结论 (与猜想 6.73，猜想 6.74 以及导致引理 6.75 的讨论比较). 对平面的三角剖分用“不分离 A- 迹”代替“A- 迹”修改猜想 6.86，对连通平面 3- 正则图 $G_3 \neq K_4$，由定理 6.71 和关系 $\kappa(D(G_3)) = \lambda_c(G_3)$ 得到在圈 4- 边连通可平面 2- 部 3- 正则图的情形，这个修改的猜想与 BTC (猜想 6.72) 等价. 但对 G_3，$D = D(G_3)$ 中 A- 迹 (不必为不分离的 A- 迹) 的存在蕴涵了什么？这个问题由下面的定理回答. 回想 G 的控制圈 (或 G 是 3- 正则时的塔特圈) 是使得 $E(G - V(C)) = \varnothing$ 的圈 C.

定理 6.90 设 G_3 为连通平面 2- 部 3- 正则图，具有划分 $\{V_1, V_2\}$，并且令 $D(G_3)$ 表示其对偶，则下面的叙述等价：

1) $D(G_3)$ 有 A- 迹；

2) G_3 有塔特圈 C，使得 $V' := G_3 - V(C)$ 满足

a) $V_1 \cap V' \subset \operatorname{int} C$ 当且仅当 $V_2 \cap V' \subset \operatorname{ext} C$；

b) $V_1 \cap V' \cap \operatorname{ext} C = \varnothing$ 或 $V_1 \cap V' \cap \operatorname{int} C = \varnothing$.

修改定理 6.71 的塔特证明能够得到定理 6.90 的证明，因此，把这个证明留作练习.

注意到在定理 6.90 中，G_3 的特殊类型的塔特圈与 $D(G_3)$ 的 A- 迹之间的等价性不需要 $\lambda_c(G_3) = 4$. 另一方面，塔特的"桥定理"保证了在可平面圈子 4- 边连通 3- 正则图中存在控制圈 (推论 3.73). 因此，当 $\lambda_c(G_3) = 4$ 时，定理 6.90 所述的等价性等同于在 G_3 的塔特圈的非空集中是否存在一个元素满足 a) 和 b) 的问题. 也注意到关于不分离 A- 迹，只要对 4- 连通三角剖分证明猜想 6.73，这从命题 6.83 得到且它等同于说只要对相应的圈 4- 边连通图证明 BTC(见练习 6.25 和练习 6.30).

6.3.3 如何找出 A- 迹：一些复杂性讨论和算法的建议

尽管复杂性考虑是当代图论发展的一个非常重要的部分 (特别是涉及大量运筹学的应用问题)，但它并未构成本书的基本部分. 虽然如此，这里及其他章节根据我对一个 (已解决或未解决) 问题的重要性的认识来考虑它们，然而我只限于考虑给定的问题是不是 (至少) NP- 完全的，或它是不是能在多项式时间被解决 (确定)[①].

下面基本上仅讨论 3- 连通可平面欧拉图. 正如前面已看到的，2- 连通可平面欧拉图 G 可能有平面嵌入 G_1 和 G_2，使得 G_1 没有 A- 迹而 G_2 有 A- 迹 (图 6.26～图 6.28). 于是我们将不得不考虑嵌入问题，涉及 A- 迹的存在或者不存在时，将不得不检查所有的平面嵌入. 另一方面，3- 连通可平面图 G 在平面上有唯一嵌入 (见定理 3.52). 由此 (见引理 6.64 前的讨论)，在这样的欧拉图 G 中，A- 迹的存在性与 G 在平面上 (或等价地，在 3- 维球面上) 的具体的嵌入无关. 不过实际上将总是考虑 G 的一个嵌入.

根据瑞格尼尔关于没有 A- 迹的可平面 3- 连通的欧拉图的构造 (引理 6.76 前的叙述 (6.A))，并由于 [GARE76a]，我们能够叙述并证明下面的结果.

定理 6.91 确定给定连通平面欧拉图是否有 A- 迹的问题是一个 NP- 完全问题. 即使问题限制到 3- 连通图，结论也成立[②].

---

① 我知道这个观点很主观，并预见到一些同行的失望与批评. 不过，根据我所选择的内容，详细处理复杂性和 (或) 算法会占据本书的很大一部分. 此外，坦白地说，对这些专题我并不是专家，因此，我更愿意把它留给更有发言权的研究者.

② 定理的第一部分在 [BENT87a] 中已被证明，A- 迹在那里被作者称为"非交叉欧拉迹". 在多数例子中，他们的构造也包含重边和割点. 值得注意的是这篇论文的动机来源于一个火焰分割问题.

证明 由叙述 (6.A)，若 G_3 是一个可平面 3- 连通 3- 正则图，则存在可平面 3- 连通欧拉图 G，使得 $D(G_3) \subset G$，$D(G_3)$ 的任意面边界都不是 G 的面边界，并且 G 有 A- 迹当且仅当 G_3 有哈密顿圈. 因为 G_3 的哈密顿问题是 NP- 完全的 [GARE76a]，故至多只要证明 $G \supset D(G_3)$ 的 A- 迹问题多项式等价于 G_3 的哈密顿问题，并且在多项式时间内从 G_3 能构造出 G. 因为从定理 3.89 和定理 3.90 确定给定图是否是可平面的，以及在 "是" 的条件下可以在多项式时间内找到一个平面嵌入，所以可以假设 G_3，G 分别为实际的平面图. 找 G 的 2- 平面着色问题也是多项时间可解的 (定理 3.91). 因此，也可以假设给定 G 的 2- 面着色.

假设给定 $G \supset D(G_3)$ 的 A- 迹 T. 跑遍整个 T 的每个可达点 v (不管 v 是否为第一次达到)，即知 $v \in V_1$ 还是 $v \in V_2$，其中 $\{V_1, V_2\}$ 为 T 的 A- 划分. 因为连同 G 的嵌入能够在多项式时间内确定 $D(G_3)$ 的面边界 (定理 3.90c))，故我们知道 E_v 的在 T 中相继的边是属于 G 的 1- 面的边界还是属于 G 的 2- 面的边界. 因此，在多项式时间 $P_1(p_G)$ 内从 T 得到 $\{V_1, V_2\}$. 有了 $V(D(G_3))$，在多项式时间 $P_2(p_G)$ 内得到 $V_i' := V_i \cap V(D(G_3))$，使得 $\langle V_i' \rangle$ $(i = 1, 2)$ 是树. 对 G_3 的每个面 F，已知双射 $v_F \in V(D(G_3)) \leftrightarrow \mathrm{bd}(F) \subset G_3$ (仅需多项式时间和空间)，构造 $G_0 = \bigcup_{v_F \in V_1'} \mathrm{bd}(F) \subset G_3$. 在多项式时间 $P_3(p_{G_3})$ 内能做到这一点，并删除 G_0 的属于 $\mathrm{bd}(F')$ 和 $\mathrm{bd}(F'')$ 的边，其中 $F' \neq F''$，$v_{F'}v_{F''} \in E(\langle V_1' \rangle)$，并导出 G_3 的哈密顿圈 H. 因为 $p_G \leqslant$ 常数 $\cdot p_{G_3}$ (见下面)，所以 $P(p_{G_3}) := P_1(p_G) + P_2(p_G) + P_3(p_{G_3})$ 是 $P_{G_3} = |V(G_3)|$ 的多项式，其表示从 G 的 A- 迹 T 得到 G_3 的哈密顿圈 H 所需的时间.

反过来，假设 G_3 的哈密顿圈 H 给定. 在多项式时间 $P_1'(p_{G_3})$ 内达到 $D(G_3)$ 的点划分 $\{V_1', V_2'\}$，使得 $\langle V_i' \rangle$ $(i = 1, 2)$ 是树 (V_1' 对应于 G_3 的面 $F \supset \mathrm{int}\, H$ 的集). 为得到 $V(G)$ 的满足 $V_i' = V_i \cap V(D(G_3))$ $(i = 1, 2)$ 的 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$，选择特别的方法构造平面 3- 连通欧拉图 G，满足 $D(G_3) \subset G$ 且 $D(G_3)$ 的面边界都不是 G 的面边界. 在引理 6.76 前的讨论中，已经注意到 G 的构造不是唯一的，并且能构造 G，使得 $D(G_3)$ 的每个面恰含或者图 6.32 中的 H_i 的，或者图 6.31 中的 H_0 的一个拷贝. 这个构造是证明的最后一步，由此，首先假设具有该性质的 G 给定. 那么 $p_G \leqslant f_{G_3} + 5p_{G_3} \leqslant 6p_{G_3}$，这里从欧拉的多面体公式得到第二个不等式，并且第一个不等式归于这个事实：$D(G_3)$ 的面 (对应于 G_3 的点，反之也对) 含有 $V(G) - V(D(G_3))$ 的三个或 5 个点.

有了 $D(G_3)$ 和 $\{V_1', V_2'\}$，我们能如下扩充这个划分到 $\{V_1, V_2\}$：

a) $D(G_3)$ 的面 F 恰含三个点，则它含 H_0. 用图 6.31 的记号，由对称性不妨设 $a, b \in V_1'$，$c \in V_2'$. 此时，定义 $\{a_1, b_1\} \subset V_2$，$c_1 \in V_1$. 注意到总共仅有 6 种选择在 V_1' 和 V_2' 中分配 a, b, c.

b) $D(G_3)$ 的面 F 恰含 5 个点，故它含 H_i. 用图 6.32 的记号，也有 6 种选择在 V_1' 和 V_2' 中分配 x_{i-1}, x_i, y_i，由对称性，不妨设 $\{x_{i-1}, x_i\} \subset V_1'$ 且 $y_i \in V_2'$ 或 $\{x_{i-1}, y_i\} \subset V_1'$，$x_i \in V_2'$. 在任何情形下，令 G 的由 $N(x_{i-1}) \cap N(y_i) \cap F$ 唯一确定的点属于 V_2；令 G 的由 $N(x_{i-1}) \cap N(x_i) \cap F$ 唯一确定的点 t_i 属于 V_1，除非 $\Delta = \langle x_{i-1}, t_i, x_i \rangle$ 是一个 2- 面的边界且 $y_i \in V_2'$，此时，令 $t_i \in V_2$，并令 $N(x_i) \cap N(y_i) \cap F$ 的相应点属于 V_1. 至于 $V(H_i) \cap F$ 的剩下的两点 $u_{i-1} \in N(x_{i-1})$，$u_i \in N(x_i)$，定义 $u_{i-1}, u_i \in V_2$.

因为 $\langle V_i' \rangle$ $(i = 1, 2)$ 是树且由将 $\{V_1', V_2'\}$ 扩充到 $\{V_1, V_2\}$ 的方法，从这些考虑得 $\{V_1, V_2\}$ 为一个 A- 划分，它能在多项式时间 $P_2'(p_{G_3})$ 内从 $\{V_1', V_2'\}$ 得到. 因此，连同 G 的 2- 面着色，我们用迭代程序能够实现从 $\{V_1, V_2\}$ 到代表 G 的 A- 迹的圈 T 的转化，即定义 $G_0 := G$ 且 $G_i := (G_{i-1})_{\{v_i\},\delta}$ $(i = 1, \cdots, p_G)$，其中 $V(G) = \{v_1, \cdots, v_{p_G}\}$ 且 $\delta \in \{1, 2\}$ 的值由 $v_i \in V_\delta$ 确定. 因为在多项式时间内能完成从 G_{i-1} 到 G_i 的转化，在多项式时间 $P_3'(p_G)$ 内从 $\{V_1, V_2\}$ 到达 $T = G_{p_G}$. 又因为 $p_G =$ 常数 p_{G_3}，故在多项式时间 $P'(p_{G_3}) = P_1'(p_{G_3}) + P_2'(p_{G_3}) + P_3'(p_G)$ 内从 G_3 的给定哈密顿圈 H 到达 G 的 A- 迹 T. 于是在 $G \supset D(G_3)$ 中找 A- 迹的问题多项式地等价于在 G_3 找哈密顿圈的问题.

最后，我们证明在多项式时间内可以构造 G，使 G 具有如下性质：$D(G_3)$ 的每个面恰含或 H_i 或 H_0 的一个拷贝. 首先，我们注意到在多项式时间 $Q_1(p_{G_3})$ 内完成从 G_3 到 $D(G_3)$ 的转化.

现在需要中国邮递员问题 (CPP) 的一些理论，我们将在第 8 章中讨论，即给定连通图 H，存在具有下面性质的欧拉子图 H_1：

1) $V(H_1) = V(H)$，$E(H_1) \supseteq E(H)$；

2) 若 H 中 x, y 不相邻，则在 H_1 中它们也不相邻；

3) 对 H_1 的每个圈 C_1 有

$$|E(C_1) \cap (E(H_1) - E(H))| \leqslant \frac{1}{2}\ell(C_1).$$

更具描述性地说，1)~3) 表明，H_1 是从 H 用重度为 2 的边代替 H 的一些边，使得 H_1 是欧拉的，并且对 H 的每个圈 C，C 的在 H_1 中用重边代替的边数至多为 $\frac{1}{2}\ell(C)$. 在 CPP 的讨论中将看到，在多项式时间内能从 H 构造出 H_1. 注意到在这种构造中，

$$\text{对每个 } v \in V(H) = V(H_1),\ d_{H_1 - E(H)}(v) \equiv d_H(v) \pmod 2.$$

应用到从 $H = D(G_3)$ 构造 G，上面的叙述等同于说，能在多项式时间 $Q_2(p_{G_3})$ 内用 0 和 1 标号 $D(G_3)$ 的边，使得在 $D(G_3)$ 中，对 $E_1 := \{e \in E(D(G_3)) \mid \lambda(e) = 1\}$ (λ 记标号函数)，

$$\text{对每个 } v \in V(D(G_3)),\ |E_v \cap E_1| \equiv d_{D(G_3)}(v) \pmod 2 \tag{1}$$

且对 $D(G_3)$ 的每个圈 C,

$$|E(C) \cap E_1| \leqslant \frac{1}{2}\ell(C). \tag{2}$$

特别地,对 $D(G_3)$ 的三角形面边界 Δ, (2) 成立. 也就是说,对每个这样的 Δ, $|E(\Delta)\cap E_1| \in \{0,1\}$. 用图 6.31 和图 6.32 的记号,若 $E(\Delta)\cap E_1 = \varnothing$, 则记 $V(\Delta) := \{a,b,c\}$; 若 $E(\Delta) \cap E_1 \neq \varnothing$, 则 $V(\Delta) := \{x_{i-1}, x_i, y_i\}$, 这里不妨设选择的记号, 使得 $\{x_{i-1}x_i\} = E(\Delta) \cap E_1$. 在含 $x_{i-1}x_i$ 的两个面边界中, 选择一个并固定, 如上记为 Δ.

对每个选择的满足 $E(\Delta) \cap E_1 \neq \varnothing$ 的 Δ, 在相应的面上嵌入图 6.32 的图 H_i. 对每个其他的面边界 $\Delta = \langle a,b,c\rangle$, 在相应的面上嵌入图 6.31 的图 H_0. 用 G 记这样从 $D(G_3)$ 得到的图. 因为对 $D(G_3)$ 的 p_{G_3} 个面边界的每一个, 在常数时间内分别能嵌入 H_0, H_i, 故这仅需多项式时间 $Q_3(p_{G_3})$. 于是在多项式时间 $Q(p_{G_3}) = Q_1(p_{G_3}) + Q_2(p_{G_3}) + Q_3(p_{G_3})$ 内能完成从 G_3 到 G 的转化. 由 (1) 及从 $D(G_3)$ 到 G 的这个构造得 G 是平面的且是欧拉的. 由 G_3 是 3- 连通的, 故 G 也是 3- 连通的. 定理证毕.

注意到在定理 6.91 的证明的第二步, 不必清楚地将 $\{V_1', V_2'\}$ 扩充到 $\{V_1, V_2\}$, 只要构造连通的 4- 正则图 $\hat{G} = (G_{V_1',1})_{V_2',2}$, 然后逐步地应用分裂引理 (见第 10 章), 在多项式时间内用算法找 $\hat{G}$ 的一个 A- 迹.

至于可平面 4- 连通图的 A- 迹问题的复杂性, 很可能是平行于哈密顿问题的复杂性. 因为正如前面看到的, 4- 连通可平面图中, 能在多项式时间内找到它的哈密顿圈. 这就推出, 在多项式时间内能找到可平面 3- 正则图 G_3 ($\lambda_c(G_3) \geqslant 4$) 的塔特圈. 在这种情形下, $L(G_3)$ 是可平面 4- 连通图 (见推论 3.73). 当然, 这并不保证在多项式时间内找到定理 6.90 中描述的那种塔特圈①. 事实上, 存在上面平行可能性的证据. 除了猜想 6.86 后的讨论中引用的事实, 我们可以作如下观察 (我们只给出证明的轮廓, 而将详细证明留作练习):

① 另一方面, 断言对任意线图哈密顿问题是多项式可解的 (见 [GARE79a, p199,[GT37]], 那里作者引用 [LIUC68a]), 因此, 塔特圈问题将是 P- 问题 (见引理 3.69). 这个断言必定是错误的. 为看清这一点, 首先对 2- 连通 3- 正则图 G_3 考虑 $L(G_3)$. 其次对 G_3 的每点 v_i 引入一个新点 v_{p+i}, 并加入新边 v_iv_{p+i} ($i = 1, \cdots, p$), 用 H 记这样得到的图. 最后考虑 $L(H)$ 和 $S(G_3)\cup L(G_3)$. 后者可以看成从 $S(G_3)$ 通过令 $V(L(G_3)) = V_2(S(G_3))$, 然后加入 $E(L(G_3))$ 得到的图. 若我们进行下去, 则 $L(H)$ 和 $S(G_3) \cup L(G_3)$ 是同构图. 有了 $L(H)$ 的直接印象, 由直接的讨论知, 在 G_3 的哈密顿圈和 $L(H)$ 的这样的圈之间存在着一一对应. 此外, 上面的构造, G_3 的哈密顿圈到 $L(H)$ 的相应的哈密顿圈的转化及相反的转化都能在多项式时间内实现, 因而得出结论: 即使 G_3 是可平面 3- 连通图, $L(H)$ 的哈密顿圈问题也是 NP- 完全的 (参见 [GARE76a]). 注意到这些讨论是 [BERT81a] 中波特斯 (Bertossi) 的考虑的一点修改, 他处理了哈密顿路问题的类似的错误 [GARE79a, p199,[GT39]]. —— 附带地, 我在 [LIUC68a] 中未能找到 [GARE79a] 中引用的断言.

1) *在多项式时间内能够找到 2- 连通外平面简单图的 A- 迹.*

利用定理 6.87，我们给出一个程序在 2- 连通外平面简单图 G 中构造一个 A- 迹. 假设 G 是 2- 面着色的，G 的外部面 F_∞ 是 1- 面. 这个程序 (或称为算法) 就是逐步地标号价大于 2 的点，使得最后每个 1- 面 $F_1 \neq F_\infty$ 恰含一个标号点. 用 V_1 记已标号点的集合，$V_2 := V(G) - V_1$，那么划分 $\{V_1, V_2\}$ 满足定理 6.87 的条件，因此，$(G_{V_1,1})_{V_2,2}$ 将是一个圈，它表示 G 的一个 A- 迹.

然而 G 的弱对偶

$$D^w(G) := D(G) - f_\infty$$

的构造是开始点，其中 f_∞ 是 G 的对偶 $D(G)$ 的对应于 F_∞ 的点. [FLEI74a，定理 1 和推论] 表明对 2- 连通外平面图，$D^w(G)$ 是树. 因此，在我们的情形下，$T^w := D^w(G)$ 是树，其随 G 的 2- 面着色的点划分 $\{V_1^w, V_2^w\}$ 使得 T^w 的端点属于 V_2^w. 选取 $v_0 \in V_1^w$ 且定向 T^w 的边，使得 T^w 变为一个出树 T_0^w，满足 $V(T_0^w) = V(T^w)$ 且根为 v_0. 对每个 $v \in V_1^w$，令 $F_v \neq F_\infty$，记 G 的对应于 v 的 1- 面 $F_v \neq F_\infty$，并且对 G 的每个 1- 面 $F \neq F_\infty$，令 v_F 记 V_1^w 的相应点. 注意到下面的初始化都能在多项式时间 $P_0(n)$ 内完成，其中 $n = |V(G)|$:

a) 建立 G 的面边界，并根据它们是 1- 面还是 2- 面将它们分类;

b) 对每个 $v \in V(G)$ 建立 1- 面 F_1 的集 $\mathcal{L}_v$，使得 $v \in V(\mathrm{bd}(F_1))$;

c) 构造以 v_0 为根的具有点划分 V_1^w, V_2^w 的平面出树 T_0^w.

首先标记根 $v_0 \in V(T_0^w)$. 然后标记 $\mathrm{bd}(F_{v_0})$ 的任意点 v_1，令 $v_1 \in V_1$(注意由 v_0 的选择 F_{v_0} 是 1- 面). 其次考虑 $\mathcal{L}_{v_1}$ 并对每个 $F \in \mathcal{L}_{v_1} - \{F_{v_0}\}$ 标记 $v_F \in V_1^w$. 恰因为 G 为 2- 连通外平面图，故在这个标记阶段及以后各阶段有下列性质:

若 $P(v_0, w)$ 是 T_0^w 中连接根 v_0 和 $w \in V_1^w$ 的一条路，并且 w 已标记，则 $V(P(v_0, w)) \cap V_1^w$ 的所有元素都已标记.　　(*)

接着选取一个未标记点 $v \in V_1^w$，满足

$V(P(v_0, v) - v) \cap V_1^w$ *的所有元素都已标记.*　　(**)

我们标记 v. 正由于 G 是外平面的且是简单的，故存在 $v_2 \in V(\mathrm{bd}(F_v))$，使得

$d(v_2) \geqslant 4$ *且对每个* $F \in \mathcal{L}_{v_2} - \{F_v\}$，$v_F \in V(T_0^w)$ *尚未标记.*　　(* * *)

标记 v_2. 接着在 T_0^w 中对每个 $F \in \mathcal{L}_{v_2} - \{F_v\}$，标记点 $v_F \neq v$. 注意到由 (*)，V_1^w 中已标记的元素以及 V_2^w 的与这些标记点邻接的点定义了 T_0^w 的一个根为 v_0 的子树 T'. 因此，若 $T' \neq T_0^w$，则选择 $x \in V_1^w$ 满足条件 (**) (用 x 代替 v) 以便标记 x，并找到 $v_3 \in V(\mathrm{bd}(F_2))$ 满足条件 (* * *) (用 v_3 代替 v_2)，并标记为 v_3. 然后在 T_0^w 中对每个 $F \in \mathcal{L}_{v_3} - \{F_x\}$ 标记点 $v_F \neq x$. 注意到在用上面定义 T' 的标号程序的新步骤定义的子树 T'' 满足

$$T' \subset T'' \subseteq T_0^w.$$

因此，重复地选取 V_1^w 的点，使之满足 $(**)$，选取 G 的满足 $(***)$ 的点且标号后者，最后得到了一个出树 $T^{(i)}$ 满足

$$T' \subset T'' \subset \cdots \subset T^{(i)} = T_0^w.$$

在第 i 步后，$V_1 \subset V(G)$ 恰含 $V(G)$ 的标号点，并且 $V_2 := V(G) - V_1$ 定义了一个点划分. 注意到恰由于 $(***)$，定理 6.87 的叙述 2) 满足. 因此，$\{V_1, V_2\}$ 为 $V(G)$ 的一个 A- 划分.

附带注意到前面的算法考虑及定理 6.87 等于是定理 6.63 的另一个证明，它独立于前面给出的证明.

关于上面的标号程序的复杂性，注意到第 j $(1 \leqslant j < i)$ 步后，满足 $(**)$ 的 $v \in V_1^w$ 的选取在 $T_0^w - V(T^{(j)})$ 的源集中是任意的. 因此，在多项式时间 $P_1(n)$ 能构造 $T^{(j)}$，并在 $T_0^w - V(T^{(j)})$ 的源集中选取和标号这样的 v. 因为 T_0^w 中的标号程序能与标号 $\mathcal{L}_v$ 中的相应元素联合起来，故在多项式时间 $P_2(n)$ 内能在第 $i+1$ 步找到满足 $(***)$ 的点 $v_{j+2} \in V(G)$. 因此，构造 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 需要的时间至多为 $P_0(n)+n(P_1(n)+P_2(n))$. 由于在多项式时间内也能从 $\{V_1, V_2\}$ 转成 $(G_{V_1,1})_{V_2,2}$，故在多项式时间内能找到 G 的 A- 迹.

基于 1) 得到下面的叙述：

2) 若 G 是简单平面欧拉图，给定具有 A- 性质的哈密顿圈 H，则在多项式时间内能找到 G 的 A- 迹.

用定理 6.88 证明的记号，由 1) 得出 G_1 和 G_2 的 A- 迹 T_1 和 T_2 能分别在多项式时间内找到 (其中 $G_1 \cup G_2 = G$，$G_1 \cap G_2 = H$). 因此，相应的 T_i 的 A- 划分 $\{V_1^i, V_2^i\}$ $(i = 1, 2)$ 也能在多项式时间内找到. 由于在多项式时间内能找到这 4 个顶点集

$$W_j^i := V_j^i \cap (V(G_i) - V_2(G_i)), \quad i, j \in \{1, 2\},$$

因而在多项式时间内得到 $W_j := W_j^1 \cup W_j^2$ $(j = 1, 2)$. 由于 $(G_{W_1,1})_{W_2,2}$ 能在多项式时间内得到，又由于这个图是圈 (见定理 6.88 的证明)，所以它对应于多项式时间得到的 G 的一个 A- 迹.

注意上面的讨论基于 G 的哈密顿圈 H 给定. 因此，产生一个问题：***确定给定 4- 连通可平面欧拉图是否有哈密顿圈具有 A- 性质的问题复杂性如何?*** 当然，我们在 2) 中不需要对 $\kappa(G)$ 作任何假设 (不过由于 G 是哈密顿的，故 $\kappa(G) \geqslant 2$)，但注意到猜想 6.86 及关于哈密顿圈的塔特定理 (推论 3.71)，我们将上面的问题限制到 4- 连通图. 应该注意到若 G 是平面的任何欧拉三角剖分 (不论是否 4- 连通，是否是简单)，则这个问题是 P 的. 因为在这样的 G 中，若 $e, f \in E(G)$ 关联到 $v \in V(G)$ 且 $O^+(v) = (\cdots, e(v), f(v), \cdots)$，则或者 e, f 唯一确定了一个有 A- 性质的哈密顿圈 H 满足 $e, f \in E(H)$，或者 H 根本不存在 (见练习 6.32). 因此，上面的问题也

可能有“多项式”的答案. 注意到对平面的欧拉三角剖分 D，有 A- 性质的哈密顿圈是 [SHAN75a] 中定义的一种特殊的左右路.

我们将找定理 6.77a 和定理 6.79 中图的 A- 迹的复杂性检查留给读者 (见练习 6.33). 现在考虑一般情形.

任意平面欧拉图的 A- 迹算法

我们从一个非圈的 2- 连通平面欧拉图 G_0 出发且间接地有定理 6.59 和定理 6.67. 代替考虑唯一着色面环，我们把一系列 1- 分裂与点标号程序联合起来①.

第 0 步 考虑 G_0 及使得 G_0 的外部面 F^∞ 是 1- 面的 2- 面着色. 记 $V_0^* = V(\mathrm{bd}(F_0^\infty)) - V_2(G_0)$ 且令 $x_1 \in V_0^*$ 任意选定. 置 $i = 1$.

第 1 步 构造 $G_i := (G_{i-1})_{\{x_i\},1}$. 用 F_i^∞ 记 G_i 的外部面，取 G_{i-1} 的 2- 面着色导出的 G_i 的 2- 面着色.

第 2 步 标记 $V(\mathrm{bd}(F_i^\infty))$ 的那些目前尚未标记的 G_i 的割点，并且令 V_i^* 为 $V(\mathrm{bd}(F_i^\infty)) - V_2(G_i)$ 的未标号点集.

第 3 步 若 $V_i^* \neq \varnothing$，则任选 $x_{i+1} \in V_i^*$，置 $i = i+1$ 且转到第 1 步；若 $V_i^* = \varnothing$，则继续.

第 4 步 置 $V_i^{**} = \{x \mid x \in (E(G_i) - E(\mathrm{bd}(F_i^\infty))) \cup (V(G_i) - V_2(G_i))$，若 x 是点，则它未标号 $\}$. 若 $V_i^{**} = \varnothing$，则转到第 7 步；若 $V_i^{**} \neq \varnothing$，则继续.

第 5 步 找最大整数 $j < i$，使得 $V_j^* - \{x_{j+1}\} \neq \varnothing$. 若这样的 j 不存在，则转到第 8 步；若 j 存在，则继续.

第 6 步 标记 x_{j+1} 且置 $V_j^* = V_j^* - \{x_{j+1}\}$. 置 $i = j$ 并转到第 3 步.

第 7 步 G_0 有一个 A- 迹.

第 8 步 G_0 没有 A- 迹.

实际上，这个算法不只是确定 G_0 是否有 A- 迹，因为若对 $i > 0$，$V_i^* = \varnothing = V_i^{**}$ (这是达到第 7 步的充分必要条件)，则 G_i 满足引理 6.58 的假设. 因此，走遍 $\mathrm{bd}(F_i^\infty)$ 就给出了 G_0 的一个 A- 迹 T_0. 此外，G_0 的对应于 T_0 的 A- 划分 $\{V_1^0, V_2^0\}$ 借助于算法记号可由

$$V_1^0 = \{x_1, \cdots, x_i\},$$
$$V_2^0 = \{x \in V(G) \mid x \text{ 已标号或 } x \in V_2(G_0)\}$$

定义. 注意到能很快地构造 G_i 并分别确定 V_i^*, V_i^{**}. 在第 5 步确定整数 $j < i$ 也是如此. 然而整个算法很慢. 研究第 4~6 步后这就很清楚：$V_i^* = \varnothing$，$V_i^{**} \neq \varnothing$ 意味着暂时还不能继续第 1~3 步中描述的“贪婪”算法，即出现僵局. 此时，G_i 的每个满足 $B \cap V_i^{**} \neq \varnothing$ 的块 B 定义了一个唯一着色面环 R (其元素为 2- 面)，它的全连接集是 $L_R := V(\mathrm{bd}(F_B^\infty) - V_2(B)$，其中 F_B^∞ 是 B 的无界面 (其嵌入由 G_i 的嵌入

① 对平面的欧拉三角剖分的情形，[FLEI88a] 已经概述了这个算法.

导出) 且 $\mathrm{bd}(F_B^\infty) \subset \mathrm{bd}(F_i^\infty)$. $V_i^* = \varnothing$ 意味着 $V(\mathrm{bd}(F_B^\infty)) - V_2(G_i)$ 的所有元素都已标记，因这与 $B \cap V_i^{**} \neq \varnothing$ 推出 $\mathrm{int}\ \mathrm{bd}(F_B^\infty) \cap V_i^{**} \neq \varnothing$，故存在 (至少两个) 2-面 F_2 满足 $E(\mathrm{bd}(F_2)) \cap E(\mathrm{bd}(F_B^\infty)) \neq \varnothing$，而 R 由这些 2- 面定义. 此外，还注意到 G_i 的标号点不必是 G_i 的割点 (见第 6 步). 第 5,6 步是摆脱僵局的手段. 也就是说，必须回到某个 G_j $(j < i)$ (实际上取最大的 j)，并选取 $V_j^* - \{x_{j+1}\}$ 的点 x'_{j+1}，对它用 1- 分裂得到 G'_{j+1}. 此时，x_{j+1} 成为一个标号点，并且建立 $G_{j+1}, \cdots, G_i$ 的所有算法工作都是徒劳的，即在这些图中进行的标号及分裂程序都取消了，但 x_{j+1} 从 V_j^* 到 G_j 的标记点集的切换并不说明在 G_0 的可能存在的 A- 划分 $\{V_1^0, V_2^0\}$ 中 x_{j+1} 的"最终命运". 因为在后面的阶段可能得到 $j' < j$，对 $i = j' + 1$ 继续第 1 步可能导出 V_k^* $(k > j')$. 它又含有上面的 x_{j+1}. 然而注意到只要 V_j^* 还未在第 6 步停止，x_{j+1} 就仍为一个标记点.

若 $G_0 = D$ 是平面的欧拉三角剖分，则上面算法的运作及其速度慢就变得更清楚. 因为在这种情形算法就构造连通图 D_1 (由应用到 1- 分裂的点导出) 和 D_2(由标号点导出) 使得

$$V(D_1) \cup V(D_2) = V(D), \quad V(D_1) \cap V(D_2) = \varnothing,$$

并且对 $\delta = 1, 2$，仅当 $C = \mathrm{bd}(F_\delta)$，$D_\delta$ 有圈 C，其中 F_δ 是一个 δ- 面 (见推论 6.68 和推论 6.69 和随后的讨论). 并在算法的每个阶段，由应用到 1- 分裂的点导出的图有这个性质. 我们将把这个算法转换成平面 2- 部 3- 正则图中找哈密顿圈的算法留作练习 (这是一个明显的算法).

然而，借助于猜想 6.73 和猜想 6.74 的等价性，它表述在引理 6.75 中，我们能修改上面的算法以便确定一个给定的平面欧拉图 G_0 是否有不分离 A- 迹 (练习 6.34b). 若 G_0 有这样的一个 A- 迹，则修改后的算法结果为一个连通外平面欧拉图 G_i $(i > 0)$，G_0 的 2- 面 F_2 的边界是它的块，并且使得 $\mathrm{bd}(F_2)$ 的边数多于它包含的 G_i 的割点数. 限制到平面的欧拉三角剖分 D_0 上，这意味着 D_i 的每个块至多含 D_i 的两个割点 $(*)$. 对 $i = 0$ 和 $i = 1$，叙述 $(*)$ 是平凡的，因而怀疑在修改的 A-迹算法的所有图 $D_0, D_1, \cdots, D_i$ 中 $(*)$ 仍成立. 这种 "怀疑" 引出下面更一般的猜想，它考虑平面上一个 n- 边形的简单欧拉三角剖分. 此时，$n \equiv 0 \pmod 3$ 一定成立，并且对每个这样的 n，存在这种三角剖分 (例子见 [FLEI74b] 且注意引理 6.76 是这个事实的一个推论).

猜想 6.92 设选定正整数 $n \equiv 0 \pmod 3$，并且令 D_0 为平面上一个 n- 边形的一个简单欧拉三角剖分，并有 2- 面着色使得 D_0 的外部面 F_0^∞ 是 1- 面. 那么存在不同的点 $x_k \in V(D_0) - V_2(D_0)$，使得 $D_k := (D_{k-1})_{\{x_k\},1}$ $(k = 1, \cdots, i)$，有下列性质:

a) $x_k \in V(\mathrm{bd}(F_{k-1}^\infty)) - V_2(D_{k-1})$ (F_{k-1}^∞ 为 D_{k-1} 的外部面);

b) D_k 的每个块至少含 D_k 的两个割点；

c) 若 $k=i$，则 D_k 的每个块是一个 2- 面的 (三角形) 边界.

因此，由于 b)，猜想 6.92 是猜想 6.73 的推广.

6.3.4　关于非交叉欧拉迹和 A- 迹的注记以及另一问题

正如本节开头注意到的，非交叉欧拉迹和 A- 迹原则上是不同的概念，然而对 $\Delta(G)\leqslant 4$ 的图 G，它们一致. 这两种欧拉迹间的基本区别也能拓扑地解释.

回忆一下，连通欧拉图的一个欧拉迹 T 能由一系列价大于 2 的点上的分裂运算确定，使得在这个序列的最后一次分裂运算得到的图是圈 (见推论 5.13). 另一方面，q 边的连通欧拉图 G 能看成是从一个 q- 边形 C_q 经一个同态得到，这个同态是 G 的边集与 C_q 间的双射 (见注 5.12).

将这些考虑应用到任意连通平面欧拉图 G 及 G 的一个非交叉欧拉迹 T. 用 C_T 记对应于 T 的平面圈. 此外，类似于 δ- 分裂的概念 ($\delta=1,2$)，在从 G 构造 C_T 时，我们考虑分裂程序的 k- 折应用以便从这个 $2k$- 价点 v 得到 k 个 2- 价点 $v_1,\cdots,v_k$ ($k>1$)，作为同时用 k 个 2- 价点代替 v. 注意到这个代替程序能做到使得 $v_1,\cdots,v_k$ 位于一个 (几何的) 圈 $K(v,\varepsilon)$ 上，v 为中心，ε 为半径且 $\overline{K}(v,\varepsilon)$ 不含 G，C_T 的其他点，并有 $\overline{K}(v,\varepsilon)\cap(E(G)-E_v)=\varnothing$. 由于 T 是不交的，故 C_T 为简单闭曲线. 这样 G 能看成如下从平面上正 q- 边形 C_q 得到

$$C_q \xrightarrow{\varphi} C_T \xrightarrow{\psi} G$$

其中

$$\varphi \text{ 为一个同伦形变}$$

且

$$\psi \text{ 为平面 } \mathcal{E}^2 \text{ 到自身的连续映射},$$

使得

$$\text{对 } x\in\overline{K}(v,\varepsilon) \text{ 和 } v\in V(G)-V_2(G) \text{ 有 } \psi(x)=v,$$

$$\psi:\mathcal{E}^2-\bigcup_{v\in V(G)-V_2(G)}\overline{K}(v,\epsilon)\to\mathcal{E}^2-V(G) \text{ 是双射}.$$

因为 A- 迹是非交叉欧拉迹的特殊情形，所以若 T 是 A- 迹，则上述当然为真. 然而若 T 是 A- 迹，则能假设 C_T 有附加的性质：对每个 $v\in V(G)-V_2(G)$，

存在 $\delta<\varepsilon$，*使得* $\overline{K}(v,\delta)\cap C_T=\{v_1,\cdots,v_k\}$.　　(A)

利用平面性，能用

$K(v,\varepsilon)\cap\operatorname{int}C_T$ *和* $K(v,\varepsilon)\cap\operatorname{ext}C_T$ *中恰有一个是区域*　　(A′)

替换 (A). 若考虑 G 的一个 2- 面着色 (如往常一样，F^∞ 是 1- 面) 及 C_T 的导出着色，则 $K(v,\varepsilon)\cap\operatorname{int}C_T$ 是区域当且仅当 T 在 v 点导出一个 2- 分裂.

在非交叉欧拉迹不是 A- 迹的情形下，至少有一个点 $v \in V(G) - V_2(G)$，(A′) 中定义的这两个集合都不连通.

因此，有拓扑的方法构造所有连通平面欧拉图 (与 [ABRH79a，定理 3] 比较)，也能构造这些图中有 A- 迹的图. 这样 A- 迹问题可重新解释为借助于图论参数描述这些图的各种类的问题.

注意到原则上，上述考虑能扩充到嵌入在一个 (可定向或不可定向的) 曲面 $\mathcal{F}$ 上的任意图，除了涉及 2- 面着色. 特别地，作为区分 A- 迹与其他非交叉欧拉迹的拓扑工具，性质 (A) 仍然成立. 注意 A- 迹的概念最初分别由 $O^+(v)$，$O^-(v)$ 引入，并不要 δ- 分裂的概念. 然而，对同一个 G 的不同的非交叉欧拉迹 T_1 和 T_2，圈 C_{T_1} 和 C_{T_2} 也许并不同伦.

至于连通平面欧拉有向图 D 或混合图 M 的 A- 迹，仅当 D 是规范定向的或混合图 M 是能规范定向的 (容易确定 M 是否有这样的定向，因为规范定向恰由一条给定的弧唯一确定) 时，考虑这个问题才有意义. 然而考虑规范定向有向图 D 的 A- 迹相当于考虑基图 G 中的这个问题. 因为若 G 有 A- 迹 T，则或者 T，或者 T^- 对应于 D 中一个 A- 迹，并且 D 的 A- 迹对应于 G 的一个 A- 迹. 这直接从 A- 迹与 δ- 分裂 $(\delta = 1, 2)$ 之间的关系得到. 然而研究对应于 D 的 A- 迹的 D 的那些入树也许是有意义的 (根据定理 6.33 的上下文).

另一个问题 (本章未作详述) 考虑在平面上的任意连通欧拉图 G，满足开边不含对应于 G 的顶点的点，两条开边至多在它们相互交叉的那一点相交，并且任三条开边不在同一点相交，G 的这样一个画法定义了一个 $O^+(G)$，从它通过定义 $t \in X_0(v) \leftrightarrow t = \{e'_i, e'_{k+i}\}$ $\left(1 \leqslant i \leqslant k = k_v = \dfrac{1}{2}d(v)\right)$ 得到一个特殊的转移系统 X_0，其中 $v \in V(G)$ 是任意选定的. 然而对 G 的一个唯一迹分解 S，$X_0 = X_S$，因而产生下面的问题：① 对给定的图 G，平面上是否存在 G 的一个画法，使得对 G 的一个欧拉迹 T，$X_0 = X_T$？ ② G 存在多少画法，使得它的一个欧拉迹 T 满足 $X_T = X_0$ (这里 X_0 与特殊画法有关)？ ③ G 的满足 $X_0 = X_S$ 的哪个迹分解 S 能这样得到？这些问题在 [HARB89a] 中就已提出，那里对 $G = K_{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 肯定的回答了问题①.

6.4 习 题

练习 6.1 利用分裂引理 (即不用定理 6.1) 证明推论 6.2 的 2).

练习 6.2 构造图 G 并定义满足推论 6.4 的 2) 的划分系 $P(G)$，使得 G 没有这样的 $P(G)$- 相容路/圈分解 S：S 的路元素的个数等于 G 的奇顶点数的一半.

练习 6.3 只用分裂引理证明推论 6.5 和推论 6.6.

练习 6.4 用分裂引理证明引理 6.7 和引理 6.8.

练习 6.5 证明推论 6.9 和推论 6.10.

练习 6.6 证明图 6.2 的有向图没有 X- 相容欧拉迹.

练习 6.7 证明推论 6.13 (提示: 首先证明对满足 $d_D(v)>6$ 的 v, 若 $|X^*(v)|=\frac{1}{2}d_D(v)+1$, 则存在 $C_i\in X^*(v)$ $(i=1,2,3)$, 满足 $|C_i|=2$ 且 $(A_v^*)^+\not\supset\bigcup\limits_{i=1}^{3}C_i\not\subset(A_v^*)^-$. 然后用类似于证明定理 6.11 应用分裂引理).

练习 6.8 证明图 6.4 的 D_1 有一个 $X(D_1)$- 相容欧拉迹当且仅当 D 有一个 $X(D)$- 相容欧拉迹, 其中 $X(D)$ 给定且 $X(D_1)=X(D)\cup X(s_1)\cup X(s_2)$.

练习 6.9 a) 构造具有下面性质的连通欧拉有向图 D: $V(D)$ 由 4- 价点及奇数个 6- 价点构成; b) 取 a) 中描述的两个图, 由此构造一个欧拉有向图满足具有偶数条弧和一个 4- 价割点.

练习 6.10 证明推论 6.19.

练习 6.11 证明引理 6.27 和引理 6.28. 确定这样的图 G, G 的顶点的价为 4 的倍数且这两个引理对 G 也成立.

练习 6.12 证明图 6.7 的有向图 D^* 的子有向图 D_1 和 $D_1'=D^*-D_0'$ 满足定理 6.35 的叙述 4)a), 而叙述 4)b) 仅对 D_1' 成立.

练习 6.13 证明推论 6.43.

练习 6.14 构造一个 4- 正则简单有向图, 使得它有两个但没有三个两两相容的欧拉迹 (提示: 类似于图 6.14 的讨论).

练习 6.15 证明引理 6.58.

练习 6.16 证明若 G 满足引理 6.58 的假设, 则存在一个连通的外平面简单图 H, H 有同胚于 G 的子图 H', 使得 H 没有 A- 迹. 若去掉条件"简单的", 则可以构造 H, 使得 H' 支撑 H.

练习 6.17 构造一个没有 A- 迹的 2- 连通外平面欧拉图.

练习 6.18 a) 找出图 6.28 中图 G_0^T 的一个 A- 迹; b) 证明若 G_0^T 的外部面在 G_0^T 的 2- 面着色中是 1- 面, 则 G_0^T 没有 A- 迹在 v_1 导出一个 1- 分裂; c) 找 G_0 及 G_0^T 的基图的其他平面嵌入使它有 A- 迹.

练习 6.19 证明引理 6.65, 并举例说明该引理的逆不成立.

练习 6.20 证明图 6.26 的平面图 G_0 (它没有 A- 迹) 有一个点划分 $\{V_1,V_2\}$, 使得 $\langle V_\delta\rangle$ $(\delta=1,2)$ 是无圈的.

练习 6.21 证明图 6.30(a) 的图是最小的可平面 2- 连通 3- 正则 2- 部非哈密顿图, 并且它是唯一确定的.

练习 6.22 证明以下命题等价.

(1) 每个平面 3- 连通 3- 正则 2- 部图有哈密顿圈 (BTC);

(2) 每个平面 3- 连通 3- 正则 2- 部图有一个控制圈.

练习 6.23 a) 证明若 $G_3(D)$ 是平面 2- 部 3- 连通 3- 正则图 (平面的简单欧拉三角剖分), 其面界为 4-,6- 或 8- 边形 (其顶点是 4-,6- 或 8- 价). 若 $G_3(D)$ 没有 8- 边形面边界 (8-

价点), 则 $G_3(D)$ 恰有 6 个 4- 边形面边界 (4- 价点); 若 $G_3(D)$ 恰有一个 8- 边形面边界 (8- 价点), 则 $G_3(D)$ 恰有 7 个 4- 边形面边界 (4- 价点). b) 构造仅有 4-,6- 或 8- 价点的平面的欧拉三角剖分, 使得它恰有一个 8- 价点 v 且 v 不邻接到任何 4- 价点.

练习 6.24 a) 证明推论 6.81. b) 从 8- 边形开始, 用一系列弱 W_4- 扩充构造一个平面的欧拉三角剖分 D, 使得 D 恰有一对相邻的 4- 价点.

练习 6.25 将猜想 6.82 转述成 3- 正则图的理论以得到猜想 6.72 的更强的 (但等价的) 形式.

练习 6.26 证明引理 6.84.

练习 6.27 证明若 G_3 是连通 3- 正则图且有仅由 4- 边形构成的 2- 因子 Q_4, 则 G_3 有哈密顿圈 $H \supset E(G_3) - Q_4$ (提示: 用推论 6.6 并压平 Q_4 中的或含对角线或含 2 重边的那些 4- 边形).

练习 6.28 证明图 6.38 中的图有 A- 迹.

练习 6.29 证明定理 6.90.

练习 6.30 证明只要对相应的 4- 连通图证明猜想 6.73 (提示: 应用命题 6.83).

练习 6.31 a) 关于找 2- 连通外平面简单图的 A- 迹, 写出算法的细节 (特别地, 证明性质 (*) 和 (***) 成立). b) 详细检查这个算法的复杂性 (对 $i = 0, 1, 2$, $P_i(n)$ 是多大?).

练习 6.32 证明 a) 若 G 是一个平面的 (欧拉) 三角剖分, 并且 $e, f \in E(G)$ 在 G 的一个面边界中相邻, 则 G 中至多存在一个哈密顿圈 H 具有 A- 性质且 $e, f \in E(H)$, 并且在线性时间内能确定这个 H 是否存在 (注意 G 已嵌入在这个平面中). b) 利用 a) 证明判定平面的 (欧拉) 三角剖分的具有 A- 性质的哈密顿圈的存在性问题是 P- 问题.

练习 6.33 研究找 D 中 A- 迹的复杂性, 其中 D 是如定理 6.77a 和定理 6.79 中所描述的平面的欧拉三角剖分.

练习 6.34 a) 对任意平面欧拉图将 A- 迹算法转译成在平面 3- 正则 2- 部图中找具有定理 6.90 中表述的性质的哈密顿圈或塔特圈的算法 (提示: 用引理 6.75, 定理 6.90 以及它们各自的证明). b) 修改这个 A- 迹算法使得它判定一个给定的连通平面欧拉图是否有非交叉 A- 迹.

第 7 章　欧拉迹的变换

第 6 章研究了任意欧拉无向和有向图以及一些欧拉图类中的各种类型的欧拉迹，我们将要考虑在一个固定的欧拉图 G 中的所有欧拉迹. 有没有一种方法把 G 中的一条欧拉迹 T_1 变换成 G 中的另一条欧拉迹 T_2? 为此，我们必须首先说明在什么条件下，T_1 和 T_2 被认为是不同的.

定义 7.1　在一个连通的欧拉 (有向) 图中的两条欧拉迹 T_1 和 T_2，只要 $X_{T_1} \neq X_{T_2}$，它们就是不同的.

换句话说，对于 G 中的一条欧拉迹 T，通过将 T 的边序列反向或旋转所得到的欧拉迹 T'，则 T 和 T' 就被认为是相等的. 于是定义 7.1 是与大多数人区别欧拉迹方法相一致的. 同时，定义 7.1 也来自于推论 5.10.

当然，在有向图 D 的情形下，通过将一条欧拉迹 T 的弧序列反向而得到另一条欧拉迹是无意义的. 因为从 w 到 v 通过一条弧 (v, w) 在一条欧拉迹中是不允许的.

然而，在此，我们必须提及的是还有其他区别两条欧拉迹的方法. 例如，塔特认为，如果表示 T 和 T' 的边序列 (和/或弧序列) 不同，那么 T 和 T' 就是不同的. 更准确地说，如果 T 和 T' 开始于不同的节点，或者对于某个 $i \in \{1, 2, \cdots, q\}$，$T$ 所经过的第 i 个边 (弧) 与 T' 所经过的第 i 个边 (弧) 不同，那么 $T \neq T'$. 比较这一观点和定义 7.1，就会看到这个定义蕴涵了一个 (有向) 图的欧拉迹集合上的一个等价关系. 每一个等价类包括恰好 $2q$ 个欧拉迹，它们定义了同样的转移系统，并且在塔特的考虑下是不同的. 然而就本书而言，塔特区分一个图中欧拉迹的方法除了上述因子 $2q$ 外没有本质冲击. 然而，在有向图情形下，塔特的区分法却是间接相关的. 还存在另一种区分一个 (有向) 图中欧拉迹的方法. 假设一个 (有向) 图 H 的边 (弧) 有一个预先给定的标号 $f_1, f_2, \cdots, f_q$, H 中的一个欧拉迹 T 表示成边 (弧) 的序列

$$T = f_{\pi(1)}, f_{\pi(2)}, \cdots, f_{\pi(q)},$$

就定义了 $\{1, 2, \cdots, q\}$ 的元素的一个置换 π. H 的欧拉迹 T_1 和 T_2 被认为是不同的当且仅当所对应的置换 T_1 和 T_2 是不同的. 这一种区别欧拉迹的方法与塔特的观点是一样的，它将在保证有向图中欧拉迹的奇偶性结果中起到实质的作用. 这一结果转而产生了在线性代数中的一个有意思的应用.

7.1 图中任意欧拉迹的变换

设 G 是一个不同于圈的连通的欧拉图. 考虑 G 中由一个欧拉迹 T 所定义的转移系统 X_T. 对于任意 $v \in V(G) - V_2(G) \neq \varnothing$，任意选择 $t_1, t_2 \in X(v) \subseteq X_T$. 记 $t_1 = \{f_1', g_1'\}$，$t_2 = \{f_2', f_3'\}$. 设 H 是一个由 G 通过把对应于 $X_T - \{t_1, t_2\}$ 的元素的那些边对分裂开所得到的欧拉连通图. 因此，$d_H(v) = 4$，$V_2(H) = V(H) - \{v\}$. 此外，T 对应于 H 的一条欧拉迹 T_1，使得 $t_1, t_2 \in X_{T_1}$. 现在从 H 的结构中可推出 f_1'，f_2'，f_3' 不能是 H 的同一个块中的半边. 因此，分裂引理推出 $H_{1,2}$ 或 $H_{1,3}$ 连通. 不妨设 $H_{1,2}$ 连通，则有 $V_2(H_{1,2}) = V(H_{1,2})$，也就是说，$H_{1,2}$ 是一个圈. 于是经过 $H_{1,2}$ 的一个路径描述了一条 H 中的欧拉迹 T_2，从构造和定义 7.1 知，$T_1 \neq T_2$. 进一步，T_2 对应于 G 中一个不等于 T 的欧拉迹 T'，它的对应的转移系统 $X' := X_{T'}$ 满足等式

$$X' = (X_T - \{t_1, t_2\}) \cup \{t_1', t_2'\}, \tag{1}$$

其中 $t_1' := \{f_1', f_2'\}$，$t_2' := \{f_3', g_1'\}$. 总结这些分析，我们得出下面的结果 (另见 [KOTZ68c，定理 1] 和 [ABRH80a，引理 1]).

引理 7.2 设 T 是连通欧拉图 G 的一条欧拉迹，其中 $V(G) - V_2(G) \neq \varnothing$，$t_1$ 和 t_2 是 T 在一个价大于 2 的节点上的两个不同的转移，那么就有 G 中的一条欧拉迹，它的转移与 T 的除了对于 t_1 和 t_2 之外的那些转移相一致.

通过利用欧拉迹的边序列表示，我们将以上内容等价地重新解释一下. 把欧拉迹 T 和 T' 表示为

$$\begin{aligned} T &= e_1, \cdots, e_{m-1}, S_{m,n}, e_{n+1}, \cdots, e_q, \\ T' &= e_1, \cdots, e_{m-1}, S_{m,n}^{-1}, e_{n+1}, \cdots, e_q, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$. $S_{m,n}$ 是一个起于 e_m，终于 e_n 的一条闭迹，e_m 与 e_n 的同一个点 $v \in V(G) - V_2(G)$，同时 $e_{m-1} = f_1$，$e_m = g_1$，$e_n = f_2$，$e_{n+1} = f_3$. 于是 (1) 和 (2) 描述了相同的情形. 依据 [ABRH80a，SKIL83a](另见 [KOTZ68c]，这正是本章的起点)，导出了以下内容，我们保留到目前为止所给出的记号:

定义 7.3 设 T 和 T' 是连通欧拉图 G 的两条欧拉迹，$v \in V(G) - V_2(G) \neq \varnothing$. 如果相应的转移系统 X_T 和 X' 分别满足 (1)，我们说 X' (T') 是从 X_T (T) 通过将 t_1 和 t_2 变换为 t_1' 和 t_2' 而给定的一个 κ-**变换**所得到的; 我们也可类似地说，T' 是从 T 经过将起终于同一个节点 v (见 (2)) 的**片断 $S_{m,n}$ 反向**(或简称为**片断反向**)而得到的.

我们注意到一个 κ- 变换的逆运算也是一个 κ- 变换. 这一点可从 (1)，也可从 (2)，由 $(S_{m,n}^{-1})^{-1} = S_{m,n}$ 得出. 假如我们扩展 (1) 的有效性到 $\{t_1, t_2\} = \{t_1', t_2'\}$ (即

$T' = T$)，那么定义 7.3 就可把恒等变换 (即 $X_T = X'$) 看成一个 κ- 变换. 为简单起见，如果 T' 是从 T 经过一个 κ- 对换得到的，我们就写成 $\kappa(T) = T'$①.

定义 7.4 $\mathcal{T}(G)$ 表示连通欧拉图 G **的所有欧拉迹的集合**. 对 $T, T' \in \mathcal{T}(G)$，如果对某个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $T_0, T_1, \cdots, T_n \in \mathcal{T}(G)$，使得

$$T = T_0, \quad T' = T_n \quad 和 \quad T_i = \kappa(T_{i-1}),\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,$$

我们就称 T 和 T' 是 **κ-相关的**②. 于是如果 $T, T', T'' \in \mathcal{T}(G)$ 满足 $\kappa(T) = T'$ 且 T' 和 T'' 是 κ- 相关的，那么 T 和 T'' 是 κ- 相关的.

根据定义 7.4 和在它之前的讨论，我们能够得出这样的结论：κ- 相关性定义了 $\mathcal{T}(G)$ 上的一个等价关系. 也就是说，$\mathcal{T}(G)$ 有一个划分 $\mathcal{P}(G, \kappa)$，它的类是在这一关系下的等价类. 由此引出了 $\mathcal{P}(G, \kappa)$ 中类的数目的问题. 下面的定理给出了这一问题的回答.

定理 7.5 对于任何连通欧拉图 G，$|\mathcal{P}(G, \kappa)| = 1$.

证明 如果 G 是一个圈，由定义 7.1 即得 $|\mathcal{T}(G)| = 1$. 因为 $T = \kappa(T)$，以及 κ- 变换是一个恒等变换，所以定理在 $\mathcal{T}(G) = \{T\}$ 的情况下成立. 于是可假设 $V(G) - V_2(G) \neq \varnothing$，根据引理 7.2 得 $|\mathcal{T}(G)| > 1$.

假设 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(G)$ 且它们不是 κ- 相关的. 定义 $X_1 := X_{T_1}, X_2 := X_{T_2}$，并选择这样的 T_1 和 T_2，使得 $|X_1 \cap X_2|$ 尽可能大. 接下来考虑 $v \in V(G) - V_2(G)$ 满足 $X_1(v) \neq X_2(v)$，其中 $X_i(v) \subseteq X_i$ $(i = 1, 2)$ 且 $X_i(v)$ 是 T_i 在 v 点导出的转移集合. 因为 $T_1 \neq T_2$，这样的点 v 一定存在. 由于 $d(v) = 2k > 2$，根据 v 的选择得到 $x_{1,2}(v) := |X_1(v) \cap X_2(v)| \leqslant k - 2$ (注意到从 $x_{1,2}(v) = k - 1$ 能得到 $x_{1,2}(v) = k$，而根据 v 的选取，这是不可能的).

记 $r := k - x_{1,2}(v) \geqslant 2$. 因此，有 r 个 $X_1(v)$ 中的转移不在 X_2 中，反之亦然. 我们用下列形式记这些转移：

$$\{e_1', f_1'\}, \cdots, \{e_r', f_r'\} \in X_1(v) - X_2(v),$$

$$\{e_1', f_{i_1}'\}, \cdots, \{e_r', f_{i_r}'\} \in X_2(v) - X_1(v),$$

其中

$$\{i_1, \cdots, i_r\} = \{1, \cdots, r\} \quad 且\ i_j \neq j, 1 \leqslant j \leqslant r,$$

所以对 $\{e_1', f_1'\} \in X_1(v) - X_2(v)$，存在两个不同的转移 $\{e_1', f_m'\}, \{e_n', f_1'\} \in X_2(v) - X_1(v)$，其中 $m = i_1$ 和 $1 = i_n$，$1 \leqslant m, n \leqslant r$③. 记

---

① 因为这一形式的等式不能分辨出 T' 是由 T 通过哪一个 κ- 变换而得到的，就会对不同的 κ- 变换有 $\kappa(T) = T'$，$\kappa(T) = T''$ 和 $T' \neq T''$ 的可能.

② "κ- 相关" 在 [SKIL83a] 中也称为 "相关".

③ 这 $2r$ 个转移对应到 K_{2r} 中的 2- 因子 Q，其中 $V(K_{2r}) = \{e_j', f_{i_j}' | j = 1, \cdots, r\}, E(\kappa_{2r})$ 由所有可能的转移组成. 由这 $2r$ 个转移的定义可得 Q 仅由偶圈组成 (也可参见猜想 6.36 之后和定理 6.37 之前的讨论). 因此，我们已经能更详尽地论及下标 $i_j (j = 1, \cdots, r)$ 的选取. 这稍后再给出.

$$t_{1,1} := \{e'_1, f'_1\}, \quad t_{1,2} := \{e'_n, f'_n\},$$

$$t_{2,1} := \{e'_1, f'_m\}, \quad t_{2,2} := \{e'_n, f'_1\},$$

对 $T = T_1$ 和 $t_s = t_{1,s}$ $(s = 1,2)$ 应用引理 7.2，存在 $T_3 \in \mathcal{T}(G)$ 满足 $\kappa(T_1) = T_3$，$X_3 := X_{T_3} \supset X_1 - \{t_{1,1}, t_{1,2}\}$. 因此有

$$X_3 = (X_1 - \{t_{1,1}, t_{1,2}\}) \cup \{\{e'_1, f'_n\}, \{e'_n, f'_1\}\}$$

或

$$X_3 = (X_1 - \{t_{1,1}, t_{1,2}\}) \cup \{\{e'_1, e'_n\}, \{f'_1, f'_n\}\} . \tag{3}$$

类似于 $x_{1,2}(v)$，定义 $x_{3,2}(v)$，并观察

$$(X_1 - \{t_{1,1}, t_{1,2}\}) \cap X_2 = X_1 \cap X_2.$$

从 $X_3 \supset X_1 - \{t_{1,1}, t_{1,2}\}$ 我们推得在第一种情形，$x_{3,2}(v) > x_{1,2}(v)$. 因此，$|X_3 \cap X_2| > |X_1 \cap X_2|$. 由 T_1 和 T_2 的选取可知，T_3 和 T_2 是 κ- 相关的. 这与 $\kappa(T_1) = T_3$ 推出 T_1 和 T_2 是 κ- 相关的，与 T_1 和 T_2 的选取矛盾. 因此，X_3 满足方程 (3).

对 $T = T_2$ 和 $t_s = t_{2,s}(s = 1,2)$，应用引理 7.2，利用对称的讨论，我们得到存在

$$T_4 \in \mathcal{T}(G) \text{ 满足 } \kappa(T_2) = T_4, X_4 \supset X_2 - \{t_{2,1}, t_{2,2}\}$$

并且 X_4 一定满足方程

$$X_4 = (X_2 - \{t_{2,1}, t_{2,2}\}) \cup \{\{e'_1, e'_n\}, \{f'_1, f'_m\}\} . \tag{4}$$

比较方程 (3) 和 (4) 得到

$$|X_3 \cap X_4| = |X_1 \cap X_2| + 1 + \delta_{m,n},$$

其中 $\delta_{m,n}$ 为克罗内克数. 由 T_1 和 T_2 的选取得到 T_3 和 T_4 是 κ- 相关的. 然而，由此和方程 $\kappa(T_1) = T_3$，$\kappa(T_2) = T_4$ 得到 T_1 和 T_2 是 κ- 相关的. 这个最后的矛盾使定理得证.

上述证明不同于 [ABRH80a，定理] 和 [SKIL83a，定理 1].

我们已经知道，对任意一个有 $2k > 0$ 个奇点的连通图 G 都存在一种分解 $\mathcal{S}$，将 G 分解成 k 条开的迹，使得 G 的每个奇点恰好在 $\mathcal{S}$ 中的一条迹的端点上出现一次 (见推论 5.2). 我们试图用下面的方法推广定理 7.5: 加入一个新的节点 $v_0 \notin V(G)$，将 v_0 与 G 中每个奇点连一条边，得到一个连通的欧拉图 H. 如上所述的 G 的分解 $\mathcal{S}$ 中的每条迹都可以扩展到 H 的一条欧拉迹. 如果记 $\mathcal{S} = \{T(u_i, v_i)|i = 1, \cdots, k\}$，其中 $T(u_i, v_i)$ 代表 $\mathcal{S}$ 中连接奇点 $u_i, v_i \in V(G)$ 的元素，

$$\begin{aligned} T_H := &T(u_1, v_1), v_1v_0, v_0, v_0u_2, T(u_2, v_2), v_2v_0, v_0, \cdots, \\ &\cdots, v_0u_i, T(u_i, v_i), v_iv_0, \cdots, T(u_k, v_k), v_ku_0, v_0, v_0u_1 \end{aligned}$$

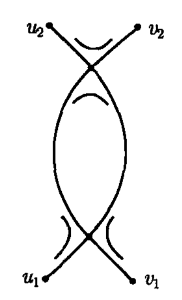


图 7.1　$E(G)$ 的一个分解 S_1，将 $E(G)$ 分解成两个开迹 $T(u_1,v_1)$ 和 $T(u_2,v_2)$，其中 X_{S_1} 元素用小弧标出. S_1 不能通过片断反向变换成 $E(G)$ 的一个路分解 $S_2 := \{P(u_1,u_2), P(v_1,v_2)\}$

是 H 的一条欧拉迹. 事实上，如果 $k>1$，则由 $E(G)$ 的同一种分解 S 可得到多于一条这样的迹 T_H，进而由 H 的每条欧拉迹 T_H 可得到一种将 $E(G)$ 分解成若干开迹的分解 S. 因此，由定理 7.5，$E(G)$ 的任意两个这样的分解 S_1，S_2 可以通过对对应的 H 的两条欧拉迹 T_1，T_2 进行一系列的 κ- 变换，使得 S_1 与 S_2 相互转换. 利用片断反向来解释这些 κ- 变换，并注意到一个片断可以起始并结束于同一点 $v_0 \notin V(G)$，通常我们不能立即推断出仅仅通过一系列 G 中的片断反向 (κ- 变换) 使得 S_1 和 S_2 相互转换. 图 7.1 说明了这一事实. 当然，我们可以通过限制 H 中不包含元素 E_{v_0} 的片断 (和/或限制 κ- 变换到 $X_{S_1} - X_{S_1}(v_0)$ 的元素) 来拓广任意图 G 的片断反向 (κ- 变换) 的定义.

然而，若 $k=1$ (即若 G 包含一条开覆盖迹)，任意两条这样的迹通过一系列片断反向可以相互转换. 为了看到这一点，首先如上述方法从 G 得到 H，记 $\{u,v\} = N_H(v_0)$. 精确地讲，因为 v_0 是 H 中的 2 次点，可以定义一种对应关系

$$T_H \in \mathcal{T}(H) \to \mathcal{T}_G^0 \in \mathcal{T}_0(G),$$

其中 $\mathcal{T}_0(G)$ 是连接 G 中奇点 u，v 并覆盖 G 的所有开迹的集合. $\mathcal{T}_H$ 可用边序列来定义

$$T_H = v_0u, \mathcal{T}_G^0, vv_0\ .$$

由定义 7.1，不失一般性，我们可以设 $\mathcal{T}(H)$ 中元素可以写成起终于 v_0 点. 因此，上述 $\mathcal{T}(H)$ 与 $\mathcal{T}_G^0$ 之间的对应关系可看成作为 $\mathcal{T}(H)$ 与 $\mathcal{T}_0(G)$ 之间双映射变换.

其次，考虑满足 $\kappa(T) = T'$ 的两条迹 $T, T^1 \in \mathcal{T}(H)$. 假设 G 是一个不同于路的连通图，于是我们可考虑

$$x \in V(H) - V_2(H) = V(G) - (V_2(G) \cup V_1(G)) \neq \varnothing.$$

这里可将 T 写成一个边序列的形式:

$$T = S_{1,m-1}, S_{m,q},\quad 2 \leqslant m \leqslant q, \tag{$*$}$$

其中 $S_{1,m-1}$ 和 $S_{m,q}$ 都是起终于点 x 的两个片断，所以 T 也起终于 x 点. 进一步，$m=2$ ($m=q$) 当且仅当 T 的第一 (最后一) 条边是一个环. 接下来假设 $T \neq T'$，既然 $\kappa(T) = T'$，那么 T' 是由将 T 中起终于点 $y \in V(H) - V_2(H)$ 的片断 $S_{r,s}$ 反向所得到的迹. 由于式 ($*$) 和定义 7.1，不失一般性，我们可假设 $y = x, r = 1, S = m-1$，所以

$$T' = S_{1,m-1}^{-1}, S_{m,q}. \tag{**}$$

利用 (1) 和 (2) 的记号，我们得到

$$t_1 = \{e'_1, e'_q\}, \quad t_2 = \{e'_{m-1}, e'_m\},$$

$$t'_1 = \{e'_1, e'_m\}, \quad t'_2 = \{e'_{m-1}, e'_q\}. \tag{***}$$

然而，对于

$$T'' = S_{1,m-1}, S_{m,q}^{-1},$$

所对应的转移系统 X'' 也同样满足 (1)，其中 t_1, t_2, t'_1, t'_2 是式 $(***)$ 中的转移，因而有

$$X'' = X', \quad 即\ T'' = T'.$$

也就是说，T' 可以通过将 T 中的片断 $S_{m,q}$ 反向得到，而不是 $S_{1,m-1}$ 的反向. 换句话讲，若 $k(T) = T'$ 且 $T \neq T'$，那么 T' 可以通过将 T 中的不包含某一确定边的片断反向而得到 (见 [SKIL83a, 引理 1]). 将此推广为到任意两条 κ- 相关的迹 $T, T' \in \mathcal{T}(H)$，我们可以说 T' 可通过将 T 中不包含 $E(H) - E(G)$ 中边的一系列片断反向得到. 这及定理 7.5 与下述结论等价 ([SKIL83a, 定理 2])，它作为前面的讨论的小结.

推论 7.6 若 G 是一个连通图，恰好有两个奇点，对于任意两条迹 $T_1^0, T_2^0 \in \mathcal{T}_0(G)$，则 T_1^0 与 T_2^0 是 κ- 相关的 (即它们可以通过一系列片断反向相互变换得到).

再关注一下一般情形 (这里 G 有 $2k > 2$ 个奇点)，考虑定理 7.5 之后的讨论，并不清楚如何处理 $\mathcal{S}(G)$ 的分类问题，其中 $\mathcal{S}(G)$ 是将 $E(G)$ 分解成 k 条开迹的所有分解方法 S 的集合. 是否如 $k = 0$ (定理 7.5) 和 $k = 1$ 情形 (推论 7.6) 中进行的一样，仅仅考虑片断反向或者将 H 欧拉迹的某些片断也同样进行片断反向? 到目前为止的讨论指示我们如 $k = 0, 1$ 的情况仅考虑片断反向，因而我们面临的问题是 (也可见图 7.1 的讨论): 若 G 是一个连通图，恰好有 $2k > 2$ 个奇点，则 $|\mathcal{P}(G,k)|$ 会有多大呢? 这里，$\mathcal{P}(G,K)$ 是由等价关系 "κ- 相关" 导出的 $\mathcal{S}(G)$ 的一个划分，只要认为开迹 $T(u,v)$ 与它的逆 $T^{-1}(u,v)$ 是相同的一条开迹 (见定义 7.1). $|\mathcal{P}(G,K)|$ 是否是仅与 k 有关的一个函数 $f(k)$ 呢? 或许 $f(k) = k$? 依我看，这些问题都值得回答，但似乎还没有人去做.

7.2 特殊的欧拉迹的变换

撇开一般情形，我们讨论特殊的欧拉迹的变换. 在连通欧拉图的一种特殊类型的所有欧拉迹的集合 $\mathcal{T}^*$，试问其中的两条欧拉迹是否 κ- 相关呢? 确切地讲，对任

意选取的 $T, T' \in \mathcal{T}^*$，是否可以找到一系列 $T_1, \cdots, T_n \in \mathcal{T}^*$，使得 $T_1 = T, T_n = T'$ 且 $\kappa(T_i) = T_{i+1} (i = 1, \cdots, n-1)$?

首先回到概念的兼容性, 我们马上面临着一些失望. 如果 G 是一个连通欧拉图，X 是 G 的一个转移系统，并有欧拉迹 T 和 T' 与 X 相容. 一般情形下，G 未必包含与 X 相容的欧拉迹 $T_1, \cdots, T_n$，并满足

$$T = T_1, \quad T' = T_n \quad 和 \quad T_{i+1} = \kappa(T_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

这可从图 7.2 看出. 这里我们考虑 $K_{2,4}$ 和转移系统 X 的两种可能性. 在第一种情况中 (图 7.2(a))，对将 $K_{2,4}$ 进行圈分解成两个 4 圈，$X' = X_S$，在第二种情况中 (图 7.2.(b))，对 $K_{2,4}$ 的某一欧拉迹 T_0 有 $X'' = X_{T_0}$. 欧拉迹 $T = 1,5,7,3,4,8,6,2$ 与 X' 和 X'' 都相容. 在第一种情况下，选择 $T' = 1,5,6,2,4,8,7,3$，在第二种情况下，选择 $T'' = 1,5,6,2,3,7,8,4$ (注意 T'' 是由 T' 将片断 4,8,7,3 反向得到). 一方面，可直接看出，T 不能由仅仅包含 X'- 相容的欧拉迹的一列 κ- 变换得到 T'; 另一方面，T 能由仅仅包含 X''- 相容的欧拉迹的一列 κ- 变换得到 T'' (图 7.2 和练习 7.1).

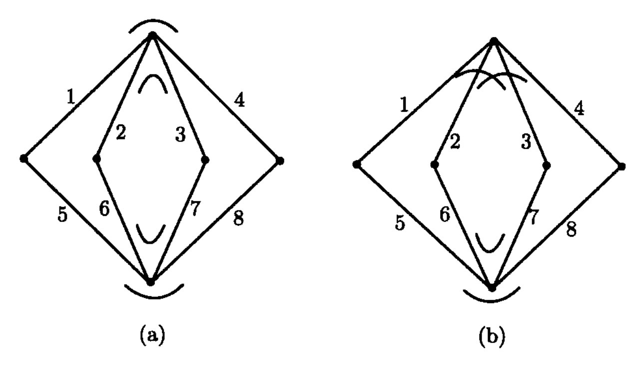


图 7.2　(a) 中所示 $K_{2,4}$ 和一个转移系统 $X' = X_S$; (b) 中所示 $K_{2,4}$ 和另一个转移系统 $X'' = X_{T_0}$，对 $T = 1,5,7,3,4,8,6,2, T' = 1,5,6,2,4,8,7,3$ 和 $T'' = 1,5,6,2,3,7,8,4$ 有 $X_T \cap X' = X_T \cap X'' = X_{T'} \cap X' = X_{T''} \cap X'' = \varnothing$，但对任一个满足 $\kappa(T) = T_2 \neq T$ 的欧拉迹 T_2 有 $X' \cap X_{T_2} \neq \varnothing$, $T_2 = 1,5,7,3,2,6,8,4$ 满足 $X_{T_2} \cap X'' = \varnothing$，$\kappa(T) = T_2$，$\kappa(T_2) = T''$

从定理 7.5 的证明可以得到这一现象的理论背景，即很可能欧拉迹 T_3 和 T_4 分别满足 (3) 和 (4), $\{e'_1, e'_n\} \in X$，其中 X 是特定的转移系统，所以 T_3 和 T_4 与 X 都不相容, 这正如图 7.2(a) 出现的情况. 然而，问题是这一问题更依赖于 X 的特殊结构，还是 G 的结构，或者 κ- 变换的概念呢? 如果我们将 κ- 变换作适当的推广，这一问题就不再出现了. 对 7.2 节开始就提出的问题，对于相容的概念，我们立即就有办法给出肯定的回答.

若 T 是一连通欧拉图 G 的欧拉迹，$V(G) - V_2(G) \neq \varnothing$. 并设 X_T 是对应到 T

的转移系统. 对某一个 $v \in V(G) - V_2(G)$，选择 $t_1 = \{f_1', g_1'\}, t_2 = \{f_2', g_2'\} \in X_T(v)$，并定义

$$X' := (X_T - \{t_1, t_2\}) \cup \{t_1', t_2'\}, \tag{1'}$$

$$t_1 \cup t_2 = t_1' \cup t_2', \quad \text{其中 } t_1', t_2' \in X'(v)$$

且

$$X' \text{ 不是一条欧拉迹的转移系统 .}$$

于是得到 X' 是对应到 $E(G)$ 的一个迹分解 S' 且 $|S'| = 2$ 的转移系统. 从 X' 的定义得到 $|S'| \geqslant 2$. 如果我们根据 (1) 之前的讨论从 G 构造 H，其中 $V_2(H) = V(H) - \{v\}$ 且 $E_v^* = t_1' \cup t_2'$，从 t_1' 和 t_2' 处将 v 分裂为两个 2- 次点, 得到 2- 正则图 H'，H' 恰好有两个分支. 然而，H' 只是相对应于 X' 的 2- 正则分拆.

反之，假设 G 有一个迹分解 $S' = \{T_1', T_2'\}$ 且 $|S' = 2|$. 记 $X' = X_{S'}$ 和 $X_i' := X'|_{T_i'} (i = 1, 2)$. 选取 $v \in V(G)$ 满足 $E_v \cap T_i' \neq \varnothing (i = 1, 2)$ (S' 的存在性保证了 $v \in V(G) - V_2(G)$ 的存在)，再任意选取 $t_i' \in X_i'(v) (i = 1, 2)$. 定义一对转移 t_1, t_2:

$$|t_j \cup t_i'| = 1, \quad i, j = 1, 2 \text{ 且} t_1 \cup t_2 = \varnothing, \tag{*}$$

那么

$$X_T := (X' - \{t_1', t_2'\}) \cup \{t_1, t_2\}, \tag{1''}$$

其中 $t_1, t_2 \in X_T(v)$，这样定义了一条 G 的欧拉迹 T. 这从式 (*) 和 (1') 之后的讨论得到，并反过来对从 X_T 到 X' (和/或从 X' 到 X_T) 的变换分类为可逆算子，正如 (1') 和 (1'') 所表示. 为总结这些讨论，我们引入下列术语:

定义 7.7 若 G 为一连通欧拉图，$V(G) - V_2(G) \neq \varnothing$, $T \in \mathcal{T}(G)$, S' 是 $E(G)$ 的一个迹分解，$|S'| = 2$，记 X_T 和 X' 为相应的转移系统. 如果对某 $v \in V(G) - V_2(G)$，存在 $t_1, t_2 \in X_T(v), t_1', t_2' \in X'(v)$ 满足方程 (1')，则称 X' 通过 **κ- 分拆** 从 X_T 得到; 这可描述为 $S = \kappa'(T)$. 如果相同的 X_T, S', t_i, t_i' $(i = 1, 2)$ 满足方程 (1'')，则称 X_T 能通过 **κ- 吸收** 从 X' 得到，这可表示为方程 $T = \kappa''(S')$. 如果 $E(G)$ 的一个迹分解 S' 满足 $S' = \kappa'(T)$ 和 $T' = \kappa''(S')$，则称 $T' \in \mathcal{T}(G)$ 可通过 **κ^*- 变换** 从 T 得到. 然后我们可以修改这个粗略的描述 $k^* = k''k'$ 和 $T' = k^*(T)$ (这符合方程 $T' = \kappa''(\kappa'(T))$).

注 在定义 7.7 中由 κ- 分拆的定义可得 $|S'| = 2$，进一步，应用一个 κ^*- 变换就意味着对应的 κ- 吸收可能是也可能不是应用在某一点上，而该点上已经应用相应的 κ- 分拆. 然而我们注意到, 在第 10 章，我们将在更广泛的意义上应用术语 κ- 分拆和 κ- 吸收，它由定义 7.7 导出 (仅仅是去掉定义中的 $|S'| = 2$ 要求和将 T 看成另外的迹分解).

我们可以用定义 κ- 相关的相同方法定义 κ^*- 相关 (在定义 7.4 中简单地将用 κ^* 代替 κ). 留给读者去证明 κ^*- 相关也定义了 $\mathcal{T}(G)$ 的一个等价关系 (练习 7.2)

为了得到后面的结论，必须将 κ- 相关与 κ^*- 相关相结合.

定义 7.8　G 是一个连通欧拉图，对 $T, T' \in \mathcal{T}(G)$，如果 $T' = \kappa(T)$ 或 $T' = \kappa^*(T)$，则我们称 T' 能通过 κ_1- 变换从 T 得到，简记为 $T' = \kappa_1(T)$.

我们用定义 κ- 相关 (见定义 7.4) 相同方法给出了 k_1- 相关定义，并将 "κ_1 相关也是 $\mathcal{T}(G)$ 上的等价关系" 这一命题留给读者去证. 在这种讨论的情况下，我们感兴趣的是与给定的转移系统 X 相容的欧拉迹变换，使得在这种变换中不使用任何其他的欧拉迹，因而我们最终导出下面的术语.

定义 7.9　若 G 是一个连通图，$\mathcal{T}(G, X)$ 记为与给定转移系统 $X = X(G)$ 相容的所有欧拉迹的集合. 进一步，用 $\mathcal{S}_2(G)$ 表示 G 的所有迹分解 S 的集合，其中 $|S| = 2$; $\mathcal{S}_2(G, X)$ 表示 $\mathcal{S}_2(G)$ 中与 X 相容的所有元素的集合. 称欧拉迹 T 和 T' 是κ_X**- 相关**，若存在一列迹 $T_0, \cdots, T_n \in \mathcal{T}(G, X)$ 满足对 $1 \leqslant i \leqslant n$，1) $T = T^0, T' = T_n$ 和 $T_i = k_1(T_{i-1})$; 2) 若对某些 i，$T_i = k_1(T_{i-1}) = k^*(T_{i-1})$，则

$$S_{i-1} \in \mathcal{S}_2(G) \text{ 且 } S_{i-1} = \kappa'(T_{i-1}), \kappa''(S_{i-1}) = T_i \text{ 推出 } S_{i-1} \in \mathcal{S}_2(G, X) .$$

类似地，κ_X- 相关也是 $\mathcal{T}(G, X)$ 上的一个等价关系 (见练习 7.2). 这就导出了 $\mathcal{T}(G, X)$ 的一个划分 $\mathcal{P}(G, \kappa_X)$，其元素是 κ_X- 相关的等价类. 下面的定理可以看成类似于有关与 X 相容的欧拉迹的定理 7.5.

定理 7.10　对任意的连通欧拉图 G 和任意限定的 G 的转移系统 X 都有 $|\mathcal{P}(G, \kappa_X)| = 1$.

证明　若 G 是一个圈，则利用定理 7.5 证明中相同的讨论即可证明该定理 (这种情况下有 $X = \varnothing$)，那里 $V(G) - V_2(G) \neq \varnothing$. 对于情形 $\mathcal{T}(G, X) = \{T\}$，因为能得到 $\kappa_1(T) = \kappa(T) = T$，所以这种情形是平凡的，在此情形下，$\kappa$ 是一个恒等变换. 因此，假设 $|\mathcal{T}(G, X)| > 1$ 且存在不是 κ_X- 相关的 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(G, X)$. 沿用定理 7.5 的证明并保留那里使用的记号. 我们再选择 T_1 和 T_2，使得 $|X_1 \cap X_2|$ 尽可能大，其中 X_1 和 X_2 分别是 T_1 和 T_2 对应的转移系统. 在这一条件下，选择边数 $|E(G)|$ 最少的图，则 $V_2(G) = \varnothing$. 结果得到若 e 是环，那么它的两个半边可用不同的下标区分，而不是 e'，e'' (e' 表示我们用来处理的是一条半边).

再者，一定有 $T_1 \neq T_2$ (恒等变换是 κ_1- 变换)，所以存在 $v \in V(G)$，使得 $d(v) = 2k$ 且 $x_{1,2}(v) := |X_1(v) \cap X_2(v)| \leqslant k - 2$，进而对 $r := k - x_{1,2}(v)$ 有

$$\begin{aligned} &\{e_1', f_1'\}, \cdots, \{e_r', f_r'\} \in X_1(v) - X_2(v), \\ &\{e_1', f_{i_1}'\}, \cdots, \{e_r', f_{i_r}'\} \in X_2(v) - X_1(v), \\ &\{i_1, \cdots, i_r\} = \{1, \cdots, r\} \text{ 且} i_j \neq j \text{ 对} 1 \leqslant j \leqslant r. \end{aligned} \tag{$*$}$$

由定理 7.5 证明的脚注，不失一般性，假设 $\{e'_i, f'_{i-1}\} \in X_2(v) - X_1(v)$ $(i = 1, \cdots, m)$，令 $f'_0 = f'_m$，我们得到一条推断

$$T_1, T_2 \in \mathcal{T}(G, X) \Rightarrow \{\{e'_j, f'_j\}, \{e'_j, f'_{i_j}\} \mid j = 1, \cdots, r\} \cap X = \varnothing. \tag{X}$$

因此，$n = 2$ (见定理 7.5 关于指标 n 的证明)，所以有

$$t_{1,1} = \{e'_1, f'_1\}, \quad t_{1,2} = \{e'_2, f'_2\} \in X_1(v) - X_2(v),$$

$$t_{2,1} = \{e'_1, f'_m\}, \quad t_{2,2} = \{e'_2, f'_1\} \in X_2(v) - X_1(v).$$

我们考虑 4 个转移系统 (见定理 7.5 证明中 (3),(4) 以及它们之前的方程)：

$$X'_3 := (X_1 - \{t_{1,1}, t_{1,2}\}) \cup \{\{e'_1, f'_2\}, \{e'_2, f'_1\}\},$$

$$X''_3 := (X_1 - \{t_{1,1}, t_{1,2}\}) \cup \{\{e'_1, e'_2\}, \{f'_2, f'_1\}\},$$

$$X'_4 := (X_2 - \{t_{2,1}, t_{2,2}\}) \cup \{\{e'_1, f'_1\}, \{e'_2, f'_m\}\},$$

$$X''_4 := (X_2 - \{t_{2,1}, t_{2,2}\}) \cup \{\{e'_1, e'_2\}, \{f'_1, f'_m\}\}.$$

我们观察到对 $i \in \{3, 4\}$，由这些定义得到

$$\begin{array}{l} X'_i = X_{T_i} \text{ 当且仅当 } X''_i = X_{S_i}, \\ X''_i = X_{T_i} \text{ 当且仅当 } X'_i = X_{S_i}, \end{array} \tag{**}$$

其中 $T_i \in \mathcal{T}(G)$，$S_i \in \mathcal{S}_2(G)$，进而

$$T_i \notin \mathcal{T}(G, X) \text{ 推得 } S_i \in \mathcal{S}_2(G, X)\ . \tag{***}$$

既然 $\{e'_2, f'_1\} \in X_2, \{e'_1, f'_1\} \in X_1$，我们得到

$$\begin{array}{l} \text{若对 } T_3 \in \mathcal{T}(G) \text{ 有} X'_3 = X_{T_3}, \text{则 } \{e'_1, f'_2\} \in X, \\ \text{若对 } T_4 \in \mathcal{T}(G) \text{ 有} X'_4 = X_{T_4}, \text{则} \{e'_2, f'_m\} \in X; \end{array} \tag{5}$$

否则，将如同定理 7.5 的证明一样得到矛盾.

因此，由式 (5) 和 (**)，

$$\text{只有当 } X''_i = X_{T_i}, T_i \in \mathcal{T}(G)(i = 3, 4) \text{ 时，才有 } \{e'_1, e'_2\} \in X\ . \tag{6}$$

同时，$\{e'_1, e'_2\} \in X''_i$ $(i = 3, 4)$ 和 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(G, X)$ 的选择，使得

$$X''_i = X_{T_i}(i = 3, 4) \text{ 推得 } \{T_3, T_4\} \not\subseteq \mathcal{T}(G, X); \tag{7}$$

否则，如定理 7.5 的证明一样得到矛盾.

下面我们可以考虑三种主要情形:

情形 1　假设对 $T_i, T_j \in \mathcal{T}(G)$，$X'_i = X_{T_i}$，$X''_j = X_{T_j}$. 由 (**) 得 $i \neq j$，因此，$\{i,j\} = \{3,4\}$. 不失一般性，可设 $i=3$, $j=4$. 由式 (5) 和式 (6)，$\{e'_1, f'_2\} \in X$ 推出 $m>2$ 且 $\{e'_1, e'_2\}, \{f'_1, f'_2\} \notin X$. 因为 $T_3 \notin \mathcal{T}(G,X)$，从式 (***) 得 $S_3 \in \mathcal{S}_2(G,X)$，其中 $X_{S_3} = X''_3$. 根据 T_4 是否在 $\mathcal{T}(G,X)$ 内，我们分两种情形.

子情形 1.1　若 $T_4 \in \mathcal{T}(G,X)$，记 $S_3 = \{S_e, S_f\}$ 满足 $e_1, e_2 \in E(S_e)$，因而 $f_1, f_2 \in E(S_f)$. 首先由 $m>2$ 即可得到 $X_1(v) - \{t_{1,1}; t_{1.2}\} \neq \varnothing$.

接下来考虑起始于 v 沿着 e_1 通过 T_4. 因为 $T_4 \in \mathcal{T}(G)$ 且 $\{e'_1, e'_2\} \in X_{T_4} = X''_4$，因此，只有经过 $E(G)$ 的所有元素后才能沿着 e_2 到达 v 点. 既然这不是 S_e 的情形，故一定有一个点 $w \in V(\langle S_e\rangle) \cap V(\langle S_f\rangle)$，在 w 点，转移 $\{h'_1, g'_1\} \in X''_4$ 满足 $h_1 \in E(S_e)$，$g_1 \in E(S_f)$，所以在任何情形下，都能找到 $h_2, g_2 \in E_w$ 满足 $\{h'_1, h'_2\} \in X_1(w)$，并且当 $w \neq v$ 时有 $\{g'_1, g'_2\} \in X_1(w)$，当 $w = v$ 时，记 $g'_i = f'_i$ $(i=1,2)$. 注意到 $\{f'_1, f'_2\} \in X''_3$. 在所有的情形下，由其构造及 $m>2$ 和 $\{e'_1, e'_2\} \in X''_3 \cap X''_4$ 都有 $\{\{h'_1, h'_2\}, \{g'_1, g'_2\}\} \cap X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

进而对 $\{r,s\} = \{1,2\}$，由 $\{\{h'_1, g'_r\}, \{h'_2, g'_s\}\} \cap X \neq \varnothing$ 得到 $\{\{h'_1, g'_s\}, \{h'_2, g'_r\}\} \cap X = \varnothing$，所以对某些选取的 r 和 s，这个方程是有效的，其中 $\{r,s\} = \{1,2\}$. 对某 j 和 k，$\{j,k\} = \{1,2\}$，我们可将 S_e 写成下列形式:

$$S_e = e_j, \cdots, h_1, h_2, \cdots, e_k$$

(可能有 $e_j = h_1$，或 $e_k = h_2$，但 $\{e_j, e_k\} \neq \{h_1, h_2\}$)，并且

$$S_f = g_s, \cdots, g_r$$

(注意：因为 $h_1 \in E(S_e)$ 和 $\{h'_1, h'_2\} \in X_1(w)$，则有 $h_2 \in E(S_e)$; 类似地有 $g_2 \in E(S_f)$).

因此, 我们得到

$$T_{j,k} = e_j, \cdots, h_1, S_f, h_2, \cdots, e_k\ .$$

由 $T_{j,k}$ 的结构得到 $T_{j,k} \in \mathcal{T}(G,X)$.

因此，由 $\kappa'(T_1) = S_3 \in \mathcal{S}_2(G,X)$ 和 $\kappa''(S_3) = T_{j,k} \in \mathcal{T}(G,X)$ 可得到 T_1 和 $T_{j,k}$ 是 κ_X- 相关的，进而由 $T_4 \in \mathcal{T}(G,X)$ 和 $T_4 = \kappa(T_2) = \kappa_1(T_2)$ 得到 T_2 和 T_4 也是 κ_X 相关的. 另一方面，由 $\{\{h'_1, h'_2\}, \{g'_1, g'_2\}\} \cap X_1 \cap X_2 = \varnothing$ 及 $\{e'_1, e'_2\} \in X''_4 \cap X_{T_{j,k}}$ 推得 $|X''_4 \cap X_{T_{j,k}}| > |X_1 \cap X_2|$. 从 T_1 和 T_2 的选取以及 $T_4, T_{j,k} \in \mathcal{T}(G,X)$ 得到 T_4 与 $T_{j,k}$ 是 κ_X- 相关的. 因此，我们最终可得到 T_1 和 T_2 是 κ_X- 相关的. 这一矛盾结束了子情形 1.1 的证明.

子情形 1.2　$T_4 \notin \mathcal{T}(G,X)$. 由 (***) 得 $S_4 \in \mathcal{S}_2(G,X)$，由 (**) 可得 $X_{S_4} = X'_4$，即因为 $\{e'_1, e'_2\} \notin X$，则有 $\{f'_1, f'_m\} \in X$，因而 $\{e'_2, f'_m\} \notin X$，进而沿用

子情形 1.1 中记号，我们如上定义 $S_3=\{S_e,S_f\}$ 和 $S_3^*=S_4=\{S_e^*,S_f^*\}$，其中 $e_1,f_1\in E(S_e^*)$，$e_2,f_m\in E(S_f^*)$.

然而，在此情形下，S_3^* 扮演了在子情形 1.1 下的 S_3 角色，S_e 代替了 T_4. 我们可以考虑起始于 v 沿着 e_1 通过 S_e，经过 X_1 中属于 S_e 的元素，最终经过 $E(S_e)$ 中的元素到达 v 点，e_2 是这一路径经过的最后一条边. 这一路径可以重新解释为这样的一条路径: 它起始于 $e_1\in E(S_e^*)$，终止于 $e_2\in E(S_f^*)$，经过 $E(S_e^*)$ 和 $E(S_f^*)$ 的某些元素，因而一定经过 S_e^* 到 S_f^* 的某点 $w\in V(\langle S_f^*\rangle)\cap V(\langle S_e^*\rangle)$，所以由子情形 1.1 相同方式，我们得到 $\{h_1',g_1'\}\in X_3''$. 并有 $h_1\in E(S_e^*)$, $g_1\in E(S_f^*)$，进而在所有情形下，存在 $h_2,g_2\in E_w$，使得 $\{h_1',h_2'\}\in X_2(w)$; 对 $w\neq v$ 有 $\{g_1',g_2'\in W_2(w)\}$，对 $w=v$，记 $g_1'=f_m'$，$g_2'=e_2'$ ($\{e_2',f_m'\}\in X_4'$). 因为在任何情形都有 $\{h_1,h_2\}\subset E(S_e^*)$ 和 $\{g_1,g_2\}\subset E(S_f^*)$，如同子情形 1.1，于是得到对

$$S_e^*=e_1,\cdots,h_j,h_k,\cdots,f_1,\ \text{其中}\ \{j,k\}=\{1,2\}$$

和

$$S_f^*=g_s,\cdots,g_r,\ \text{其中}\ \{s,r\}=\{1,2\},$$

$$T_{j,k}^*=e_1,\cdots,h_j,S_f^*,h_k,\cdots,f_1$$

有 $T_{j,k}^*\in\mathcal{T}(G,X)$，因为对固定的 $\{j,k\}=\{1,2\}$ 和 $\{s,r\}=\{1,2\}$ 的两种可能选取的一种有 $\{\{h_j',g_s'\},\{h_k',g_r'\}\}\cap X=\varnothing$，注意到对 s 和 r 的两种选取，S_f^* 可表示为上述形式.

在任意情形下 (注意 $m>2$)，由构造，

$$\{h_1',h_2'\}\in X_2(w)-X_1(w)\quad \text{和}\quad \{g_1',g_2'\}\notin X_1(w),$$

当

$$\{e_1',f_1'\}\in X_{T_{j,k}^*}\cap X_1-X_1\cap X_2$$

时, 因为 $X_1\cap X_2\subset X_{T_{j,k}^*}$，我们得到

$$|X_1\cap X_{T_{j,k}^*}|>|X_1\cap X_2|,$$

所以由 T_1 和 T_2 的选取知，T_1 和 $T_{j,k}^*$ 是 κ_X- 相关的, 由其构造，$T_{j,k}^*$ 和 T_2 是 κ_X- 相关的. 因此，T_1 和 T_2 κ_X- 相关. 这一矛盾证明了子情形 1.2，从而证明了情形 1. 然而，我们注意到在子情形 1.1 和子情形 1.2 中，并不一定要特别地考虑 $v=w$ 的情形以定义 $g_i=f_i$ $(i=1,2)$ 和 $g_1=f_m$，$g_2=e_2$，它表明在 $v=w$ 的情形如何通过尽可能少地改变原始 X_1 和 X_2 的元素来分别构造 $T_{j,k}$ 和 $T_{j,k}^*$.

证明情形 1 后，还剩下或者 $X_i'=X_{T_i}(i=3,4)$ 或者 $X_i''=X_{T_i}(i=3,4)$ 两种情形.

情形 2　$X_i' = X_{T_i}(i=3,4)$. 由式 (5) 得 $\{\{e_1', f_2'\}, \{e_2', f_m'\}\} \subset X$，因而 $m > 2$，进而由式 $(**)$ 得 $X_i'' = X_{S_i}$，由 $(***)$ 得 $S_i \in \mathcal{S}_2(G,X)(i=3,4)$. 沿用以前的记号，记

$$S_3 = \{S_e, S_f\}, \quad S_4 = \{S_e^*, S_f^*\},$$

其中 $\{e_1, e_2\} \subseteq E(S_e) \cap E(S_e^*), \{f_1, f_2\} \subseteq E(S_f), \{f_1, f_2\} \subseteq E(S_f^*)$.

子情形 2.1　$E(S_e) \neq E(S_e^*)$. 这一假设和 $\{e_1, e_2\} \subset E(S_e) \cap E(S_e^*)$ 推出起始于 v 沿着 e_1 通过 S_e^* 可以找到对某一 $w \in V(\langle E(S_e^*)\rangle)$ 有 $\{h_1', g_1'\} \in X_2(w)$ 满足 $h_1 \in E(S_e), g_1 \in E(S_f)$. 如前，我们同样可找到 $h_2, g_2 \in E_w$，使得在所有情形下，$\{h_1', h_2'\} \in X_1(w)$，当 $v \neq w$ (因此，$g_2 \in E(S_f)$) 时，$\{g_1', g_2'\} \in X_1(w)$；当 $v = w$ 时，记 $g_i' = f_i'(i=1,2)$(见子情形 1.1).

为便于统一起见，仍沿用以前考虑中的记号，重复这一起始于 v 点沿着 e_1 通过 S_e 的路径：我们可找到对于某 $w \in V(\langle E(S_e)\rangle)$ 对应的 $\{h_1', g_1'\} \in X_1(w)$，满足 $h_1 \in E(S_e^*)$，$g_1 \in E(S_f^*)$，并可以找到 $h_2, g_2 \in E_w$，使得在所有情形下，$\{h_1', h_2'\} \in X_2(w)$，当 $v \neq w$ 时，$\{g_1', g_2'\} \in X_2(w)\}$；当 $v = w$ 时，定义 $g_1' = f_1'$，$g_2' = f_m'$. 这与子情形 1.2 是不同的，原因在于那里 $X_{S_4} = X_4'$.

如同情形 1，由构造可得

$$\{\{h_1', h_2'\}, \{g_1', g_2'\}\} \cap X_1 \cap X_2 = \varnothing$$

且类似于子情形 1.1 和子情形 1.2 相应构造出的欧拉迹 $T_{j,k}, T_{j,k}^* \in \mathcal{T}(G,X)$. 我们有

$$(X_1 \cap X_2) \cup \{\{e_1', e_2'\}\} \subseteq X_{T_{j,k}} \cap X_{T_{j,k}^*}.$$

由此和 T_1, T_2 的选取，$T_{j,k}$ 与 $T_{j,k}^*$ 是 κ_X- 相关的，进而由构造而得 T_1 与 $T_{j,k}$ 是 κ_X 相关的，T_2 与 $T_{j,k}^*$ 也是 κ_X- 相关的. 因此得到 T_1 与 T_2 是 κ_X- 相关的，这一矛盾解决了子情形 2.1.

子情形 2.2　$E(S_e) = E(S_e^*)$. 因此，$E(S_f) = E(S_f^*)$. 这与 $f_m \in E(S_f^*)$ 和 $\{e_m', f_m'\} \in X_3''$ 推得 $e_m, f_m \in E(S_f) = E(S_f^*)$. 反过来，这和 $\{e_m', f_{m-1}'\} \in X_4''$ 推得 $e_m, f_{m-1} \in E(S_f^*) = E(S_f)$ (注意到 $m > 2$)，因而由 $f_1 \in E(S_f) = E(S_f^*)$ 得 $E_v - \{e_1, e_2\} \subseteq E(S_f) = E(S_f^*)$. 考虑两种情况：

(2.2.1)　$m > 3$. 于是 $\{e_3', f_3'\} \in X_3''$，$\{e_3', f_2'\} \in X_4''$. 因为 $\{e_1', f_2'\}, \{e_2', f_m'\} \in X$ 和 $m > 3$，我们有

$$\{\{e_3', e_j'\}, \{f_3', e_j'\} \mid j = 1,2\} \cap X = \varnothing.$$

由前面的讨论，由于我们可记

$$S_f = f_i, \cdots, e_3, f_3, \cdots, f_j \quad \text{对 } \{i,j\} = \{1,2\} \text{ 的某种选择}$$

和

$$S_f^* = f_k, \cdots, e_3, f_2, \cdots, f_l \quad \text{对 } \{k,l\} = \{1,m\} \text{ 的某种选择}$$

得到

$$T = f_i, \cdots, e_3, S_e, f_3, \cdots, f_j \quad \text{和} \quad T^* = f_k, \cdots, e_3, S_e^*, f_2, \cdots, f_l$$

都属于 $\mathcal{T}(G,X)$ (其中 S_e 和 S_e^* 都被认为起始于 e_1 终止于 e_2). 由构造 $\{e_3', e_1'\} \cup (X_1 \cap X_2) = X_T \cap X_{T^*}$，由 T_1 和 T_2 的选择，这说明 T 与 T^* 是 κ_X- 相关的.

这与 T 是从 T_1 的构造及 T^* 从 T_2 的构造推出 T_1 与 T_2 是 κ_X- 相关的矛盾.

(2.2.2) $m=3$. 于是 $X(v) \supseteq \{\{e_1', f_2'\}, \{e_2', f_3'\}, \{e_3', f_1'\}\}$①. 因为 $\{e_1, e_2\} \subseteq E(S_e) = E(S_e^*)$，所以 S_f 和 S_f^* 通过 $E_v - \{e_1, e_2\}$ 的边共有三种可能. 根据这些可能性构造 $T, T^* \in \mathcal{T}(G,X)$.

(a) $S_f = f_1, \cdots, f_3, e_3, \cdots, f_2$. 注意因为 $\{e_3', f_2'\} \in X_4''$ 推得 $X_4''|_{S_{3,2}} \subset X_4''$，所以 S_f^* 不能有片断 $S_{3,2} = e_3, \cdots, f_2$，这和 $S_{3,2} \subset S_f^*$ 与 S_f^* 是闭迹矛盾. 不管怎样，由 S_f 满足上述方程，T_1 的形式总是

$$T_1 = e_1, f_1, \cdots, f_3, e_3, \cdots, f_2, e_2, \cdots,$$

因而由一个 κ- 变换

$$T = e_1, f_1, \cdots, f_3, f_2, \cdots, e_3, e_2, \cdots$$

可以得到 $T \in \mathcal{T}(G,X)$.

(b) $S_f^* = f_1, \cdots, f_2, e_3, \cdots, f_3$. 与情况(a)一样，$S_f$ 不能有这样的片断 $e_3, \cdots, f_3$. 这里 T_2 以及由一次 κ- 变换得到的 $T^* \in \mathcal{T}(G,X)$ 形式如下:

$$T_2 = e_1, f_3, \cdots, e_3, f_2, \cdots, f_1, e_2, \cdots,$$

$$T^* = e_1, e_3, \cdots, f_3, f_2, \cdots, f_1, e_2, \cdots.$$

(c) $S_f = f_1, \cdots, e_3, f_3, \cdots, f_2$ 或者 $S_f^* = f_1, \cdots, e_3, f_2, \cdots, f_3$. 则我们有关于 T_1 和 T_2 的等式

$$T_1 = e_1, f_1, \cdots, e_3, f_3, \cdots, f_2, e_2, \cdots,$$

$$T_2 = e_1, f_3, \cdots, f_2, e_3, \cdots, f_1, e_2, \cdots.$$

从 T_1 通过一次 κ- 变换得到 $T \in \mathcal{T}(G,X)$:

$$T = e_1, e_3, \cdots, f_1, f_3 \cdots, f_2, e_2, \cdots,$$

同时从 $S_4 = \{S_e^*, S_f^*\}$ 通过一次 κ- 吸收得 $T^* \in \mathcal{T}(G,X)$:

---

① $m=3$ 并不意味着 $d(v)=6$. 这从定理 7.5 的证明中脚注立即可得出，其中 $2m$ 是 K_{2r} 中 2- 因子 Q 中一个圈的长度. 进而从 $m=3$ 和 $\{e_1', f_2'\}, \{e_2', f_3'\} \in X(v)$ 得到 $\{e_3', f_1'\} \in X(v)$，这也可以通过令 $t_{1,2} = \{e_3', f_3'\}$ 从情形 1 和式 (5) 的组合得到.

$$T^* = e_1, e_3, \cdots, f_1, f_3 \cdots, f_2, e_2, \cdots.$$

在以上 (a)~(c) 的情况下，T 与 T_1，T^* 与 T_2 是 κ_X- 相关的，并且相应地有

$$X_1 \cap X_2 \subseteq X_T, \quad X_1 \cap X_2 \subseteq X_{T^*}.$$

另一方面，如果将 T 构造出来的任一个和 T^* 构造出来的任一个作一比较，就会发现

$$\{e_1', e_3'\} \in X_T \cap X_{T^*}，\text{或者 } \{f_2', f_3'\} \in X_T \cap X_{T^*}，$$

或者 T 如 (a) 中形式，T^* 如 (c) 中形式 .

因此，对前面两种情况得到 $|X_T \cap X_{T^*}| > |X_1 \cap X_2|$，$T$ 与 T^* κ_X- 相关. 然而，在第三种情况下，T 与 T^* 也是 κ_X- 相关的. 因为在 (c) 中 $\{e_2', f_2'\} \in X_{T^*}$，由此可推得 $|X_1 \cap X_{T^*}| > |X_1 \cap X_2|$，所以 T^* 与 T_1 是 κ_X- 相关的，加上 $T_1 = \kappa(T)$ 最终证明了所有情形下均有 T 与 T^* 是 κ_X- 相关的. 在所有考虑的情况中都有 $T = \kappa_1(T_1)$，$T^* = \kappa_1(T_2)$，于是推得 T_1 与 T_2 是 κ_X- 相关的. 这一矛盾证明了情况 (2.2.2)，进而也完成了子情形 2.2 和情形 2 的证明.

情形 3　$X_i'' = X_{T_i} (i = 3, 4)$. 由式 (7)，对任意 $\{j, k\} = \{3, 4\}$，若 $T_K \in \mathcal{T}(G, X)$，则有 $T_j \notin \mathcal{T}(G, X)$，因此，不失一般性，设 $j = 3, k = 4$.

子情形 3.1　$T_4 \in \mathcal{T}(G, X)$. 于是 $X_3' = X_{S_3}$，其中由 $(***)$ 得 $S_3 \in \mathcal{S}_2(G, X)$，进而 $\{e_1', e_2'\} \notin X, \{f_1', f_2'\} \in X$. 观察到 $m > 2$ 和 $T_4 = e_1, \cdots, f_1, f_m, \cdots, e_2$，沿用前面的记号，记

$$S_3 = \{S_e, S_f\}, \quad \text{其中 } \{e_2, f_1\} \in S_e, \{e_1, f_2\} \in S_f.$$

类似于子情形 1.1，起始于 v 沿着 $e_1 \in E(S_f)$ 通过 T_4，注意到这一路径经过 G 的其他所有边后终止于 e_2. 既然 $f_1, e_2 \in E(s_e)$，但 $E(S_e) \subset E(G)$，在某点 w 一定存在 $\{h_1', g_1'\} \in X_2(w) - X_1(w)$，使得 $h_1 \in E(S_e)$，$g_1 \in E(S_f)$. 相应地，选取 $h_2, g_2 \in E_w$，满足 $\{h_1', h_2'\} \in X_1$ (因而 $h_2 \in E(S_e)$) 且当 $w \neq v$ 时，$\{g_1', g_2'\} \in X_1$；当 $w = v$ 时，令 $g_1' = e_1'$，$g_2' = f_2'$ (因而在所有情况下都有 $g_1, g_2 \in E(S_f)$). 继续如子情形 1.1，从 S_3 经一次 κ- 吸收得到 $T_{j,k} \in \mathcal{T}(G, X)$，即 $T_{j,k}$ 与 T_1 是 κ_X- 相关的，进而由构造及 T_4 和 S_3 的结构得 $\{\{f_1', e_2'\}\} \cup X_1 \cap X_2 \subseteq X_2 \cap X_{T_{j,k}}$，再由 T_1 和 T_2 的选取推得 $T_{j,k}$ 和 T_2 是 κ_X- 相关的，所以 T_1 和 T_2 是 κ_X- 相关的. 这与 T_1 和 T_2 的选取矛盾，从而证明了子情形 3.1.

子情形 3.2　$T_4 \notin \mathcal{T}(G, X)$. 由于 $T_3 \in \mathcal{T}(G, X)$ 情形与子情形 3.1 是对称的，我们只要考虑 $T_3 \notin \mathcal{T}(G, X)$ 情形. 从式 $(***)$ 得 $S_3, S_4 \in \mathcal{S}_2(G, X)$，其中 $X_3' = X_{S_3}$ 且 $X_4' = X_{S_4}$. 利用以前的记号可得到如下式子：

$$S_3 = \{S_e, S_f\}, \quad \{f_1, e_2\} \subseteq E(S_e), \{e_1, f_2\} \subseteq E(S_f),$$

$$S_4 = \{S_e^*, S_f^*\}, \quad \{e_1, f_1\} \subseteq E(S_e^*), \{e_2, f_m\} \subseteq E(S_f^*).$$

这里有 $E(S_e^*) \neq E(S_e) \neq E(S_f^*)$. 因此，我们利用子情形 2.1 中应用的方法，起始于 v 沿着 f_1 通过 S_e^*. 既然 $f_1 \in E(S_e)$ 和 $e_1 \in E(S_f)$，于是对某点 $w \in V(\langle S_e^* \rangle)$ 找到 $\{h_1', g_1'\} \in X_2(w)$ 满足 $h_1 \in E(S_e)$，$g_1 \in E(S_f)$; 类似地，存在 $h_2, g_2 \in E_w$，在所有情况下满足 $\{h_1', h_2'\} \in X_1(w)$，其中当 $w \neq v$ 时，$\{g_1', g_2'\} \in X_1(w)$; 当 $w = v$ 时，令 $g_1' = e_1'$, $g_2' = f_2'$. 因为 $w \neq v$ 或 $m > 2$，所以 $\{g_1, g_2\} \subseteq E(S_f)$ 且 $\{g_1', g_2'\} \in X_3' - X_2$，进而由 $\{f_1', e_2'\} \in X_2$ 得 $\{h_1', h_2'\} \neq \{f_1', e_2'\}$.

利用类似子情形 1.1 中构造方法得到欧拉迹 $T_{j,k} \in \mathcal{T}(G, X)$ 满足下列关系式：

$$(X_1 \cap X_2) \cup \{\{f_1', e_2'\}\} \subseteq X_2 \cap X_{T_{j,k}}.$$

从 T_1 和 T_2 的选取，这一关系式推得 T_2 与 $T_{j,k}$ 是 κ_X- 相关的，由此与 $\kappa_1(T_1) = T_{j,k}$ 可推得 T_1 与 T_2 是 κ_X- 相关的，又得到矛盾. 这就结束了子情形 3.2 和情形 3 的证明 (注意到如子情形 2.1，构造 $T_{j,k}^*$ 在这里是不必要的，仅仅由于 $T_{j,k}$ 包含一个 T_2 的未在 $X_1 \cap X_2$ 中考虑过的转移，但在子情形 2.1 中，由于 $\{e_1', e_2'\} \notin X_1 \cup X_2$，构造 $T_{j,k}$ 和 $T_{j,k}^*$ 都是必要的).

在这三种主要情形 (覆盖了 T_1 和 T_2 结构的所有可能) 下都产生了矛盾，于是 $\mathcal{T}(G, X)$ 不可能含两个不是 κ_X- 相关的元素. 定理 7.10 得证.

再仔细考察定理 7.10 的证明，实际上，我们可以得到更强的结论. 为了理解这一点，我们必须考虑一个连通的欧拉图 G 的划分系统 $P(G)$，它的一个特殊情况是转移系统 $X = X(G)$. 相应地，我们用 $\mathcal{T}(G, P(G))$ 记图 G 的所有 $P(G)$- 相容欧拉迹的集合，并引入相应的集合 $\mathcal{S}_2(G, P(G))$，进而扩展定义 7.9 得到 $\kappa_{P(G)}$- 相关的概念，而此概念也定义了 $\mathcal{T}(G, P(G))$ 上的一个等价关系，其等价类定义了相应的划分 $P(G, \kappa_{P(G)})$. 对这些更一般的概念，可推得下列引理，引理的证明留给读者 (练习 7.3):

引理 7.11 设 G 是一个连通的欧拉图，$P(G)$ 是 G 的任一个划分系统. 对任意 $T \in \mathcal{T}(G, P(G))$ ($S \in \mathcal{S}_2(G, P(G))$) 且任意选取 $\{e_1', f_1'\}$, $\{e_2', f_2'\} \in X_T(X_s)$，则对所有 $K \in P(G)$,

$$\{e_1', e_2'\} \not\subseteq K \not\supseteq \{f_1', f_2'\} \quad 或 \quad \{e_1', f_2'\} \not\subseteq K \not\supseteq \{e_2', f_1'\}.$$

引理 7.11 保证了类似 (**) 和 (***) 的等式，以及对应于 (5)~(7) 关系式 (简单地用 $P(G)$ 代替 X，见定理 7.10 证明的开始) 的正确性. 而这些等式和关系式在定理 7.10 的证明中是非常重要的. 因此，可得到推广定理 7.10 的一个结论，并可用定理 7.10 的证明方法证明 (只要将诸如 $\{e', f'\} \in X$ 的符号改成 $\{e', f'\} \subseteq K \in P(G)$). 因此，又留下一个练习，将定理 7.10 的证明改写成下面结论的证明：

定理 7.12　设 G 是任一连通的欧拉图，$P(G)$ 是 G 的任一划分系统. 若对任意点 $v \in V(G)$ 和任意 $K \in P(v) \subseteq P(G)$ 都有 $|K| \leqslant \frac{1}{2}d(v)$，则 $|\mathcal{P}(G, \kappa_{P(G)})| = 1$.

在定理 7.12 中限制 $P(G)$ 的元素的规模是得到 $\mathcal{T}(G, P(G)) \neq \varnothing$ 的充分必要的条件 (见定理 6.1)①.

7.2.1　特殊类型的欧拉迹和 κ_1- 变换的应用

下面结果的一部分直接来自于定理 7.10. 我们考虑 4- 正则的连通图 G 或嵌入在曲面上的这种欧拉图，以及有三类欧拉迹这种图. 在前两种情况下，我们可以考虑 G 嵌入在曲面上，并用 $\mathcal{T}_A(G)$ 和 $\mathcal{T}_{NI}(G)$ 分别表示图G **的所有 A- 迹的集合以及非交叉欧拉迹的集合**. 在第三种情况下，我们考虑 4- 正则图 G 的一个 2- 因子 $\{Q_1, Q_2\}$ (见推论 6.3)，并用 $\mathcal{T}_a(G; Q_1, Q_2)$ 表示**全体由 Q_1 和 Q_2 的边交错构成的 G 的欧拉迹** (即与圈分解 $S = Q_1 \cup Q_2$ 相容的欧拉迹)**的集合**，进而对满足 $T_2 = \kappa_1 T_1$ 的 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_A(G)$(分别地 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{NI}(G)$，$T_1, T_2 \in \mathcal{T}_a(G; Q_1, Q_2)$) 称该 κ_1- 变换是 κ_A- 变换 (分别地，κ_{NI}- 变换和 κ_a- 变换)，并相应地定义 κ_A- 相关 (分别地，κ_{NI}- 相关和 κ_a- 相关). 然而我们要求如果 κ_A- 变换是 κ^*- 变换 (见定义 7.8)，满足 $\kappa'(T_1) = S'$ (见定义 7.7) 的一个迹分解 S' 一定可以从 T_1 通过在 $v \in V(G)$ 处选择一对不同于 $X_{T_1}(v)$ 的非交叉转移得到. 类似地，若一个 κ_{NI}- 变换 (κ_a- 变换) 是一个 κ^*- 变换，则 $\kappa'(T_1) = S'$ 意味着相应的转移系统 $X_{S'}$ 是非交叉的 (与圈分解 $Q_1 \cup Q_2$ 相容). 我们注意到若 G 是平面图，一个 κ_A- 变换一定是一个 κ^*- 变换. 然而当 G 是嵌入到平面或球面以外的曲面上的图时，并不一定成立 (练习 7.5a),b)). 进一步，在 4- 正则图情况下，κ_A- 变换和 κ_{NI}- 变换的概念是一致的. κ_A- 相关、κ_{NI}- 相关和 κ_a- 相关都是欧拉迹集合上的等价关系，我们再次将这些命题留作练习 (练习 7.5c)).

推论 7.13　若 G 是嵌入到曲面上的 4- 正则连通图，则 $\mathcal{T}_A(G)$ 中任意两个元素都是 κ_A- 相关的.

证明　既然 G 已经嵌入到曲面上，对每一点 $v \in V(G)$，$O^+(v)$ 都由这一嵌入给定，因而可以说交叉转移和非交叉转移. 因为 G 是 4- 正则图，所以交叉转移由图 G 的嵌入唯一确定. 设 X 是这些交叉转移的系统，则

$$\mathcal{T}(G, X) = \mathcal{T}_A(G),$$

并且在这种情况下，κ_X- 相关与 κ_A- 相关等价. 推论 7.13 可从定理 7.10 得到.

当上述图是平面图 G 时，$\mathcal{T}_A(G)$ 所有元素的另一种构造方式和 κ_A- 变换的

① 我决定证明定理 7.10，而将定理 7.12 的证明留作练习 (而不是证明定理 7.12，将定理 7.10 作为其推论得到) 主要是因为一个转移系统比一般的划分系统更形象 (而且它们的证明没有实质性的区别)，更进一步的原因在于，对定理 7.10 的讨论比定理 7.12 与本书更直接相关.

另一种描述已经由 [KOTZ68c] 给出 (依我们的目的，这是我们提到 A- 迹时有的情形)，即考虑连通 4- 正则平面图的一个 2- 面染色 (用颜色 1 和颜色 2)，并利用下述方法构造两个图 $M_i(i=1,2)$：$V(M_i)$ 中每一个元素 x 代表图 G 的一个 i-面 $F(x)$，$V(M_i)$ 中两个点 x, y 由 $|V(\mathrm{bd}(F(x)))\cap V(\mathrm{bd}(F(y)))|$ 条边相连，即任意 $v\in V(G)$ 对应到一条边 $e_i(v)\in E(M_i)$. 记 $\mathcal{T}_i$ 为 M_i 的生成树的集合. 下面的结论将 $\mathcal{T}_i$ 与 $\mathcal{T}_A(G)$ 联系起来，并描述了 $\mathcal{T}_A(G)$ 中 κ_A- 变换 (见 [KOTZ68c，定理 14~17]).

定理 7.14 若 G 是一个连通的 4- 正则平面图，$M_i(i=1,2)$ 是对应于图 G 的一个固定的 2- 面染色，并用上述方法构造的两个图，则下列结论成立：

1) 存在 $\mathcal{T}_A(G)$ 和 $\mathcal{T}_i$ $(i=1,2)$ 间的双射 α_i 和一个由下列性质定义的 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 间的双射 $\alpha_{1,2}$:

(i) 若 $\{V_1,V_2\}$ 是 $T_A\in\mathcal{T}_A(G)$ 的 A- 划分，则

$$\alpha_i(T_A)=\langle\{e_i(v)\in E(M_i)|v\in V_i\}\rangle\in\mathcal{T}_i,\quad i=1,2;$$

(ii) 对满足 $T_1=\alpha_1(T_A)$ 的 $T_1\in\mathcal{T}_1$ 和 $T_A\in\mathcal{T}_A(G)$,

$$\alpha_{1,2}(T_1)=\langle\{e_2(v)\in E(M_2)|e_1(v)\notin E(T_1)\}\rangle=\alpha_2(T_A)\in\mathcal{T}_2;$$

(iii) $\alpha_2=\alpha_{1,2}\alpha_1$;

2) 关于 $T_A, T'_A\in\mathcal{T}_A(G)$ 下列两个陈述等价:

(i) $\kappa_A(T_A)=T'_A$ 且 $T_A\neq T'_A$;

(ii) $\alpha_i(T_A)\cup\alpha_i(T'_A)(i=1,2)$ 有唯一的一个圈.

证明 1) 考虑 $T_A\in\mathcal{T}_A(G)$ 及其 A- 划分 $\{V_1,V_2\}$ 并构造平面图 $H_{i+1}:=G_{V_i,i}(i=1,2)$(令 3=1). 由定理 6.59 得 H_i 是连通的外平面图①，其块为形成 G 的 i- 面边界的圈 $(i=1,2)$.

因此，可以用下列方法定义 $T_i\subseteq M_i$:

$$V(T_i)=V(M_i),$$
$$E(T_i)=\{xy\in E(M_i)|x,y\in V(T_i)\wedge(\mathrm{bd}(F_{H_i}(x))\cap\mathrm{bd}(F_{H_i}(y))\neq\varnothing)\}$$

(其中 H_i 的下标表明考虑对应到 H_i 中的对应面).

依据 H_i 的结构，对于任意的 $x,y\in V(T_i)$ 有 $|\mathrm{bd}(F_{H_i}(x))\cap\mathrm{bd}(F_{H_i}(y))|\leqslant 1$. 再根据 H_i 的定义以及 $v\in V(G)\leftrightarrow e_i(v)\in E(M_i)$，我们得到对 $i=1,2$ 有

$$xy=e_i(v)\in E(T_i)\ \text{当且仅当}\ \mathrm{bd}(F_{H_i}(x))\cap\mathrm{bd}(F_{H_i}(y))=\{v\}\in V_i$$

(见引理 6.58).

① 确定地讲，H_i 是一个可平图，它能嵌入到一个平面上，使得某些 $(i+1)$- 面的边界含每个块的一条边.

更进一步，

$$d_{H_i}(v) = 4 \text{ 当且仅当 } e_i(v) \in E(T_i), \tag{*}$$

并考虑部分图 $S(T_i)$，从上式可得到

$$E(T_i) = \{e_i(v) \in E(M_i) | v \in V_i\},$$

$$S(T_i) \simeq \text{bc}(H_i).$$

由于 H_i 是连通的，所以 $\text{bc}(H_i)$ 是树，再加上 $V(T_i) = V(M_i)$，则有

$$T_i = \langle\{e_i(v) \in E(M_i) | v \in V_i\}\rangle \in \mathcal{T}_i. \tag{**}$$

注意到 H_i 已由 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 刻画，从式 (*) 和式 (**) 得到由 $\alpha_i(T_A) = T_i$ 定义了如 (i) 所示的 $\mathcal{T}_A(G)$ 与 $\mathcal{T}_i$ 之间的一个双射.

为了证明 (ii) 成立，只要将 H_1 和 H_2 比较，T_1 和 T_2 比较 (T_i 如上所定义，$i = 1, 2$). 首先观察到由 H_1 和 H_2 描述了相同的 $T_A \in \mathcal{T}_A(G)$，因而 $\alpha_1(T_A) = T_1$，$\alpha_2(T_A) = T_2$. 由式 (*) 和 H_1 与 H_2 的定义，我们可得 $e_1(v) \in E(T_1)$ 当且仅当 $e_2(v) \notin E(T_2)$，所以 $\alpha_{1,2}(T_1) = T_2$ 定义了如 (ii) 所示的 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 之间的双射.

式 (iii) 的有效性可从前面的讨论得到.

2) 对 $T_A, T'_A \in \mathcal{T}_A(G)$，设 $\kappa_A(T_A) = T'_A$. 正如前面已注意到 (也可见练习 7.5) $\kappa_A(T_A) = \kappa^*(T_A)$，即 $\kappa^* = \kappa''\kappa'$，其中 κ' 是一个 κ- 分拆，κ'' 是一个 κ- 吸收. 因此，存在 $S \in \mathcal{S}_2(G)$，使得 X_S 只包含非叉转移且 $\kappa'(T_A) = S$，$\kappa''(S) = T'_A$. 用 $v(w)$ 记 G 中 κ- 分拆 (κ- 合并) 处的点，并进一步记 $T_i := \alpha_i(T_A)$，$T'_i := \alpha_i(T'_A)$ $(i = 1, 2)$. 设 $\{V_1, V_2\}$ ($\{V'_1, V'_2\}$) 为对应到 T_A (T'_A) 的 G 中 A- 划分. 注意到 $v \neq w$ 当且仅当 $T_A \neq T'_A$. 不失一般性，只考虑当 $i = 1$ 时情形 (当 $i = 2$ 时，可用类似方法处理).

从 T_A 到 S 的转移，即在 v 处应用一次 κ- 分拆，相当于视 $v \in V_2$ 还是 $v \in V_1$，而将 $\{V_1, V_2\}$ 改变成 $\Big\{V_1 \cup \{v\}, V_2 - \{v\}\Big\}$ 或 $\Big\{V_1 - \{v\}, V_2 \cup \{v\}\Big\}$，从而也等价于 T_1 要么被变换一个单圈图 $T_C := T_1 \cup e_1(v)$，其中 $e_1(v)$ 一定在 T_C 中唯一的圈 C 中; 要么被变换为一个森林 $T_F := T_1 - e_1(v)$，它恰有两个分支 K_1 和 K_2 (见 1)(i)). 但因为从 S 到 T'_A 的一个转移，即在 w 处应用一次 κ- 吸收，一定得到 T'_A 的一个 A- 划分 $\{V'_1, V'_2\}$，所以要么

$$V'_1 = (V_1 \cup \{v\}) - \{w\}, \quad V'_2 = (V_2 - \{v\}) \cup \{w\}$$

(即 $v \in V_2$ 当且仅当 $w \in V_1$，注意到 $q_{T_1} = q_{T'_1} = |V_1| = |V'_1|$)，要么

$$V'_1 = (V_1 - \{v\}) \cup \{w\}, \quad V'_2 = (V_2 \cup \{v\}) - \{w\}.$$

对应地并分别等价地，从 T_C 删去边 $e_1(w)$ 得到 $T'_1 = \alpha_1(T'_A)$，以及从 T_F 中增加边 $e_1(w)$ 得到 $T'_1 = \alpha_1(T'_A)$. 从 $T'_1 \in \mathcal{T}_1$ 得到第一种情况下 $e_1(w) \in E(C)$，第二种情况有 $e_1(w) = x_1x_2$，其中 $x_j \in V(K_j)(j = 1, 2)$.

从以上由 T_1 到 T_1' 的构造，说明在任何情况下，

$$T_1 \cap T_1' = T_1 \cup T_1' - \{e_1(v), e_1(w)\}$$

是一个恰好有两个分支的森林，并使得与 $e_1(v)$ 和 $e_1(w)$ 均连接不同分支的点，因而

$$\alpha_1(T_A) \cup \alpha_1(T_A') = T_1 \cup T_1' = T_1 \cap T_2 \cup \{e_1(v), e_1(w)\}$$

恰好有一个圈 (必然包含 $e_1(v)$ 和 $e_1(w)$)，所以由 2)(i) 得 2)(ii).

反之，假设 $\alpha_i(T_A) \cup \alpha_i(T_A')(i=1,2)$ 恰好含有一个圈，称为 C，得到 $T_A \neq T_A'$. 记 $T_i := \alpha_i(T_A), T_i' := \alpha(T_A')$. 由 $T_i, T_i' \in \mathcal{T}_i$，并因为 1)(i) 已经证明，所以

$$|E(T_i) - E(T_i')| = |E(T_i') - E(T_i)| = 1$$

(否则，或者 $T_i \cup T_i'$ 有一个以上的圈，或者 $T_i = T_i'$ 矛盾于 $T_A = T_A'$). 记

$$\{e_i(v)\} = E(T_i) - E(T_i'), \quad \{e_i(w)\} = E(T_i') - E(T_i),$$

因而 T_i' 可从 T_i 先删去 $e_i(v)$，然后再加上 $e_i(w)$ 得到 (或类似地，在 T_i 加上 $e_i(w)$，再删去 $e_i(v)$ 得到). 从 2) 的证明的第一部分得到从 T_i 到 $T_i - e_i(v)$ 的转移对应 T_A 到 S 的变换，其中 $S \in \mathcal{S}_2(G)$ 且 $X_S(v)$ 是一对非交叉转移，因而这一变换是一个 κ- 分拆，即 $\kappa'(T_A) = S$. 类似地，由 $T_i' = (T_i - e_i(v)) \cup \{e_i(w)\}$ 是一个树，以及如 1)(i) 中所示的双射及构造的方法推得从 S 得到 T_A' 的构造是一个只包含非交叉转移的 κ- 吸收，即 $\kappa''(S) = T_A'$，所以 $T_A' = \kappa''(\kappa'(T_A)) = \kappa_A(T_A)$，也即从 2)(ii) 推得 2)(i). 定理得证.

注意到连通图 G 的每个生成树可以从 G 的其他生成树通过一系列如定理 7.14 证明过程中所述的 "边出边进" 得到. 由此及定理 7.14 可独立于定理 7.10 给出推论 7.13 的证明 (仅限于平面图).

事实上，对任意连通的平面欧拉图 G 可得到类似于定理 7.14 的一个结果. 有两种方法解决这一问题，如果想依据图，那么 (在构造对应的 M_i 中) $V(M_i)$ 不仅由 i- 面的 "资本" 组成，而且也由 $V(G)$ 组成. 在这种情况下，$xy \in E(M_i)$ 当且仅当 $|\{x,y\} \cap V(G)| = 1$，其中 $x \in V(G)$，y 对应到一个 i- 面 $F(y)$ 且 $x \in \mathrm{bd}(F(y))$. 用这种方法定义的 M_i 对应到 4- 正则图 G 情况下的 $S(M_i)$ (见定理 7.14 之前的讨论).

然而，在现在的情况下 (更一般地)，不再有 $\mathcal{T}_A(G)$ 与 M_i 生成树的集合 $\mathcal{T}_i$ 之间的双射 α_i. 更确切地讲，有 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 的 $T_A \in \mathcal{T}_A(G)$ 对应到任一个 $T_i \in \mathcal{T}_i$，其中 T_i 满足对任一 $v_j \in V_j$ 有 $d_{T_i}(v_j) = 1$；对任一 $v_i \in V_i$ 有 $d_{T_i}(v_i) = \frac{1}{2}d_G(v_i)$ $(i,j=1,2)$，因而 $\mathcal{T}_A(G)$ 中每一个 T_A 都与一个树的集合 $\mathcal{T}_i(T_A) \subseteq \mathcal{T}_i$ 相

联系. 然而，定理 7.14 中由等式 1)(ii) 所表示的 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 之间的对偶关系，经修改后仍然成立；对定理 7.14 的部分 2) 也有相同的结论.

定理 7.14 是对任一个连通的平面欧拉图 G 而言的结论，然而，超图的概念可能是描述类似定理 7.14 的结论的更适合的工具. 在那种情形下，$V(M_i)$ 可以如同在 4- 正则图时一样定义，$v \in V(G)$ 与 $e_i(v) \in E(M_i)$ 之间的对应关系也可同样保留，但是

$$e_i(v) = \{x \in V(M_i) | F(x) \text{ 是一个有 } v \in V(\text{bd}(F(x))) \text{ 的 } i\text{- 面} \}.$$

用类似图情况下的方法定义一个 M_i 的生成超树 T_i，可以证明如上所述的定理 7.14 在这更一般情形下仍然成立.

将关于任一连通的平面欧拉图 G 的定理 7.14 的如上述讨论的两种可能推广的详细证明留作练习 (练习 7.6). 但是我们注意到由于 $\mathcal{T}_A(G)$ 和生成超树的集合 $\mathcal{T}_i$ (一般情况下) 之间的双射 α_i，确定在一般超图中的生成超树的存在性是一个 NP 完全问题. 只要 G 是平面图，从 G 构造 M_i 能在多项式时间完成，反之亦然，所以如果仅考虑 3- 连通的可平面欧拉图 G，则 G 的面的边界不依赖于它的嵌入方法而唯一确定 (见定理 3.52). 在这种情况下，超图 M_i 仅由 G 即可确定，反之亦然. 既然在这样的图 G 中确定一条 A- 迹的存在性是 NP- 完全问题 (见定理 6.91)，故确定生成超树 $T_i \subset M_i$ 的存在性问题也是 NP- 完全问题，将检验这些复杂性情形留作练习 (练习 7.7).

但是不能忽视，正如定理 7.14 不能推得推论 7.13 (见定理 7.14 后的一段)，从任意连通的平面欧拉图 G 的推广的定理 7.14 并不能得到关于在 κ_A- 相关下的 $\mathcal{T}_A(G)$ 的等价类的任何结论. 既然我们要求 $\mathcal{S}$ 在 G 的任何点处总能导出一个 1- 分裂或 2- 分裂，当然一个 κ_A- 变换只包含 4- 次点. 事实上，在此情况下，$T, T' \in \mathcal{T}_A(G)$ 在同一个等价类中当且仅当它们各自的 A- 划分 $\{V_1, V_2\}$ 和 $\{V_1', V_2'\}$ 满足等式

$$V_i - (V_2(G) \cup V_4(G)) = V_i' - (V_2(G) \cup V_4(G)), \quad i = 1, 2.$$

在一般情况下，κ_A- 相关也是 $\mathcal{T}_A(G)$ 的一个等价关系，并且上述方程确定了在 κ_A- 相关下 $\mathcal{T}_A(G)$ 的一个等价类. 这些也留作练习 (练习 7.8).

然而，如果考虑嵌入到曲面上的任一连通的欧拉图的 $\mathcal{T}_{NI}(G)$，我们可得到类似于定理 7.10 的结论，它的证明将比定理 7.10 的证明简单，但同时在应用对应的 κ_1- 变换时没有相同的自由度. 这一证明需要下面的引理.

引理 7.15 设 G 是一个嵌入到一个曲面上的图，v 为其一个偶点，$X(v)$ 是 v 点处非交叉转移系统，则至少有一个 $t \in X(v)$，设为 $t = \{e', f'\}$，e' 与 f' 在 $O^+(v)$ 是相继的. 进一步，若 $v \notin V_2(G)$，则至少存在两个这样的转移.

证明 考虑 $O^+(v) := (e_1', \cdots, e_{2k}')$. 若 $k = 1$，则 $X(v) = \left\{\{e_1', e_2'\}\right\}$，在此简

单情形下，从 G 是一个曲面嵌入图即可得证. 若 $k=2$，则由 $X(v)$ 为非交叉转移集合得 $X(v)=\Big\{\{e'_1,e'_2\},\{e'_3,e'_4\}\Big\}$ 或者 $X(v)=\Big\{\{e'_1,e'_4\},\{e'_2,e'_3\}\Big\}$，因而也能得当 $k=2$ 时引理成立，所以只要考虑 $k>2$ 情况，并假设存在

$$\{e'_i,e'_j\}\in X(v)\ \text{满足}\ i-1\neq j\neq i+1, \tag{*}$$

其中当 $i=1$ 时，令 $i-1=2k$；当 $i=2k$ 时，令 $i+1=1$.

在满足式 $(*)$ 的所有 i 和 j 中，选取使 $|i-j|$ 尽可能小的 i,j. 不失一般性，假设在 $O^+(v)$ 中选取 $i=1$，因而 $2<j<2k$.

正因为 $X(v)$ 是一个非交叉转移的集合，则得到

$$\{e'_l,e'_m\}\notin X(v),\quad 2\leqslant l<j<m\leqslant 2k. \tag{**}$$

考虑开的整数区间

$$I_{1,j}:=(1,j)\quad \text{和}\quad I_{j,2k}:=(j,2k),$$

并选 $l,n\in I_{1,j}$ 满足

$$|l-n|\ \text{尽可能小且}\ t:=\{e'_l,e'_n\}\in X(v), \tag{***}$$

则 t 有本引理中所述的性质，且 $e'=e'_l, f'=e'_n$；否则，要么与 $(*)$ 和 i,j 的选取矛盾，要么与 $(**)$ 矛盾.

为了找具有引理中所述性质的第二个转移 $t'\in X(v)$，要么 $t'=\{e'_{2k-1},e'_{2k}\}\in X(v)$ (这种情况下什么也不需要证明)，要么 $\{e'_p,e'_{2k}\}\in X(v)$，其中 $j<p<2k-1$.

在后一种情况下，考虑对应的开的整数区间 $I_{p,2k}:=(p,2k)$，并考虑满足式 $(***)$ 的 l',n' 且 $l',n'\in I_{p,2k}$. 利用与上述相同的讨论，又由于 $\max\{l,n\}<\min\{l',n'\}$，于是我们得到 $t'=\{e'_{l'},e'_{n'}\}\neq t$，并且 t' 也具有引理中所述性质 (令 $e'=e'_{l'}$，$f'=e'_{n'}$). 引理 7.15 得证.

若 G 是一个嵌入到曲面上的连通欧拉图，T 为 G 的一个非交叉的欧拉迹，X_T 是对应到 T 的一个非交叉转移系统，则从引理 7.15 得在任何一个点，T 至少在一个转移中的作用像 A- 迹一样.

引理 7.16 若 G 是一个嵌入到一个曲面上的连通欧拉图，假设 X_s 是对某 $S=\{S_e,S_g\}\in\mathcal{S}_2(G)$ 的一个非交叉转移系统，则对任一个 $w\in V(\langle E(S_e)\rangle)\cap V(\langle E(S_g)\rangle)$，存在 $T_w\in\mathcal{T}_{NI}(G)$，使得 T_w 能从 S 通过 w 处一次 κ- 吸收得到.

证明 任意选取 $w\in V(\langle E(S_e)\rangle)\cap V(\langle E(S_g)\rangle)$，并考虑 $X_S(w)$ 以及 $O^+(w)=(h_1,\cdots,h'_{2k})$；由 w 的选取得 $k>1$. 不失一般性，可选取 $O^+(w)$ 满足 $h_1\in E(S_e)$，所以对 $t_1=\{h'_1,h'_j\}\in X_S(w)$ 有 $h_j\in E(S_e)$. 选取 $t_2=\{h'_m,h'_n\}\in X_S(w)$ 满足 $h_m,h_n\in E(S_g)$. 不失一般性，设 $m<n$. 由 X_s 是一个非交叉转移系统，$j<m$ 或 $j>n$. 不失一般性，设 $j<m$. 假设

$$\{h'_r, h'_s\} \notin X_S(w), \quad r \text{ 和 } s \text{ 满足 } j < r < m < n < s \leqslant 2k,$$

则

$$X_a(w) := (X_S(w) - \{t_1, t_2\}) \cup \Big\{\{h'_1, h'_n\}, \{h'_j, h'_m\}\Big\}$$

仅由非交叉转移系统组成. 因此,

$$X^* = (X_S - X_S(w)) \cup X_a(w)$$

是 G 的一个非交叉转移系统，进而由 $X_a(w)$ 的定义得到从 X_S 到 X^* 的变换给出了 w 点处的一个 κ- 吸收 (见定义 7.7 之前讨论中的等式 (*) 和式 (1″))，即 $X^* = X_{T_w}$，其中 $T_w \in \mathcal{T}_{NI}(G)$ 且 T_w 能从 $\mathcal{S}$ 进行一次 κ- 吸收得到.

然而，如果对某些 r 与 s,

$$\{h'_r, h'_s\} \in X_S(w) \text{ 和 } j < r < m < n < s \leqslant 2k.$$

则记

$$t'_1 := \{h'_r, h'_s\}, \quad t'_2 := t_2, \quad h_r, h_s \in E(S_e),$$
$$t'_1 := t_1, \quad t'_2 := \{h'_r, h'_s\}, \quad \text{其他情况}.$$

用 t'_1, t'_2 代替 t_1, t_2 重复上述讨论 (注意从 $\{h'_r, h'_s\} \in X_S(w)$ 推得 $\{h_r, h_s\} \cap E(S_e) \neq \varnothing$ 当且仅当 $\{h_r, h_s\} \subseteq E_S(e)$). 因为 $d(w) < \infty$，则对某 $\{t_1^{(i)}, t_2^{(i)}\} \subseteq X_S(w)$，上述将 $\mathcal{S}$ 变换到 $T_w \in \mathcal{T}_{NI}(G)$ 的 κ- 吸收可利用 $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ 代替 t_1, t_2 而完成. 引理 7.16 得证.

按照先前应用的记号，$\mathcal{P}(G, \kappa_{NI})$ 是由 κ_{NI}- 相关诱导的 $\mathcal{T}_{NI}(G)$ 的划分.

定理 7.17 对任一个嵌入到曲面上的连通欧拉图有 $|\mathcal{P}(G, \kappa_{NI})| = 1$.

证明 当 $|\mathcal{T}_{NI}(G) = 1$ 时，该定理是平凡的 (因为恒等变换是一个 κ_{NI}- 变换). 假设 $|\mathcal{T}_{NI}(G)| > 1$ 且存在两个欧拉迹 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{NI}(G)$ 不是 κ_{NI}- 相关的，记 T_1 和 T_2 对应的转移系统为 X_1 和 X_2 (我们尽可能延用定理 7.10 中的记号)，还可以再假设选取的 T_1 和 T_2，使 $|X_1 \cap X_2|$ 尽可能大，但这一限制是基于 $\sigma(G) := \sum\limits_{v \in V(G)} (d(v) - 2)$ 尽可能小的前提下. 从 $|\mathcal{T}_{NI}(G)| > 1$ 得 $\sigma(G) > 0$.

设 v 是满足 $X_1(v) \neq X_2(v)$ 的任意一点. 由引理 7.15 得知, 存在一个转移 $t = \{e', f'\} \in X_2(v)$，使得 $O^+(v) = (\cdots, e', f', \cdots)$.

假设也有 $t \in X_1(v)$，则通过在 v 点将 e 和 f 分裂开得到 G'，并满足 $V(G') = V(G) \cup \{v_{e,f}\}$，$e, f$ 是与 $v_{e,f}$ 关联的边，G' 可看成嵌入到与 G 相同曲面上的图. 既然 $t \in X_1 \cap X_2$，那么 T_i 对应到 G' 的一条欧拉迹 T'_i，满足 $X'_i = X_i$，其中 X'_i 是对应到 $T'_i (i = 1, 2)$ 的转移系统. 从 t 在 G 中的位置以及

$$t \in X_1 \cap X_2 = X'_1 \cap X'_2 \tag{*}$$

可以得到 G' 的任意一个非交叉转移系统对应到 G 的一个非交叉转移系统. 因为 $\sigma(G') < \sigma(G)$，所以从 G 的选取，T'_1 和 T'_2 是 κ_{NI}- 相关的. 把 T'_1 变换到 T'_2 的各

种 κ_{NI}- 变换看成是作用在 G 上的运算，结合式 $(*)$，得到 T_1 和 T_2 也是 κ_{NI}- 相关的，这与 T_1 和 T_2 的选取矛盾，因而 $t \notin X_1(v)$.

考虑 $t_e = \{e', g_1'\}$ 和 $t_f = \{f', g_2'\}$，其中 $t_e, t_f \in X_1(v)$，并对 $t^* = \{g_1', g_2'\}$ 定义

$$X_1^* = (X_1 - \{t_e, t_f\}) \cup \{t, t^*\}, \quad X_2^* = X_2.$$

因为 $t \in X_2(v) = X_2^*(v)$ 的结构，则 X_1^* 是一个非交叉转移系统，由于 $t \in X_1^* \cap X_2^*$，$t \notin X$，则

$$|X_1^* \cap X_2^*| \geqslant |X_1 \cap X_2| + 1, \tag{$**$}$$

因而若对于 $T^* \in \mathcal{T}_{NI}(G)$ 有 $X_1^* = X_{T^*}$，则从 T_1 和 T_2 的选取就得到 T^* 和 T_2 是 κ_{NI}- 相关的. 这与 $T^* = \kappa_{NI}(T_1)$ 能得到 T_1 和 T_2 是 κ_{NI}- 相关的，与 T_1 和 T_2 选取相矛盾，从而对某 $S \in \mathcal{S}_2(G)$ 有 $X_1^* = X_S$. 利用先前用的记号，记 $S = \{S_e, S_g\}$. 不失一般性，设 $e, f \in E(S_e)$，因而 $g_1, g_2 \in E(S_g)$ (从 $S \in \mathcal{S}_2(G)$ 得到).

如同定理 7.10 的证明，现在考虑一条起始于 v 沿着 e 通过 T_2 的路径. 既然 $t \in X_2$，则这一路径正好经过 f 后终止于 v. 由于 $e, f \in E(S_e)$, $g_1, g_2 \notin E(S_e)$，因而 $E(S_e) \subset E(T_2) = E(G)$，从而存在一点 w，T_2 在 w 经过 S_e 进入 S_g，并且当 $w = v$ 时，$d(v) > 4$. 在各种情况下都有 $w \in V(\langle E(S_e)\rangle) \cap V(\langle E(S_g)\rangle)$. 对 $t \in X_1^* \cap X_2^*$，记 G' 是 G 在 v 点分裂掉 e 和 f (注意 $t = \{e', f'\}$) 所得到的图 (如证明的第一部分)，再定义 $X_i' = X_i^*\ (i = 1, 2)$. 但此时对 $S' \in \mathcal{S}_2(G')$ 有 $X_1' = X_{S'}$，其中 $S' = \{S_e', S_g'\}$, $E(S_e') = E(S_e)$, $E(S_g') = E(S_g)$. 考虑下列两种情况:

情形 1　$X_1'(w) \cap X_2'(w) = \varnothing$. 在此情形下，可将引理 7.16 直接应用到 G' 和 S' 以便得到 $T_w' \in \mathcal{T}_{NI}(G')$，其中 T_w' 可从 S' 通过 w 点处的一次 k- 吸收得到，所以 T_w' 和 T_2' 是 κ_{NI}- 相关的 (其中 $T_2' \in \mathcal{T}_{NI}(G')$ 对应到 T_2)，从 X_i' 的定义，$X_1'(w) \cap X_2'(w) = \varnothing$ 以及式 $(**)$，确保了 $|X_{T_w'} \cap X_2'| > |X_1 \cap X_2|$ 的有效性. 因此，对应的欧拉迹 $T_w, T_2 \in \mathcal{T}_{NI}(G)$ 是 κ_{NI}- 相关的. 再由 $\kappa'(T_1) = S$, $\kappa''(S) = T_w$ 以及 X_1^* 是一个非交叉转移系统，T_1 与 T_2 是 κ_{NI}- 相关的，这一矛盾使情形 1 证毕.

情形 2　$X_1'(w) \cap X_2'(w) \neq \varnothing$. 在此情形下，我们首先考虑 G' 中的 $O^+(w)$，并记

$$O^+(w) = (h_1', h_2', \cdots, h_{2k}'), \quad k \geqslant 2$$

(注意无论 $w = v$ 还是 $w \neq v$，都有 $d_{G'}(w) \geqslant 4$). 考虑任意一个元素 $t' = \{h_m', h_n'\} \in X_1'(w) \cap X_2'(w)$，其中 $1 \leqslant m < n \leqslant 2k$. 不失一般性，可假设 $m = 1$. 利用非交叉转移的定义得到对满足 $1 < i < n < j \leqslant 2k$ 的 i 和 j 有 $t'' = \{h_i', h_j'\} \notin X_1'(w) \cup X_2'(w)$，因而 $(X_1'(w) \cup X_2'(w)) - \{t'\}$ 的任一个元素位于由 $h_m' \cup h_n'$ 定义的开曲线 $\mathcal{C}_{m,n}$ 的两边之一，所以 $\mathcal{C}_{m,n}$ 确定了 $X_i'(w)(i = 1, 2)$ 的一个划分

$$\mathcal{P}(X_i'(w)) = \{X_{i,l}'(w), \{t'\}, X_{i,r}'(w)\} \tag{***}$$

(可能有 $X_{i,l}'(w) = \varnothing$ 或 $X_{i,r}'(w) = \varnothing$，但 $X_{i,l}'(w) \cup X_{i,r}'(w) \neq \varnothing$). $X_{i,l}'(w)$ ($X_{i,r}'(w)$) 恰好包含于 $X_i'(w)$ 中位于曲线 $\mathcal{C}_{m,n}$ 左 (右) 侧的那些转移 (这里左侧和右侧指 $\mathcal{C}_{m,n}$ 相对的两侧). (***) 中的划分给出了用三个点 $w_l, w_r, w_t \notin V(G)$ 代替 w 的一种方式，使得

$$E_{w_l}^* = \bigcup_{t \in X_{i,l}'(w)} t, \quad E_{w_r}^* = \bigcup_{t \in X_{i,r}'(w)} t, \quad E_{w_t}^* = t'.$$

从 (***) 中划分的定义可以知，由前面的代替得到一个图 G_t'，G_t' 可看成与 G 嵌入在同一曲面上，进而还从式 (***) 可知，由 S' 和 T_2' 分别变换到对应的 $S_t' \in \mathcal{S}_2(G_t')$ 和 $T_{2,t}' \in \mathcal{T}_{NI}(G_t')$. 最后由式 (***) 及 G_t' 结构得知，G_t' 的每一个非交叉转移系统对应到 G' 和 G 的一个非交叉转移系统.

如果需要，我们可重复上述过程直到得到一个具有下列性质的连通的欧拉图 H：

1) $V(H) \supset V(G' - w)$;

2) $X_1'(w) \cap X_2'(w)$ 中的元素 t_j' 可由 H 中 2- 次点 w_j 表示且 $E_{w_j}^* = t_j'$;

3) 对任一

$$w_\alpha \in V(H) - (V(G' - w) \cup \{w_j \mid t_j' \in X_1'(w) \cap X_2'(w)\})$$

和

$$X_i(w_\alpha) \subset X_i'(w), \quad i = 1, 2$$

有 $d_H(w_\alpha) > 4$，其中 $X_i(w_\alpha)$ 满足

$$X_1(w_\alpha) \cap X_2(w_\alpha) = \varnothing,$$

$$\bigcup_{w_\alpha} X_i(w_\alpha) = X_i'(w) - X_{i+1}'(w), \quad i = 1, 2 \ (\text{令 } 3 = 1),$$

$G' - w$ 的点在 H 中仍保持不变;

4) H 可以看成与 G' 嵌入在同一曲面上，并可从 G' 得到，$X_i(H)$ 是可写成 $X_i(H) = X_i'(i = 1, 2)$ 的非交叉转移系统 (见 2) 和 3)，并注意到一个转移是不依赖与实际点关联的一对半边)，而且 H 中每一个非交叉转移系统也对应到 G' 中这样的系统.

由 4)，对应到上述 $S' \in \mathcal{S}_2(G')$ 的 $S_H = \{S_{e,H}, S_{g,H}\} \in \mathcal{S}_2(H)$ 有 $X_1(H) = X_{S_H}$，对应到 $T_2' \in \mathcal{T}_{NI}(G')$ 的 $T_H \in \mathcal{T}_{NI}(H)$ 有 $X_2(H) = X_{T_H}$. 因 T_2 经过 w 从 S_e 到 S_g，所以我们可以找到某点

$$w_H \in \{w_\alpha \mid d_H(w_\alpha) \geqslant 4, w_\alpha \in V(H) - V(G' - w)\},$$

使得 T_H 经过 w_H 从 $S_{e,H}$ 到 $S_{g,H}$. 由 3), $X_1(w_H) \cap X_2(w_H) = \varnothing$, 所以用 H, w_H, S_h, T_H 分别代替 G', w, S', T_2', 可将情形 2) 转化为情形 1). 因此, 应用引理 7.16 知, 从 S_H 通过 w_H 处的一次 κ- 吸收得到 $T_w^H \in \mathcal{T}_{NI}(H)$. 依照情形 1) 的讨论方法可得 T_w^H 与 T_H 是 κ_{NI}- 相关的, 这等价于对应到 T_w^H 的 G 的欧拉迹 T_w 与 T_2 是 κ_{NI} 相关的, 进而利用同样的记号得到 T_1 与 T_w 是 κ_{NI}- 相关的. 因此, T_1 与 T_2 是 κ_{NI}- 相关的. 这一矛盾证明了情形 2).

在各种可能情况下均得到矛盾, 定理得证.

值得注意的是, 图 G 的曲面嵌入和得到的各种图对定理 7.17 的公式和证明并非是必要的. 真正重要的是对每个 $v \in V(G)$ 已给出 $O^+(v)$, 这足以确定非交叉转移. 另一方面, 从这里给出的证明过程可以看到, 找到从转移 T_1 到转移 T_2 的合适的 κ_{NI}- 变换所需要构造的各类图自始至终地依赖于相同的曲面, 进而由定理 7.17 的证明可知, 在一般情形下, 建立合适的 κ_{NI}- 变换的 (算法) 工作要比在 κ_X 相关情形下更多. 当 $S \in \mathcal{S}_2(G)$ 没有交叉转移的情形下, 在 w 处不存在 κ- 吸收, 使得 $T_w \in \mathcal{T}_{NI}(G)$ 满足 $|X_{T_w} \cap X_2| > |X_1 \cap X_2|$ (图 7.3), 所以必须从 T_1 产生 S, 使得 $|X_S \cap X_2| > |X_1 \cap X_2|$, 然后不涉及 $X_1(w) \cap X_2(w)$ 的任何元素在 w 处作一次 κ- 吸收.

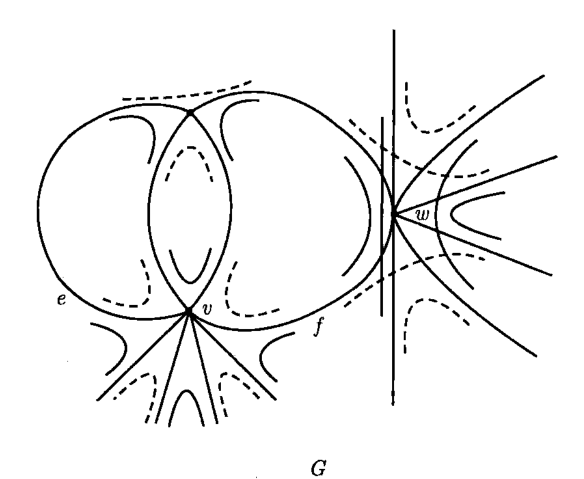


图 7.3 连通的平面欧拉图 G, T_1 (T_2) 为 G 的欧拉迹, 其转移由小 (虚) 弧标出. T_1 在 v 点包含 e 和 f 的一个 R- 分拆, 得到不具有相交转移的 $S \in \mathcal{S}_2(G)$. 由 $X_i(w)$ $(i = 1, 2)$ 的结构, 随后 w 处的 κ- 吸收产生 $T_w \in \mathcal{T}_{NI}(G)$ 推得 $|X_{T_w}(w) \cap X_2(w)| = |X_1(w) \cap X_2(w)| = \varnothing$

最后, 我们回到连通 4- 正则图 G 的欧拉迹的 κ_α- 变换. 回想图 G 的 2- 因子分解 $\{Q_1, Q_2\}$, $\mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 表示边在 Q_1 和 Q_2 交替出现的 G 的欧拉迹的集合 (见推论 7.13 前的讨论). 作为定理 7.10 的另一个应用, 我们得到以下结论, 其中 $\mathcal{P}(G, \kappa_\alpha)$ 表示 $\mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 在 κ_α- 相关下的等价类划分.

推论 7.18 设 G 是连通的 4- 正则图，$\{Q_1, Q_2\}$ 是 G 的 2- 因子分解 (由推论 7.3 知其存在)，则 $|\mathcal{P}(G, \kappa_\alpha)| = 1$.

证明 $S = Q_1 \cup Q_2$ 是 G 的特殊类型的圈分解，它所导出的转移系统记为 X_S，分别由 S 和 X_S 的定义得到

$$\mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2) = \mathcal{T}(G, X_S),$$

并且在这种情况下，κ_α- 相关与 κ_{X_S}- 相关是完全一致的概念，所以

$$\mathcal{P}(G, \kappa_\alpha) = \mathcal{P}(G, \kappa_{X_S}).$$

由此及定理 7.10 证得推论 7.18.

在 κ_α- 变换情形下，类似于将定理 7.10 推广得到定理 7.12 一样的方法可推广这一概念和推论 7.18，即假设 G 是一个连通的欧拉图，有偶数条边，则 G 可分解成边不交的欧拉子图 G_1 和 G_2，对任意一点 $v \in V(G)$ 有 $d_{G_1}(v) = d_{G_2}(v)$ (见推论 6.2).

用 $\mathcal{T}_\alpha(G; G_1, G_2)$ 记交替地经过 G_1 和 G_2 的边的欧拉迹的集合. 对应地推广 κ_α- 变换和 κ_α- 相关的概念，则如同从定理 7.10 推得推论 7.18 一样，从定理 7.12 可推得如下结论. 因此，我们将它的证明留给读者 (练习 7.9).

推论 7.19 设 G 是一个有偶数条边的连通欧拉图，$\{G_1, G_2\}$ 是将图 G 分解所得的两个子图，并且具有相同的度序列 $\{d(v_1), \cdots, d(v_p)\}$，则对任意 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_\alpha(G; G_1, G_2)$，$T_1$ 和 T_2 是 κ_α- 相关的.

然而，在 4- 正则图的情况下，对固定的 $T \in \mathcal{T}_\alpha(G; G_1, G_2)$，可以如下将 G 的点分为奇点和偶点. 记 T 有如下形式：

$$T = v_1, e_1, v_2, e_2, \cdots, e_{i-1}, v_i, e_i, \cdots, e_j, v_{j+1}, e_{j+1}, \cdots, e_q, v_1,$$

并设 $v_i = v_{j+1}$，考虑一个片断

$$S_{i,j} = v_i, e_i, \cdots, e_j, v_{j+1} \ ,$$

并将片断 $S_{i,j}$ 反向得到一个欧拉迹 T^*，即

$$T^* = v_1, e_1, \cdots, e_{i-1} S_{i,j}^{-1}, e_{j+1}, \cdots, e_q, v_1.$$

从 T 和 T^* 的定义得到 $T^* \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 当且仅当 $|E(S_{i,j})| \equiv 1 (\bmod 2)$.

考虑 $|E(S_{i,j})| \equiv 0 (\bmod 2)$ 的情形，则一个包含 $v := v_i = v_{j+1}$ 的 κ_α- 变换不可能是一个 κ- 变换. 另一方面，

$$|E(S_{i,j})| \equiv 0 (\bmod 2) \ \text{推得}\ V(\langle E(S_{i,j}) \rangle) \cap V(\langle E(G) - E(S_{i,j}) \rangle) \neq \{v\};$$

否则，$\langle E(S_{i,j}) \rangle$ 除了含 2- 次的点 v 外，只能含 4- 次的点，即 $\langle E(S_{i,j}) \rangle$ 同胚于有奇数条边的 4- 正则图，这不可能存在. 于是存在另一个 2- 次点 $w \in V(\langle E(S_{i,j}) \rangle) - \{v\}$，并且 T 有如下形式：

$$T = v_1, e_1, \cdots, e_{i-1}, v_i, e_i, \cdots, e_{m-1}, v_m, e_m, \cdots,$$
$$e_j, v_{j+1}, e_{j+1}, \cdots, e_{n-1}, v_n, e_n, \cdots, e_q, v_1,$$

其中 $w = v_m = v_n$ 且

$$|\{e_{r-1}, e_r\} \cap E(Q_1)| = |\{e_{r-1}, e_r\} \cap E(Q_2)| \quad 对\ r = i, j+1, m, n\,.$$

现在我们证明这些等式蕴涵了包含 v 和 w 点的 κ_α- 变换的存在性，对这样的 $\kappa_\alpha = \kappa''\kappa'$ 和 $S_{j+1,i-1} := v_{j+1}, e_{j+1}, \cdots, e_q$，$v_1$，$e_1, \cdots$，$e_{i-1}, v_i$，我们可以定义

$$\kappa'(T) := S' = \{S_{i,j}, S_{j+1,i-1}\}\ ,$$

正因为 $|E(S_{i,j})| \equiv 0 (\bmod 2)$，则 $\kappa'(T)$ 与 $S := Q_1 \cup Q_2$ 相容. 如果我们用 $S_{m-1,m}$ 和 $S_{n-1,n}$ 分别记从 $S_{i,j}$，$S_{j+1,i-1}$ 通过起始终止于 w 点的圈旋转得到的 T 的片断，则对任何 $S^*_{n-1,n} \in \{S_{n-1,n}, S^{-1}_{n-1,n}\}$ 有

$$T^* = S_{m-1,m},\quad S^*_{n-1,n} \in \mathcal{T}(G).$$

又因为 S' 与 S 相容，则

$$T^* \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2) \quad 仅对一个\ S^*_{n-1,n} \in \{S_{n-1,n}, S^{-1}_{n-1,n}\},$$

即有一个包含 w 点的 κ- 吸收，使得

$$\kappa''(S') = T^*,\ 即对\ \kappa_\alpha = \kappa''\kappa'\ 有\ \kappa_\alpha(T) = T^*\ .$$

在一般情况下，如果对 T 固定一个起始点 v_1 和一条起始边 e_1，对任意点 $v \in V(G)$，T 定义了唯一的迹分解 $S'_v = \{S_{1,v}, S_{2,v}\}$ (每一个元素均起始终止于点 v)，进而由 G 是 4- 正则图，$|E(G)| \equiv 0 (\bmod 2)$，所以

$$|E(S_{1,v})| \equiv |E(S_{2,v})|\ (\bmod\ 2)\ . \tag{1}$$

从这一恒等式得到下面更一般的定义.

定义 7.20 设 G 为连通的 4- 正则图，T 为起始于 $v_0 \in V(G)$ 沿着 $e \in E(v_0)$ 的 G 的一条欧拉迹，考虑对任意一点 $v \in V(G)$，包含 T 的两个片断，起始终止于 v 点的唯一的迹分解 $S_v = \{S_{1,v}, S_{2,v}\}$，则根据 $|E(S_{1,v}|$ (因而由 (1)，$|E(S_{2,v})|$) 是偶数或奇数，称 v 是 ***T*- 偶点** 或 ***T*- 奇点**.

事实上，由式 (1)，对给定的欧拉迹 T，T- 偶点和 T- 奇点的分类独立于起始点 v_1 和起始边 e_1 的选取 (练习 7.10). 因此，由 G 的每一个欧拉迹 T 可以将 $V(G)$ 划分为 T- 偶点和 T- 奇点，此划分仅依赖于 T.

从定义 7.20 和前面的讨论，κ_α- 变换在 G 的 T- 奇点时，它才是 κ- 变换，同时，一个 κ_α- 变换 (也是 κ^*- 变换) 由一个在 T- 偶点的 κ- 分拆和在某一 (T- 偶或 T- 奇) 点 $w \in V(\langle E(S_{1,v})\rangle) \cap V(\langle E(S_{2,v})\rangle)$ 的 κ- 吸收组成，然而，并不是在任何情况下 w 点一定是 T- 偶点 (或 T- 奇点). 如图 7.4 中的 G_1 和 G_2 所示，欧拉迹 $T_{i,j} \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_{i,1}, Q_{i,2})\,(i,j=1,2)$ 满足等式

$$\kappa'(T_{i,1}) = S'_{i,v}, \quad \kappa''(S'_{i,v}) = T_{i,2},$$

其中 κ- 分拆 κ' 作用在 $T_{i,1}$- 偶点 v 处，同时 κ- 吸收 κ'' 作用在 w 处，而 w 在 G_1 中是 $T_{1,1}$- 奇点，在 G_2 中是 $T_{2,1}$- 偶点. 因此，在 G_1 中可能有一个包含 w 的 κ_α- 变换满足

$$\kappa(T_{1,1}) = T^* \in \mathcal{T}_\alpha(G_1; Q_{1,1}, Q_{1,2}) \ ,$$

$$X_{T^*}(v) = X_{T_{1,1}}(v), \quad X_{T^*}(w) = X_{T_{1,2}}(w), \quad X_{T^*}(x) = X_{T_{1,1}}(x) = X_{T_{1,2}}(x).$$

然而，v 确实是 T^*- 奇点，因而存在一个 κ_α- 变换，使得 $\kappa(T^*) = T_{1,2}$，即上述将 $T_{1,1}$ 变换到 $T_{1,2}$ 的 κ^*- 变换可由是 κ- 变换的两个 κ_α- 变换代替. 然而，在 $T_{2,1}$ 和 $T_{2,2}$ 的情况下，这种代替是不可能的. 正如我们马上要见到的，这种现象经常发生.

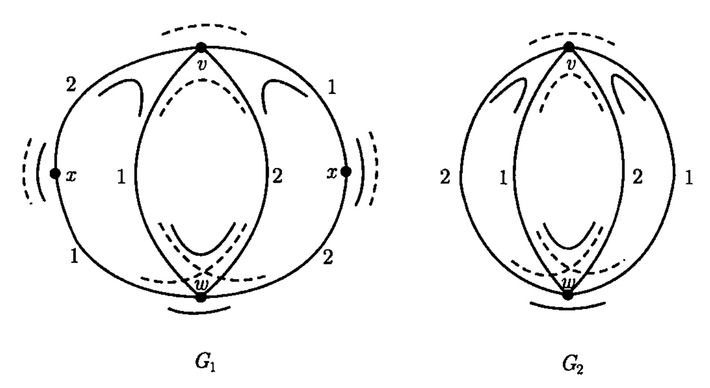


图 7.4 具有欧拉迹 $T_{i,j} \in \mathcal{T}_\alpha(G_i; Q_{i,1}, Q_{i,2})\,(i=1,2)$ 的两个 4- 正则图 G_i，其中 $Q_{i,k}$ 的边用 $k(k=1,2)$，标记 $T_{i,1}$ 的走势由小弧标出，同时 $T_{i,2}(i=1,2)$ 的走势由虚弧标出. 由于 $T_{1,1}$ 和 $T_{1,2}$ 是在 $x \in V(G_1)$ 定义同一转移，所以用两个 2- 次点表示 x. v 在 G_i 中是 $T_{i,1}$- 偶点 $(i=1,2)$，同时 w 在 G_1 中是 $T_{1,1}$- 奇点，在 G_2 中是 $T_{2,1}$- 偶点

定义 7.21 设 G 是一个连通的 4- 正则图，$T_1, T_2 \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1.Q_2)$，假设对 $S = Q_1 \cup Q_2$ 和某 $v, w \in V(G)$ 有 $\kappa'(T_1) = S' \in \mathcal{S}_2(G; X_S), \kappa''(S') = T_2$，其中 κ' 是 v 点处的 κ- 分拆，κ'' 是 w 点处的 κ- 吸收. 称 $\kappa_\alpha := \kappa''\kappa'$ 是**可约的或不可约的**(关于 v, w) 取决于 w 是 T_1- 奇点还是 T_1- 偶点 (注意因为 κ_α 是 κ^*- 变换，所以在任何情况下，v 是 T_1- 偶点).

引理 7.22 设 $G, T_1, T_2, S, S', \kappa_\alpha = \kappa''\kappa'$，$v$ 和 w 是如定义 7.21 中符号，则下列命题成立：

1) κ_α 是可约的当且仅当存在 $T^* \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 以及 κ- 变换 κ_w 和 κ_v 分别包含 w 和 v 点，满足 $\kappa_w(T_1) = T^*$ 和 $\kappa_v(T^*) = T_2$;

2) κ_α 是不可约的当且仅当存在 $S'' \in \mathcal{S}_2(G, X_S)$ 满足 $\bar{\kappa}'(T_1) = S''$, $\bar{\kappa}''(S'') = T_2$，其中 $\bar{\kappa}'$ ($\hat{\kappa}''$) 是 w (v) 处的 κ- 分拆 (κ- 吸收).

证明 1) 设 κ_α 是可约的，由定义 7.21，w 是 T_1- 奇点. 因此，由推论 7.19 之后的讨论和定义 7.20，存在 $T^* \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 以及一个是 κ- 变换的 κ_α- 变换 κ_w，使得 $\kappa_w(T_1) = T^*$ 且 $X_{T^*} - X_{T^*}(w) = X_{T_1} - X_{T_1}(w)$.

我们可以得到 v 是 T^*- 奇点，当 T_1 表示成如下形式，这一论断是显然的:

$$T_1 = v_0, e_1, v_1, f_1, \cdots, h_i', v_i, h_i'', \cdots, f_j, v_j, e_{j+1}, \cdots, h_k'', v_k, h_k', \cdots, f_m, v_m,$$

其中 $v_0 = v_j = v_m = v$ 且 $v_i = v_k = w$，进而因 v 是 T_1- 偶点，不失一般性，我们假设 $e_1, e_{j+1} \in E(Q_1), f_1, f_j, f_m \in E(Q_2)$. 由于 w 是 T_1- 奇点，对满足 $\{r, s\} = \{1, 2\}$ 两种选择之一的 r, s，我们有

$$\{h_i', h_k'\} \subseteq E(Q_r), \quad \{h_i'', h_k''\} \subseteq E(Q_S), \tag{*}$$

因而 T^* 有下列形式:

$$T^* = v_0, e_1, v_1, f_1, \cdots, h_i', v_i, h_k'', \cdots, e_{j+1}, v_j, f_j, \cdots, h_i'', v_i, h_k', \cdots, f_m, v_m,$$

即起始于 $v = v_0$ 点，沿着 $e_1 \in E(Q_1)$，在经过 $e_{j+1} \in E(Q_1)$ 后再次到达 $v = v_j$，也即 v 是 T^*- 奇点.

因此，存在一个也是 κ- 变换的 κ_α- 变换 κ_v，满足 $\kappa_v(T^*) = T_2^* \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 且 $X_{T^*} - X_{T^*}(v) = X_{T_2^*} - X_{T_2^*}(v)$. 因此，

$$\begin{aligned} X_{T_1} - (X_{T_1}(v) \cup X_{T_1}(w)) &= X_{T_2^*} - (X_{T_2^*}(v) \cup X_{T_2^*}(w)) \\ &= X_{T_2} - (X_{T_2}(v) \cup X_{T_2}(w)) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &(X_{T_1}(v) \cup X_{T_1}(w)) \cap (X_{T_2^*}(v) \cup X_{T_2^*}(w)) \\ &= (X_{T_1}(v) \cup X_{T_1}(w)) \cap (X_{T_2}(v) \cup X_{T_2}(w)) = \varnothing. \end{aligned}$$

由这些等式及 $T_1, T_2, T_2^* \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 得到 $T_2 = T_2^*$.

反之，假设对 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$，在 $T^* \in \mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 及 κ- 变换 κ_w 和 κ_v(分别包含 w 和 v 点) 满足 $\kappa_w(T_1) = T^*$ 及 $\kappa_v(T^*) = T_2$. 由定义 7.20 及此后的

讨论得 w 是 T_1- 奇点. 另一方面，既然 $\kappa_\alpha = \kappa''\kappa'$ 是 κ^*- 变换，v 一定是 T_1- 偶点 (见定义 7.21). 因此，由定义 7.21 得 $\kappa_\alpha = \kappa''\kappa'$ 是可约的. 这就证明了 1).

2) 若 κ_α 是不可约的，则 w 也是 T_1- 偶点. 因此，利用证明 1) 的第一部分中相同的符号和相同意义，式 (*) 成立，我们得到

$$T_1 = v_0, e_1, v_1, f_1, \cdots, h'_i, v_i, h''_i, \cdots, f_j, v_j, e_{j+1}, \cdots, h'_k, v_k, h''_k, \cdots, f_m, v_m.$$

因此，改变在 $w = v_i = v_k$ 处的转移，但不违反与 X_S 的相容性，我们得到覆盖 $E(G)$ 的两条边不交的子迹

$$S''_{1,w} = v_i, h''_i, \cdots, f_j, v_j, e_{j+1}, \cdots, h'_k, v_k,$$
$$S''_{2,w} = v_k, h''_k, \cdots, f_m, v_m, e_1, v_1, f_1, \cdots, h'_i, v_i,$$

即对 w 处某一 κ- 分拆 $\bar{\kappa}'$ 有 $S'' := \{S''_{1,w}, S''_{2,w}\} \in \mathcal{S}_2(G, X_S)$ 及 $\bar{\kappa}'(T_1) = S''$.

然而，通过旋转，我们可以将 S'' 元素重新记为

$$S'_{1,v} = v_j, e_{j+1}, \cdots, h'_k, v_k, h''_i, \cdots, f_j, v_j,$$
$$S'_{2,v} = v_m, e_1, v_1, f_1, \cdots, h'_i, v_i, h''_k, \cdots, f_m, v_m,$$

即对某一 $T_2^* \in \mathcal{T}_\alpha(G;, Q_1, Q_1)$，由 $S' = \{S'_{1,v}, S'_{2,v}\}$ 得到 $\kappa'(T_2^*) = S'$. 由于 S' 是由 S'' 通过将表示其元素的序列进行循环旋转得到，并由于 κ- 分拆的一次逆运算是一次 κ- 吸收，因此，对 v 处的 κ- 吸收 $\bar{\kappa}''$ 有 $\bar{\kappa}''(S'') = T_2^*$，所以如 1) 证明中的第一部分一样有 $T_2^* = T_2$.

反之，假设两个 κ_α- 变换 $\kappa''\kappa'$ 和 $\bar{\kappa}''\bar{\kappa}'$ 满足 $\kappa''(\kappa'(T_1)) = \bar{\kappa}''(\bar{\kappa}'(T_1)) = T_2$，其中 κ' 是在 v 的一个 κ- 分拆，$\bar{\kappa}'$ 是在 w 的一个 κ- 分拆，则 v 和 w 都是 T_1- 偶点 (见定义 7.20 后的讨论)，因此，κ_α 是不可约的. 这就证明了 2)，因而引理 7.22 得证.

引理 7.22 意味着一个 κ_α- 变换 $\kappa''\kappa'$ 是可约的当且仅当可避免绕过 $\mathcal{S}_2(G, X_S)$，应用两个 κ- 变换 κ_w 和 κ_v，每个 κ- 变换都得到 $\mathcal{T}_\alpha(G; Q_1, Q_2)$ 的一个元素. 这一事实，即保持 κ- 变换，而不是合并一个 κ- 分拆和一个 κ- 吸收，说明了我们为什么要采用术语可约. 另一方面，若 $\kappa''\kappa'$ 是不可约的，κ- 分拆起始于点 v 还是点 w 是无关的，即在此情形下，乘积 $\kappa''\kappa'$ 在如下意义下是可交换的: 变换 κ'' 和 κ' 看成作用在转移系统上的算子，得到 $\kappa''\kappa'(T_1) = \kappa'\kappa''(T_1) = T_2$，其中 $\kappa'(T_1), \kappa''(T_1) \in \mathcal{S}_2(G, X_S)$ 且在一般情形下有 $\kappa'(T_1) \neq \kappa''(T_1)$.

总结推论 7.19 后的讨论，我们得到基于推论 7.18 的下列结果:

定理 7.23 设 G 是一个连通的 4- 正则图，有 2- 因子分解 $\{Q_1, Q_2\}$. 对任意两个欧拉迹 $T, T' \in \mathcal{T}_a(G; Q_1, Q_2)$ 及 $m > 1$，存在一列欧拉迹 $T_0, \cdots, T_m$ 满足

$T_0 = T, T_m = T'$，$T_i \in \mathcal{T}_a(G; Q_1, Q_2)$ $(i = 0, \cdots, m)$，并且 T_i 是由 T_{i-1} 应用一次 κ_a- 变换所得到的 $(i = 1, 2, \cdots, m)$. 若这个 κ_a- 变换是一个 κ- 变换，则它作用在 T_{i-1} 奇点上. 然而若这是一个 κ^*- 变换, 则它是一个不可约的 κ_a- 变换，应用于两个 T_{i-1}- 偶点 v 和 w 上，其中 w 属于起终于 v 点的 T_{i-1} 的两个片断上. 在此情况下，与是在 v 处应用 κ- 分拆还是在 w 处应用 κ- 吸收无关，反之亦然.

应该注意到定理 7.23 将在 G 中扮演中心角色. 撒比达斯解决问题的方法被称为**相容性的问题**的方法 [SABI84a]. 事实上，定理 7.23 可被演绎为 [SABI84a] 中 (7.7) 的定理，那篇文章中包含了推导出定理 7.23 的大部分论述. 对撒比达斯解决相容性问题的方法简短描述，以及相容性问题的其他各种方法及各个方面的讨论，有兴趣的读者可参见文献 [FLEI88a].

7.3 有向图中的欧拉迹的变换

正如我们利用定理 7.10 和定理 7.12 得到关于无向图中特殊欧拉迹的各种结果，应用定理 7.12 可得到关于有向图的类似定理 7.5 的结论. 为了这一目的，记 $\mathcal{T}(D)$ 记为连通欧拉有向图 D 的所有欧拉迹的集合，并类似地定义 κ-，κ^*-，κ_1- 变换、κ- 分拆和 κ- 吸收. 当然，这些运算所定义的在点 $v \in V(D)$ 的转移均包括与 v 点关联的入半弧和出半弧. 这就是为什么对一个有向图 D，κ- 变换不足以将 $T \in \mathcal{T}(D)$ 变换到 $\mathcal{T}(D)$ 的每个其他元素 (图 7.5). 然而，正如下面将要见到的一样，从 κ_1- 变换仍足以得到关于有向图类似定理 7.5 的结果.

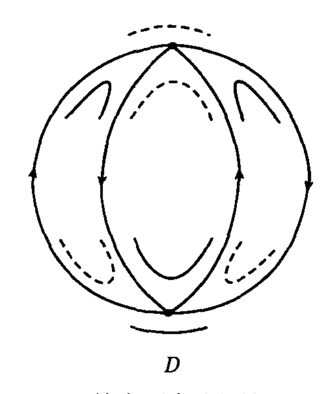


图 7.5 D 恰有两个欧拉迹 T_1 和 T_2 (分别由小弧和虚的小弧标出). 对任何两个可能的 κ- 变换有 $\kappa(T_1) \neq T_2$，但对 $\kappa^* = \kappa''\kappa'$ 的两种可能的 κ^*- 变换均有 $\kappa^*(T_1) = T_2$ (将此与练习 7.5 比较)

正如在无向图情况下，对有向图也可定义 κ-,κ^*-,κ_1- 相关，并能证明这些概念均定义了 $\mathcal{T}(D)$ 上的等价关系，这些仍留作练习 (练习 7.11). 当然，$\mathcal{T}(D)$ 上的这样的等价关系又如前一样给出了 $\mathcal{T}(D)$ 一个划分. 为了达到我们的目的，将考虑一个划分 $\mathcal{P}(D, \kappa_1)$.

定理 7.24 设 D 是一个连通的欧拉有向图，则 $|\mathcal{P}(D, \kappa_1)| = 1$.

证明 我们的目的是从定理 7.12 推导出定理 7.24. 因此，考虑给定的连通欧拉有向图的基图 G，G 为一个连通的欧拉图. 对每个 $v \in V(D)$，令

$$P_v(D) := \{(A_v^*)^+, (A_v^*)^-\}.$$

为将 A_v^* 划分为与 v 点外关联的半弧等价类和与 v 点内关联的半弧等价类的一个划分. 既然 $V(D) = V(G)$, 对相同的 v 点可定义

$$P_v(G) := \{(E_v^*)^+, (E_v^*)^-\},$$

其中对 $e = vx \in E(G)$, $e' \in (E_v^*)^+$ $((E_v^*)^-)$ 当且仅当对应的弧 $a \in A(D)$, $a' \in (A_v^*)^+$ $(a' \in (A_v^*)^-)$，即当且仅当 $a = (v,x)$ $(a = (x,v))$. 这一定义是为了能包含重弧 (在上述情况下，每个具有 (v,x) 和 (x,v) 形式的弧必须被区别考虑)，D 中的环 (v,v) 也是一样 (这种情况一个半环属于 $(E_v^*)^+$，另外一个半环属于 $(E_v^*)^-$). 最后定义

$$P(G) := \bigcup_{v \in V(G)} P_v(G).$$

由定义，$P(G)$ 是 G 的一个划分系统，满足对任一 $v \in V(G) = V(D)$ 和任一 $K \in P_v(G)$ 有 $|K| = \frac{1}{2}d(v)$. 因此，由定理 6.1 有 $\mathcal{T}(G, P(G)) \neq \varnothing$，由定理 7.12 得 $|\mathcal{P}(G, \kappa_{P(G)})| = 1$. 然而，由 $P(G)$ 的定义，在 G 的 $P(G)$- 相容欧拉迹和 D 的欧拉迹之间存在 1-1 对应. 再经相同的讨论，$T_G, T_G' \in \mathcal{T}(G, P(G))$ 是 $\kappa_{P(G)}$- 相关的当且仅当相应的元素 $T_D, T_D \in \mathcal{T}(D)$ 是 κ_1- 相关的，即 $|\mathcal{P}(D, \kappa_1)| = 1$，定理得证.

观察定理 6.1 的上述应用以及 $\mathcal{T}(G, P(G))$ 与 $\mathcal{T}(D)$ 间的双射就可得到定理 4.8 的第一部分的证明.

另一种将任一个 $T \in \mathcal{T}(D)$ 变换到另一个 $T' \in \mathcal{T}(D)$ 的方法已被编入 [XIAX84a]①. 在这种方法中，没有如 κ_1- 变换情形进行迹分解，而是每一步都将 $\mathcal{T}(D)$ 中一个元素变换到 $\mathcal{T}(D)$ 中另一个元素. 这种方法的工具将由下面的定义给出.

定义 7.25 设 D 是一个连通的欧拉有向图，某一个 $T \in \mathcal{T}(D)$ 能表示成

$$T = \cdots, u, T(u,v), v, \cdots, u, T'(u,v), v, \cdots,$$

其中 $T(u,v)$ 和 $T'(u,v)$ 是两个连接 u 和 v 的弧不交的迹 (可能有 $u = v$)，并设 $A(T(u,v)) \cup A'(T(u,v)) \neq A(D)$ (当 $u \neq v$ 时，这一假设在任何情形下均成立)，则称

$$T' = \cdots, u, T'(u,v), v, \cdots, u, T(u,v), v, \cdots$$

① 这篇文章已用中文发表，英文摘要不足以对实质有彻底的了解. 维也纳的杜兹 · 沃尔夫刚 · 鲁贝特已经将该文章中最重要的几段翻译出来，我希望重新准确地翻译以确保讨论. 不管怎样，我还是要表达我对杜兹 · 沃尔夫刚 · 鲁贝特花时间翻译该文的主要部分表示感谢.

是从 T 通过交换 $T(u,v)$ 与 $T'(u,v)$ 的 τ- 变换所得到的. 我们用正式的等式 $\tau(T)=T'$ 来表示.

注 7.26 1) 夏在文中用的是 T- 变换而不是 τ- 变换，但是既然我们用希腊字母 κ 表示各种变换，T 通常表示一个欧拉迹，所以用 τ 来代替 T 来表示上述变换似乎更合理.

2) 从定义 7.25 不仅可得到对 $T\in\mathcal{T}(D)$ 和 $T'=\tau(T)$ 有 $T'\in\mathcal{T}(D)$，甚至还可以得到 $T'\neq T$，这是由条件 $A(T(u,v))\cup A(T'(u,v))\neq A(D)$ 所保证得到的. 这就是说，与上述各种变换不同，τ- 变换不可能是恒等变换. 于是得到这样的问题：什么样的有向图恰有一个欧拉迹? 回答是足够简单的：一个连通的欧拉有向图恰有一个欧拉迹当且仅当 D 的任何一个圈是 D 的一个块且 $\Delta(D)\leqslant 4$. 这一命题的证明留作练习.

3) 然而若 $T'=\tau(T)$，则对于在将 T 变换到 T' 中的同一对迹 $T(u,v),T'(u,v)$ (见定义 7.25)，我们得到 $\tau(T')=T$，即 τ 在某种情形下满足等式 $\tau^2(T)=\tau(T')=T$. 因此，自然就称 $T,T'\in\mathcal{T}(D)$ 是 τ- 相关的，如果 $T=T'$ 或存在一列 $T_0,\cdots,T_m$ $(m>0)$，其中 $T_i\in\mathcal{T}(D)$ $(i=0,\cdots,m)$，使得 $T_0=T,T_m=T'$ 且 $T_i=\tau(T_{i-1})$ $(i=1,\cdots,m)$. 再者，τ- 相关定义了 $\mathcal{T}(D)$ 上的一个等价关系，同时又定义了一个划分 $\mathcal{P}(D,\tau)$(见练习 7.13).

[XIAX84a]中的主要结论如下，但这里的证明不同于所引用的文献中给出的.

定理 7.27 对任一连通的欧拉有向图 D 有 $|\mathcal{P}(D,\tau)|=1$.

证明 若 $|\mathcal{T}(D)|=1$，既然 $T\in\mathcal{T}(D)$ 与自己是 τ- 相关的唯一的迹，定理的结论是平凡的，所以我们设 $|\mathcal{T}(D)|>1$.

假设定理对 D 不成立，则存在 $T,T'\in\mathcal{T}(D)$，它们不是 τ- 相关的. 假设选取的 T 和 T' 在满足 $\sigma(D):=\sum\limits_{v\in V(D)}(\mathrm{od}(v)-1)=|A(D)|-|V(D)|$ 尽可能小的情况下，使得 $|X_T\cap X_{T'}|$ 尽可能大. 为了方便起见，我们可由以上限制得到 D 的某些性质:

$$\text{对任意 } v\in V(D), X_T(v)\cap X_{T'}(v)=\varnothing \text{ 或者 } d(v)=2; \tag{1}$$

否则，设 v 是满足 $X_T(v)\cap X_{T'}(v)\neq\varnothing$ 且 $d(v)>2$ 的点，记 $t=\{e',f'\}\in X_T(v)\cap X_{T'}(v)$，将弧 e 和 f 分裂开形成一个新的欧拉有向图 D_1(注意 $\{e,f\}\cap A_v^+\neq\varnothing\neq\{e,f\}\cap A_v^-$). 欧拉迹 T 和 T' 对应到 D_1 的欧拉迹 T_1,T_1'，因而 D_1 是连通的，进而还有 $X_{T_1}=X_T,X_{T_1'}=X_{T'}$，所以 $|X_T\cap X_{T'}|=|X_{T_1}\cap X_{T_1'}|$. 然而由于 $|A(D_1)|=|A(D)|$，所以 $\sigma(D_1)<\sigma(D)$，但是 $|V(D_1)|=|V(D)|+1$，因此，T_1 与 T_1' 是 τ- 相关的. 在 D_1 对于将 T_1 变换到 T_1' 的 τ- 变换中用到的任一 $T_1(x,y)$，我们不能得到 $v_{e,f}\in\{x,y\}$，其中 $v_{e,f}\in V(D_1)-V(D)$. 因为 D_1 中不存在两条开 (或闭) 的弧不交的迹，它们起始 (或终止) 于 $v_{e,f}$，所以 $T_1(x,y)$ 对应到 D 中的开迹

$T(x,y)$ 当且仅当 $T_1(x,y)$ 是一条开迹. 因此，T_1 与 T_1' 是 τ- 相关的等价于说 T 与 T' 是 τ- 相关的，与假设矛盾.

现考虑任意 $v \in V(D) - V_2(D)$，并设 $t \in X_{T'}(v)$ 是任意选取的. 记 $t = \{e(v)^-, e(v)^+\}$，其中 $e^- \in A_v^-$, $e^+ \in A_v^+$ 且选取 $t_1, t_2 \in X_T(v)$，使得 $t_1 = \{f(v)^-, e(v)^+\}$, $t_2 = \{f(v)^+, e(v)^-\}$. 由式 (1) 得到 $t_1 \neq t_2$ 且 $f^- \in A_v^-, f^+ \in A_v^+$.

此时，一条起始于 v 沿着 e^+ 通过 T 的路径在经过 f^+ 或 f^- 之前就经过 e^- 到达 v 点，所以 T 包含一个片断 $S(e^+,e^-) \subset T$. 另一方面，T' 也可看成起始于 v 沿着 e^+ 的一条欧拉迹，e^- 是其最后一条弧. 因此，对某点

$$w \in V(\langle A(S(e^+,e^-))\rangle) \cap V(\langle A(T) - A(S(e^+,e^-))\rangle),$$

存在转移 $t_3, t_4 \in X_{T'}(w)$，使得

$$t_3 = \{g(w)^-, h(w)^+\}, \quad t_4 = \{g(w)^+, h(w)^-\},$$

其中 $g^+ \in A_w^+ \cap A(S(e^+,e^-))$，$g^- \in A_w^- \cap A(S(e^+,e^-))$，$h^+ \in A_w^+ \cap (A(D) - A(S(e^+,e^-)))$，$h^- \in A_w^- \cap (A(D) - A(S(e^+,e^-)))$，$t_g = \{g(w)^+, g(w)^-\} \in X_T(w)$(图 7.6 和定理 7.17 的证明).

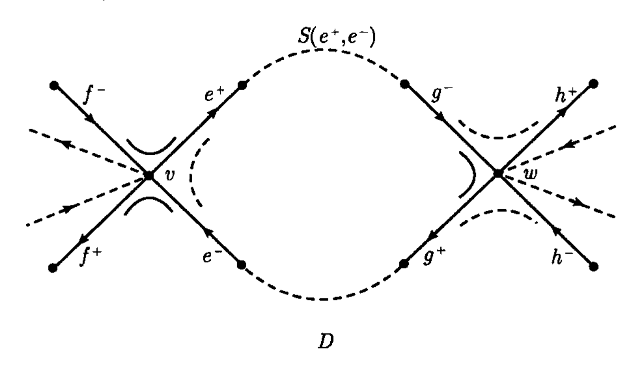


图 7.6 欧拉迹 $T, T' \in \mathcal{T}(D)$，其走势由小弧 (小虚弧) 标出. 可能 $v = w$. 片断 $S(e^+,e^-) \subset T$ 包含 g^- 和 g^+，但不包含 f^-, f^+, h^-, h^+

可能有 $v = w$. 但在任何情况下，T 可表示成下列形式:

$$T = v, S(e^+,e^-), v, f^+, \cdots, h^-, w, \cdots, f^-, v,$$

即存在连接 v 和 w 的 T 的一个真子迹 $T'(v,w)$，f^+ 是第一条弧，h^- 是最后一条弧. $T'(v,w)$ 不包含 $S(e^+,e^-)$ 中任何一条弧. 类似地有 $S(e^+,e^-)$ 包含一条子迹 $T(v,w)$，e^+ 为其第一条弧，g^- 为其最后一条弧，写成

$$S(e^+,e^-) = T(v,w), w, T(w,v).$$

可以将 T 表示成更清楚的形式

$$T = v, T(v,w), w, T(w,v), v, T'(v,w), w, \cdots, f^-, v.$$

因此，由互换 $T(v,w)$ 与 $T'(v,w)$ 的 τ- 变换得到 $T^* \in \mathcal{T}(D)$，$T \neq T^*$，即

$$T^* = v, T'(v,w), w, T(w,v), v, T(v,w), w, \cdots, f^-, v.$$

可能有 $T^* = T'$. 然而在任何情况下，我们有 $d(v) > 2, d(w) > 2$ 且 $t, t_4 \in X_{T^*} \cap X_{T'} \supset X_T \cap X_{T'}$. 由此和式 (1)，以及 T 和 T' 的选取得 T^* 与 T' 是 τ- 相关的 (当 $T^* = T'$ 时也成立)，所以由 $\tau(T) = T^*$ 得到 T 和 T' 是 τ- 相关的. 这矛盾于 T 和 T' 的选取，最终证明了定理的有效性.

由于时间和篇幅的原因，我们将上述对变换的研究限制在有向图中"无限制"的欧拉迹上. 有兴趣的读者可自行研究恰当的能将任一 $P(D)$- 相容 ($(D - D_1)$- 偏爱) 的欧拉迹变换到另一个这样的欧拉迹的变换. 尽管我自己没有研究这类变换，但我相信类似于无向图中情形，和 κ-,κ^*- 变换足以对付有向图中的这一问题 (注意一个 τ- 变换可看成一个 κ- 分拆和一个 κ- 吸收的组合). 至于有向图 D 中反欧拉迹的变换，只要考虑 D_+^- 就够了. 由于 D 中一条反欧拉迹对应到 D_+^- 中一条反欧拉迹，也对应到 G_+^- 中的一条欧拉迹，反之亦然，所以 D_+^- 的基图 G_+^- 是连通欧拉图. 因此，只要用 κ- 变换 (定理 7.5)，就可得到 D 中反欧拉迹的变换等价于 G_+^- 中欧拉迹的变换.

7.4 最终注解及一些未解决的问题

在本章的前几节，我们建立了各种类型的变换，以便在给出某一特殊类型的一个欧拉迹后，能构造出该类型的每个欧拉迹. 这一处理欧拉迹全集 $\mathcal{T}$ 的方法引出下面的问题:

对给定的 $T, T' \in \mathcal{T}$，为了将 T 变换成 T'，
需要应用某一类型的 κ_1 变换的频率如何? (*)

换句话说，将 T 变换到 T' 的复杂性如何? 我们注意到单个的 κ- 变换可以在多项式时间内完成，甚至于找到进行 κ- 变换的点 v 也可在多项式时间内完成. 因此，构造满足 $T_1 = \kappa(T), T_1' = \kappa(T')$ (在 v 点进行 κ- 变换) 以及

$$|X_{T_1} \cap X_{T_1'}| > |X_T \cap X_{T'}|$$

的 $T_1, T_1' \in \mathcal{T}(G)$ 可以在多项式时间内进行 (练习 7.15). 所以问题 (*) 是回答 κ- 变换的复杂性的真正关键. 对连通的 4- 正则图 G，这一问题已由鲍奇特 (A. Bouchet) 解决，他证明了对任意 $T, T' \in \mathcal{T}(G)$，将 T 变换到 T' 最多需要 $\frac{3|V(G)|}{2}$ 次 κ- 变

换 [BOUC90a]. 根据这一结果，他提出了一个猜想: $\frac{3|V(G)|}{2}$ 可改进到 $|V(G)|+1$.

然而，对各种类型的 κ_1- 变换 (到目前为止，处理过的无向图和有向图中各种类型的欧拉迹) 的类似的复杂性问题仍需研究，我怀疑它们有多项式算法.

最后，我们再关注一下关于 κ- 变换的一个有趣结构. 定义**欧拉迹图** $G(\mathcal{T},\kappa)$，它的点是 $\mathcal{T} := \mathcal{T}(G)$ 的元素，$T_1T_2 \in E(G(\mathcal{T},\kappa))$ 当且仅当 $\kappa(T_1) = T_2$. 由 $\kappa(T_1) = T_2$ 能得到 $\kappa(T_2) = T_1$，所以 $G(\mathcal{T},\kappa)$ 也是一个有定义的无向图.

从定理 7.5 及 G 的任意两个欧拉迹可通过对其中一个进行一系列 κ- 变换得到另一个可知，$G(\mathcal{T},\kappa)$ 是连通的. 但是张和郭证明了更强的结果，在此我们仅给出结论，没有证明 (详见 [ZHAF86a]①).

定理 7.28 若 $|\mathcal{T}(G)| > 2$，则 $G(\mathcal{T},\kappa)$ 是一个边哈密顿图.

如果考虑特殊类型的欧拉迹 (形如 $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(G,X)$ 等)，适当的 κ_1- 变换，并定义对应的**有限制的欧拉迹图** (如 $G(\mathcal{T}_X,\kappa_X)$)，类似于鲍奇特定理 [BOUC90a]，又可以得到这样的问题: 能否有类似于定理 7.28 的结论? 由定理 7.10，定理 7.12，定理 7.17，定理 7.23，定理 7.24，定理 7.27 和推论 7.13，推论 7.18，推论 7.19，这些有限制的欧拉迹图在各种情况下都是连通的，但它们是哈密顿图吗? 如何去刻画它们? 如何将一类有限制的欧拉迹图与另一类区分开来? 我们注意到在 [ZHAF86a] 中，作者讲他们已经对有向欧拉环游图找到了类似于定理 7.28 的结论，但他们没有详细说明由哪种变换给出这种图的边的定义. 考虑到定理 7.14 及其证明之后的一段，以下讨论与上述问题相关. 构造图 G 的**树图** G_T，其中 $V(G_T) = \{T \subseteq G | T$ 是 G 的生成树，$T_1T_2 \in E(G_T)$ 当且仅当 $|E(T_1 \cup T_2) - E(T_1 \cap T_2)| = 2$ (将此式与在导出定理 7.14 公式的讨论中的 κ_A- 变换以及 M_i 的生成树的集合 $\mathcal{T}_i$ 比较). 事实上，关于树图 G_T，在文献 [OREO62a] 中已经间接地讨论过，而在文献 [CUMM66a] 中则已直接讨论了. 在后一参考文献中，已经证明了 G_T 是边哈密顿图 ([SHAN68a] 给出了这一结论的一个简短证明). 考虑到定理 7.14，可以想象，树图的这一结论和定理 7.28 之间的密切关系不是偶然的. 因为图 M_i 的树图 $(M_i)_T$ 正是 $G(\mathcal{T}_A(G),\kappa_A)$. 更早的其他研究参见 [BARO68a，BARO68b]. 至于其他树图的结构性研究，我们提及 [SHAN81a]，那里山克 (H. Shank) 证明了当 $G_T,(G_T)_T$ 和 $((G_T)_T)_T$ 都是欧拉图时，若 $G_T \notin \{K_1,K_3\}$，则 $(((G_T)_T)_T)_T$ 不是欧拉图. 最后，对有向图 D，可以类似于上述 G_T 的定义方法，定义一个关于固定根 $v_0 \in V(D)$ 的**入树图** D_T. 在文献 [DÖRF74a] 中已经证明了 D_T 总是连通的. 作为本章的结束，提请大家注意在线性代数中找到类似于欧拉迹图和树图的图. 那里处理交换图，其顶点为某些 $m \times n$ 矩阵 (详见 [BRUA82a]). 还得面对哈密顿性问题 (看成交换图). 按李乔的话说，这是一个 “大问题”.

---

① 张和郭所述的欧拉环游图 $Eu(G)$ 就是我们所讲的欧拉迹图 $G(\mathcal{T},\kappa)$.

7.5 习 题

练习 7.1 证明在图 7.2 中，不存在图 $K_{2,4}$ 的一系列 X'- 相容的欧拉迹 $T_1,\cdots,T_n$ 满足 $T=T_1,T'=T_n$ 且 $\kappa(T_i)=T_{i+1}(1\leqslant i\leqslant n-1)$. 描述从 T 得到 T_2 和从 T'' 得到 T_2 的片断反向.

练习 7.2 证明 κ^*- 相关和 κ_1- 相关都定义了 $\mathcal{T}(G)$ 上的一个等价关系，并证明 κ_X- 相关是 $\mathcal{T}(G,X)$ 上的一个等价关系.

练习 7.3 证明引理 7.11.

练习 7.4 将定理 7.10 的证明改写成定理 7.12 的证明.

练习 7.5 a) 证明设 G 是连通的 4- 正则平面图，对 $T_1,T_2\in\mathcal{T}_A(G)$，若 $\kappa_A(T_1)=T_2$，则 κ_A- 变换是一个 κ^*- 变换; b) 构造一个嵌入到曲面上的非可平图 G，上述结论不成立; c) 证明 κ_A- 相关、κ_{NI}- 相关和 κ_a- 相关分别是相对的欧拉迹集合上的等价关系.

练习 7.6 用两种方法将定理 7.14 推广到任意一个连通的平面欧拉图，使得 a) M_i 是一个二部图; b) M_i 是一个超图 (见定理 7.14 证明下面的讨论的第一部分).

练习 7.7 将 M_i 限定为 3- 连通可平欧拉图，试证明确定 M_i (见练习 7.6 的 b)) 中生成超图的存在性是一个 NP- 完全问题 (见定理 7.14 证明后的讨论的第二部分).

练习 7.8 a) 将概念 κ_A- 相关推广到任意连通的平面欧拉图上，试证明它是 $\mathcal{T}_A(G)$ 上的一个等价关系; b) 证明 $\mathcal{T}_A(G)$ 中两个元素属于 κ_A- 相关下的同一等价类当且仅当它们对应的 A- 划分在次超过 4 的点上是一致的.

练习 7.9 将 κ_a- 变换概念推广到具有偶数条边的连通欧拉图上并证明推论 7.19 (提示，分别应用定理 6.1，推论 6.2 和定理 7.12).

练习 7.10 设 T 是连通 4- 正则图 G 的一个欧拉迹. 证明在定义 7.20 中，$v\in V(G)$ 是 T- 偶点还是 T- 奇点独立于 T 的初始点和初始边的选择.

练习 7.11 对有向图 D 定义 κ-,κ^*- 和 κ_1- 相关，并证明这些概念定义了 $\mathcal{T}(D)$ 上的等价关系.

练习 7.12 证明下列两种陈述是等价的. 1) D 是仅含一个欧拉迹的连通欧拉有向图; 2) D 的每一个圈是 D 的一个块且 $\Delta(D)\leqslant 4$.

练习 7.13 证明 τ- 相关是 $\mathcal{T}(D)$ 上的一个等价关系.

练习 7.14 考虑连通欧拉有向图 D 中的 $P(D)$- 相容欧拉迹，并找出能将每一个这样欧拉迹变成另外一个这样的欧拉迹的变换. 对 $(D-D_0)$- 偏好欧拉迹研究同样的问题.

练习 7.15 设 G 是一个连通欧拉图，$T,T'\in\mathcal{T}(G)$. 试证:

1) 能在多项式时间内找到一个点 v，使得 $X_T\neq X_{T'}(v)$;

2) 能在多项式时间内找到 $T_1,T_1'\in\mathcal{T}(G)$，它们满足 $X_T-X_T(v)=X_{T_1}-X_{T_1}(v),X_{T'}-X_{T'}(v)=X_{T_1'}-X_{T_1'}(v),\kappa(T)=T_1,\kappa(T')=T_1'$ 且 $|X_{T_1}(v)\cap X_{T_1'}(v)|>|X_T(v)\cap X_{T'}(v)|$.

参 考 文 献

[注] 原书 part1, volume1(第 1~7 章) 的参考文献.

[AARD51a] van Aardenne-Ehrenfest, T.; de Bruijn, N,G.; *Circuits and Trees in Oriented Linear Graphs*, Simon Stevin 28 (1951) 203–217.

[ABRH79a] Abrham, J., Kotzig, A; *Construction of Planar Eulerian Multigraphs*, Proc. Tenth Southeastern Conf. Combinatorics, Graph Theory & Computing, Florida Atlantic Univ., Boca Raton, April 2-6, 1979, Congr. Numer. 23 (1979) vol.1, 123–130.

[ABRH80a] Abrham, J., Kotzig, A; *Transformations of Euler Tours*, Ann. Discrete Math. 8 (1980) 65–69.

[AKIY79a] Akiyama, J., Harary, F.; *A Graph and Its Complement With Specified Properties I: Connectivity*, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol.2, No.2 (1979) 223–228.

[ANST85a] Anstee, R.P.; *An Algorithmic Proof of Tutte's f-Factor Theorem*, J. Algorithms 6 (1985) 112–131.

[ASAN82a] Asano, T., Saito, N.; Exoo, G., Harary, F.; *The Smallest 2-Connected Cubic Bipartite Planar Nonhamiltonian Graph*, Discrete Math. 38 (1982) 1–6.

[ASAN84a] Asano, T., Kikuchi, S., Saito, N.; *A Linear Algorithm for Finding Hamiltoniens Cycles in 4-Connected Maximal Planar Graphs*, Discrete Appl. Math. 7 (1984) no.1, 1–5.

[AUBE82b] Aubert, J., Schneider, B.; *Graphes Orientes indécomposables en circuits hamiltoniens*, J. Combin. Theory Ser. B 32 (1982) 347-349.

[BARO68a] Baron, G.; *Über den Baumgraphen eines endlichen gerichteten Graphen*, Arch. Math., Vol. XIX, Fasc. 6 (1968) 668–672.

[BARO68b] Baron, G., Imrich, W.; *On the Maximal Distance of Spanning Trees*, J. Combin. Theory 5 (1968) 378–385.

[BATA77a] Batagelj, V., Pisanski, T.; *On Partially Directed Eulerian Multigraphs*, Publ. de l'Inst. Math., Nouvelle sŕie 25 (1977) no.39, 16-24.

[BEHZ79a] Behzad, M., Chartrand, G.; Lesniak-Foster, L.; *Graphs and Digraphs*, (Prindle, Weber & Schmidt Int. Series, Boston, Mass., 1979).

[BEIN78a] Beineke, L.W., Wilson, R.J. (eds.); *Selected Topic in Graph Theory*, (Academic Press, New York, 1978).

[BEIN83a] Beineke, L.W., Wilson, R.J. (eds.); *Selected Topic in Graph Theory 2*, (Aca-

demic Press, New York, 1983).

[BELY83a] Belyj, S.B.; *ON Non-Self-Intersecting and Non-Intersecting Trails*, Mat. Zametki 34 (1983) no.4, 625–628.

[BENT87a] Bent, S.W., Manber, U.; *On Non-Intersecting Eulerian Circuits*, Discrete Appl. Math. 18 (1987) 87–94.

[BERG62a] Berge, C., Ghouila-Houri, A.; *Programme, Speiele, Transportnetze*, (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967).

[BERK78a] Berkowitz, H.W.; *Restricted Eulerian Circuits in Directed Graphs*, Colloq. Math. 39 (1978) Fasc.1, 185–188.

[BERM78b] Berman, K.A.; *Aneulerian Digraphs and the Determination of those Eulerian Digraphs Having an Odd Number of Directed Eulerian Paths*, Discrete Math. 22 (1978) 75–80.

[BERM79d] Berman, K.A.; *Bieulerian Orientations of 4-Valent Graphs*, Res. Report CORR 79-25, Fac. of Math., Univ. of Waterloo (1979).

[BERM81b] Berman, K.A.; *On Graphs where every 1-Factor lies in a Hamiltonian Cycle*, unpublished manuscript.

[BERM83a] Berman, K.A.; *Proof of a Conjecture of Häggkvist on Cycles and Independent Edges*, Discrete Math. 46 (1983) no.1, 9–13.

[BERO84a] Bermond, J., Las-Vergas, M.; *Regular Factors in Nearly Regular Graphs*, Discrete Math. 50 (1984) no.1, 9–13.

[BERT81a] Bertossi, A.A.; *The Hamiltonian Path Problem id NP-Complete*, Inform. Process. Lett. 13 (1984) no.4-5, 157–159.

[BIGG76a] Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J.; *Graph Theory 1736–1936*, (Clarendon Press, Oxford, 1976).

[BOND76a] Bondy, J.A., Murty, U.S.R.; *Graph Theory with Applications*, (The Macmillan Press Ltd, London, 1976).

[BOND77a] Bondy, J.A.; *A Short Proof of Meyniel's Theorem*, Discrete Math. 19 (1977) 195–197.

[BOND86a] Bondy, J.A., Halberstam, F.Y.; *Parity Theorems for Paths and Cycles in Graphs*, J. Graphs Theory 10 (1986) 107–115.

[BOUC78a] Bouchet, A.; *Triangular Imbedding into Surfaces of a Join of Equicardinal Independent Sets Following an Eulerian Graph*, in: Alavi, Y.; Lick,D.R. (eds.); Theory & Applications of Graphs, Proc., Michigan 11-15, 1976, Lencture Notes in Math. 642 (Springer, Berlin-New York, 1978) 86–115.

[BOUC87a] Bouchet, A.; *Isotropic Systems*, European J. Combin. 8 (1987) 231–244.

[BOUC88b] Bouchet, A.; *Compatible Euler Tours and Supplementary Eulerian Vectors*, sub-

mitted to European J. Combin.*

[BOUC90a] Bouchet, A.; *κ-Transformations, Local Complementations and switchings*, in: Hahn, G., Sabidussi, G., Woodrow, R. (eds.); Cycles and Rays, NATO ASI Ser. C (Kluwer Academic Publ. Dordrecht, 1990) 41–50.

[BRUA82a] Brualdi, R. A, Li, Q.; *Small Diameter Interchange Graphs of Classes of Matrices of Zeros and Ones*, Linear Algebra Appl. 46 (1982) 177-194.

[CAIM89a] Cai, M., Fleischner, H.; *Eulerian Trail Traversing Specified Edges in Given Order*, Preprint.**

[CHEN81a] Chen, C.C.; *On a Characterization of Planar Graphs*, Bull. Austral. Math. Soc. 24 (1981) 289–294.

[CHIB84a] Chiba, N., Tadashi, Y., Takao, N.; *Linear Algorithms for Convex Drawings of Planar Graph*, in: Bondy, J.A., Murty, U.S.R. (eds.); Progress in Graphs Theory, Conf. on Combinatorics, Univ. Waterloo, Ontario, 1982 (Academic Press, Toronto, Ontario, 1984) 153–173.

[CHIB86a] Chiba, N., Nishizeki, T.; *A Theorem on Paths in Planar Graph*, J. Graphs Theory 10 (1986) 449–450.

[COIC71a] Coĭ, S., Chaĭ, S.M.; *Applied Graph Theory* (Russian), Izdat 'Nauka' kazah. SSR, Alma-Ata (1971).

[CUMM66a] Cummins, R.L.; *Hamilton Circuits in Tree Graphs*, IEEE Trans. Circuit Theory C-T 13 (1966), no.1, 82–90.

[DIRA66a] Dirac, G.A.; *Short Proof of Menger's Graph Theorem*, Mathematika 13 (1966), 42–44.

[DIRA67a] Dirac, G.A.; *Minimally 2-Connnected Graphs*, J. Reine Angew. Math. 228 (1967), 204–216.

[DÖRF74a] Dörfler, W.; *Der Arboreszenzengraph eines gerichteten Graphen*, Math. Nachr. 59 (1974) no.1-6, 35–49.

[ELLI82a] Ellingham, M.N.; *Constructing Certain Cubic Graphs*, in: Combinatorial Mathematics IX, Brisbane, 1981; Lecture Notes in Math. 952 (Spriner, Berlin-New York, 1982) 252–274.

[ELLI83a] Ellingham, M.N., Horton, J.D.; *Non-Hamiltonian 3-Connected Cubic Bipartite Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 34 (1983) 350–353.

[EULER36a] Euler, L.; *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Petropolitanae 8 (1736) 1741, 128-140 = Opera omnia Ser. I, Vol. 7, 1-10.

[EVEN79a] Even, S.; *Graph Algorithms*, (Computer Science Press, Inc., Rockville, 1979).

* 现已出版, 见 European J. combin. 14-6(1993)513–510.

** 现已出版, 见 Journal of Graph Theory 19-2(1995)137–144.

[FLEI73a] Fleischner, H.; *The Uniquely Embeddable Planar Graphs*, Discrete Math. 4 (1973) no.4 347–358.

[FLEI74a] Fleischner, H.; *The Importance of Being Euler*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 42 (1974) 90–99.

[FLEI74b] Fleischner, H., Roy, P.; *Distribution of Points of Odd Degree of Certain Triangulations in the Plane*, Monatsh. Math. 78 (1974) 385–390.

[FLEI74c] Fleischner, H.; *On Regulating Sets and the Disparity of Planar Cubic Graphs*, Canas. Math. Bull. 17 (1974) no.3, 367–374.

[FLEI74d] Fleischner, H., Geller, D.P., Harary, F.; *Outerplanar Graphs and Weak Duals*, J. Indian Math. Soc. 38 (1974) 215–219.

[FLEI76a] Fleischner, H.; *Eine gemeinsame Basis für die Theorie der Eulerschen Graphen udn den Satz von Petersen*, Monatsh. Math. 81 (1976) 267–278.

[FLEI83b] Fleischner, H.; *Eulerian Graphs*, in: Beineke, L.W.; Wilson, R.J. (eds.); Selected Topics in Graph Theory 2 (Academic Press, London-New York, 1983) 17-53.

[FLEI86a] Fleischner, H., Hilton, A.J.W., Jackson, B.; *On the Maximum Number of Pairwise Compatible Euler Cycle*, to appear in J. Graph Theory.*

[FLEI88a] Fleischner, H.; *Some Blood, Sweat, but no Tears in Eulerian Graph Theory*, in: Proc. 250th Anniversary Conf. on Graph Theory, Congr. Numer 63 (1988) 8–48.

[FLEI89a] Fleischner, H., Jackson, B.; *A Note Concerning Some Conjectures on Cyclically 4-Edge Connected 3-Regular Graphs*, in: Andersen, L.D. et al. (eds.); Graph Theory in Memory of G.A. Dirac; Ann. Discrete Math. 41 (1989) 171–178.

[FLEI90a] Fleischner, H., Jackson, B.; *Compatible Euler Tour in Eulerian Digraphs*, in: Hahm, G., Sabidussi, G., Woodrow, R. (eds.); Cycles and Rays, NATO ASI Ser. C (Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1990) 95–100.

[FORD62a] Ford, L.R., Jr., Fullkerson, D.R.; *Flows in Networks*, (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962).

[FUCH77a] Fuchs, H., Kedem, Z.M., Uselton, S.P.; *Optimal Surface Reconstruction from Planar Contours*, in: Foley, J. (ed.), Graphics and Image Processing, Comm. ACM 20 (1977) no.10, 693–702.

[GARE76a] Garey, M.R., Johnson, D.S., Tarjan, R.E.; *The planar Hamiltonian Circuit Problem is NP-Complete*, SIAM J. Comput. 5 (1976) 704–714.

[GARE79a] Garey, M.R., Johnson, D.S.; *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*, (W.H. Freeman & Company, San Francisco 1979).

[GEOR89a] Georges, J.P.; *Non-Hamiltonian Bicubic Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 46 (1989) 121–124.

[GOOD75a] Goodey, P.R.; *Hamiltonian Circuits in Polytopes with Even Sided Faces*, Israel

* 现已出版, 见 Journal of Graph Theory 14-1(1990)51–63.

J. Math. 22 (1975) no.1, 52–56.

[GOUY82a] Gouyou-Beauchamps, D.; *The Hamiltonian Circuit Problem is Polynomail for 4-Connected Planar Graphs*, SIAM J. Comput. 11 (1982) no.3, 529–539.

[GROP89a] Gropp, H.; *Configurations and the Tutte conjecture*, talk held at the Twelfth British Combin. Conf., Univ. of East Anglia, Norwich, July 1989.

[GROS87a] Gross, J.L., Tucker, T.W.; *Topological Graph Theory*, (John Wiley & Sons, New York, 1987).

[GRÜN67a] Grünbaum, B.; *Convex Polytopes*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XVI (John Wiley & Sons, New York, 1967).

[HÄGG79a] Häggkvist, R.; *On F-Hamiltonian Graph*, in: Bondy, J.A., Murty, U.S.R. (eds.), Graph Theory and Related Topics (Academic Press, New York, 1979) 219–231.

[HAMA76a] Hamada, T., Yoshimura, I.; *Traversability and Connectivity of the Middle Graph of a Graph*, Discrete Math. 14 (1976) no.3, 247–255.

[HARA53a] Harary, F., Uhlenbeck, G.E.; *On the Number of Husimi Trees*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953) 315–322.

[HARA53a] Harary, F.; *Graph Theory*, (Addison-Wesley Publ., Reading, MA, 1969).

[HARB89a] Harborth, H.; Harborth, M.; *Straight Ahead Cycles in Drawings of Complete Graphs*, Rostock. Math. Kolloq. 38(1989)71–75.

[HIER73a] Hierholzer, C.; *Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren*, Math. Annalen VI (1873) 30-32.

[HOLT81a] Holton, D.A., Little, C.H.C.; *Elegant Odd Rings and Non-Planar Graphs*, in: Combinatorial Math. VIII, Geelong 1980, Lecture Notes in Math. 884 (Springer, Berlin 1981), 234–268.

[HOLT85a] Holton, D.A., Manvel, B., McKay, B.D.; *Hamiltonian Cycles in Cubic 3-Connected Bipartite Planar Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 38 (1985), no.3, 279–297.

[HORT82a] Horton, J.D.; *On Two-Factors of Bipartite Regular Graphs*, Discrete Math. 41 (1982) no.1, 35–41.

[HUSI50a] Husimi, K.; *Note on Mayer's Theory of Cluster Intergrals*, J. Chem. Phys. 18 (1950) no.5, 682–684.

[JACK87b] Jackson, B.; *Compatible Euler Tours for Transition Systems in Eulerian Graphs*, Discrete Math. 66 (1987) 127–131.

[JACK88a] Jackson, B.; *A Characterisation of Graphs Having Three Pairwise Compatible Euler Tours*, preprint.*

[JACK88b] Jackson, B.; *Supplementary Eulerian Vectors is Isotropic Systems*, preprint.**

* 现已出版, 见 J. Combinatorial Theory Ser. B 53-1 (1991) 80–92.

** 现已出版, 见 J. Combinatorial Theory Ser. B 53-1 (1991) 93–105.

[JACK88c] Jackson, B., Wormald, N.C.; *Cycles Containing Matchings and Pairwise Compatible Euler Tours*, preprint.*

[JACK88d] Jackson, B.; *Some Remarks on Arc-Connectivity, Vertes Splitting, and Orientation in Graphs and Digraphs*, J. Graph Theory 12 (1988) no.3, 429–436.

[JAEG85a] Jaeger, F.; *A survey of the Cycle Doule Cover Conjecture*, in: Alspach, B.R., Godsil, C.D. (eds.); Cycles in Graphs, Ann. Discrete Math. 27 (1985) 1–12.

[JOLI73a] Jolivet, J.-L.; *Sur le joint d'une famille de graphes*, Discrete Meth. 5 (1973) 145–158.

[JOLI75a] Jolivet, J.-L.; *The Join of a Family of Graphs*, in: Hajnal, A., Rado, R., Sós, V.T. (eds.), Infinite and Finite sets, Vol.II, Colloq., Kesthely, 1973, dedicated to P. Erdös on his 60th birthday, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol.10 (North-Holland, Amsterdam, 1975) 935–938.

[JUNG87a] Jungnickel, D.; *Graphen, Netzwerke und Algorithmen* (Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich, 1987).

[KAST67a] Kasteleyn, P.W.; *Graph Theory and Crystal Physics*, in: Harary, F. (ed.); Graphs Theory and Theoretical Physics (Academic Press, New York, 1967) 43–110.

[KELM88a] Kel'mans, A.K.; *Cubic Bipartite Cyclically 4-Connected Graphs Without Hamiltonian Cycles*, Russian Math. Surveys 43 (1988), no.3, 205–206.

[KNUT73a] Knuth, D.; *The Art of Computer Programming*, Vol.1, Fundamental Algorithms (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973).

[KÖNI16a] König, D.; *Über Graphsen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. 77 (1916) 453–465.

[KÖNI36a] König, D.; *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Chelsea Publ. Comp., New York, 1950, first publ. by Akad. Verlagsges., Leipzig, 1936).

[KOTZ56a] Kotzig, A.; *Euler Lines and Decompositions of a Regular Graph of Even Order into Two Factors of Equal Order*, (in Slovak), Mat.-Fyz. Časopis. Slovensk. Akad. 6 (1956) no.3, 133–136.

[KOTZ62a] Kotzig, A.; *The Construction of Hamiltonian Graphs of Degree Three* (Russian), Časopis Pěst Mat. 87 (1962) 148-168.

[KOTZ64a] Kotzig, A.; *Hamilton Graphs and Hamilton Circuits*, in: Theory of Graphs and its Applications, Proc. Symp. Smolenice June 1963 (Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, 1964) 63–82.

[KOTZ64b] Kotzig, A.; *Problem 20*, in: Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symp. Smolenice June 1963 (Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, 1964) 62.

[KOTZ68a] Kotzig, A.; *Moves Without Forbidden Transitions in a Graph*, Mat.-Fyz. Časopis

* 现已出版, 见 J. Graph Theory 14-1 (1990) 127–138.

18 (1968) no.1, 76–80.

[KOTZ68c] Kotzig, A.; *Eulerian Lines in Finite 4-Valent Graphs and Their Transformations*, in: Erdös, P., Katona, G.; Theory of Graphs (Academic Press, New-York, 1968) 219-230.

[KOTZ79a] Kotzig, A.; *Proc. Tenth Southeastern Conf. on Comb., Graph Theory and Computing, Vol.2, Problem Session*, Congr. Numer. 24 (1979) 913–915.

[KULL80a] Kulli, V.R., Akka, D.G.; *On Semientire Graphs*, J. Math. Phys. Sci. 14 (1980) no.6, 585–588.

[KUND74a] Kundu, S.; *Bounds on the Number of Disjoint Spanning Trees*, J. Combin. Theory Ser. B 17 (1974) 199–203.

[LESN77a] Lesniak, L., Polimeni, A.D., Vanderjagt, D.W.; *Degree Sets and Traversability*, Rend. Math. 10 (1977) 193–204.

[LESN86a] Lesniak, L., Oellermann, O.R.; *An Eulerian Exposition*, J. Graph Theory 10 (1986) no.3, 277–297.

[LEWS72a] Lewinski, K.-H.; *Graphen von Graphen*, Atti Accad. Sci. Istit. Bologna Cl. Sci. Fis. Rend. (12) 10, fasc.1 (1972/73) 63–72.

[LIST48a] Listing, J.B.; *Vorstudien zur Topologic*, reprinted from Göttinger Studien (1847) (Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1848).

[LIUC68a] Liu, C.L.; *Introduction to Combinatorial Mathematics* (McGraw-Hill, New York, 1968).

[LOVÁ86a] Lovász, L., Plummer, M.D.; *Matching Theory*, Ann. Discrete Math. 29 (North-Holland, Amsterdam, 1986).

[LUCA82a] Lucas, M.É.; *Récréations Mathématiques* (Gauthiers-Villars et fils, Paris, 1882).

[LUCA83a] Lucas, M.É.; *Récréations Mathématiques II* (Gauthiers-Villars et fils, Paris, 1883).

[McCU84a] McCuaug, W.; *A Simple Proof of Menger's Theorem*, J. Graph Theory 8 (1984) no.3, 427–429.

[McKE84a] McKee, T.A.; *Recharacterizing Eulerian: Intimations of New Duality*, Discrete Math. 51 (1984) 237–242.

[MEND85a] Mendelsohn, E., Rosa, A.; *One-Factorizations of the Complete Graph—A Servey*, J. Graph Theory 9 (1985) no.1, 43–65.

[MENG27a] Menger, K.; *Zur allgemeinen Kurventheorie*, Fund. Math. 10 (1927) 96–115.

[MEYN73a] Meyniel, H.; *Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien dans un graphe orienté*, J. Combin. Theory Ser. B 14 (1973) 137–147.

[MITC72a] Mitchem, J.; *Hamiltonian and Eulerian Properties of Entire Graphs*, in: Graph Theory & Applications, Kalamazoo, Mich., 1972, Lecture Notes in Math. 103 (Springer, Berlin, 1972) 189–195.

[MOON65a] Moon, J.W.; *Solution to E 1667 [1964, 205]*, Amer. Math. Monthly 72 (1965)

81–82.

[MOOR59a] Moore, E.F.; *The Shortest Path Through a Maze*, Proc. Int. Sympos. Switching Theory 1957, Part. II (Harvard univ. Press. Cambridge, Màss., 1959) 285–292.

[NASH61a] Nash-Williams, C.St.J.A.; *Edge-Disjoint Spanning Trees of Finite Graphs*, J. London Math. Soc. 36 (1961) 445–450.

[NASH64a] Nash-Williams, C.St.J.A.; *Decomposition of Finit Graphs into Forests*, J. London Math. Soc. 39 (1964) 12.

[NASH79a] Nash-Williams, C.St.J.A.; *Acyclic Detachments of Graphs*, in: Wilson, R.J. (ed.); Graph Theory and Combinatorics, Proc. Conf. Open Univ.; Milton Keynes, 1978, Res. Notes in Math. 34 (Pitman, San Francisco, 1979) 87–97.

[NASH85a] Nash-Williams, C.St.J.A.; *Detachments of Graphs and Generalized Euler Trails*, in: Anderson, I. (ed.); Surveys in Combinatorics, 1985, Math. Soc. Lecture Notes Ser. 103 (Cambridge Univ. Press, London, 1985) 137–151.

[NASH85b] Nash-Williams, C.St.J.A.; *Connected Detachments of Graphs and Generalized Euler Trails*, J. London Math. Soc. 31 (1985) no.2, 17–29.

[NASH87a] Nash-Williams, C.St.J.A.; *Amalgamations of Almost Regular Edge-Colouring of Simple Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 43 (1987) 322–342.

[NISH83a] Nishizeki, T., Asano, T., Watanabe, T.; *An Approximation Algorithm for the Hamiltonian Walk Problem on Maximal Planar Graphs*, Discrete Appl. Math. 5 (1983), no.2, 211–222.

[NISH88a] Nishzeki, T., Chiba, N.; *Planar Graphs: Theory and Algorithms*, Ann. Discrete Math. 32 (North-Holland, Amsterdam, 1988).

[OREO62a] Ore, O.; *Theory of Graphs* (Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1962).

[PAPA82a] Papadimtriou, C.H.; Steiglitz, K.; *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity* (Prentice Hall, Inc., New jersey, 1982).

[PERU84a] Peruncic, B., Duri'c, Z.; *An Efficient Algorithm for Embedding Graphs in the Projective Plane*, in: Graph Theory With Applications to Algorithms and Computer Science (Kalamazoo, Mich., 1984) Wiley-Intersci. Publ. (Wiley, New York, 1985) 637-650.

[PETE91a] Peterson, J.; *Die Theoric der regulären Graphs*, Acta Math. 15 (1891) 193-220.

[PETO77a] Peterson, D.L.; *Hamiltonian Cycles in Bipartite Plane Cubic Maps*, Ph.D. thesie, Texas A & M Univ. (1977).

[PETO81a] Peterson, D.L.; *A Note on Hamiltonian Cycles in Bipartite Plane Cubic Maps Having Connectivity 2*, Discrete Math. 36 (1981), 327–332.

[PETR80a] Petrenyuk, L.P., Petrenyuk, A.Y.; *Intersection of Perfect 1-Factorizations of Complete Graphs*, Kibernetika 1 (1980) 6–8, 149.

[PLES83a] Plesník, J.; *On NP-Completeness of the Hamiltonian Cycle Problem in Bipartite Cubic Planar Graphs*, Acta Math. Univ. Comenian. 42/43 (1983) 271–273.

[RAOS79a] Rao, S.B., Bhat-Nayak, V.N., Naik, R.N.; *Characterization of Frequency Partitions of Eulerian Graphs*, in: Graph Theory, Proc. Symp., Calcutta 1976, ISI (Indian Stat. inst.) Lecture Notes 4 (1979) 124–137.

[READ86a] Read, R.C.; *A Method for Drawing a Planar Graph Given the Cyclic Order of the Edges at Each Vertex*, Combinatorics & Optimization, Research Report CORR 86-14 (July 1986) Fac. of Math., Univ. of Waterloo.

[REGN76a] Regner, S.; *Zur Existenz einer speziellen Art von Eulerschen Linien in ebenen Graphen*, Ph.D. Thesis, Univ. of Vienna (1976).

[ROBB39a] Robbins, H.E.; *A Theorem on Graph with an Application to a Problem of Traffic Control*, Amer. Math. Monthly 46 (1939) 281–283.

[ROSS76b] Rosenstiehl, P.; *Charactérization des graphes planaires par une diagonale algébrique*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A (Oct. 1976) 417–419.

[SABI84a] Sabidussi, G; *Eulerian Walks and Local Complementation*, D.M.S. no.84-21, Dép. de math. et de stat., Univ. de Montréal, Nov. 1984, to appear in European J. Combin.

[SACH86a] Sachs, H., Stiebitz, M.; *250 Jahre Graphentheorie, Ein Beitrag zur Vorgeschichte der Abhandlung Eulers über das Königsberger Brückernproblem*, preprint, to appear in NTM Schr. Geschichte Natur. Tech. Medizin 1/88.

[SACH86b] Sachs, H., Stiebitz, M., Wilson, R.J.; *Euler's Königsberg Letters*, preprint, Techn. Hochschule Illmenau, Illmenau, DDR.

[SEAH87a] Seah, E.; Stinson, D.R.; *A Perfect One-Factorization for* K_{36}, preprint.

[SERD76a] Serdjukov, A.I.; *Eulersche Konturen auf gemischten Graphen*, Diskret. Analiz, Novosibirsk 29 (1976) 61–67.

[SEYM79a] Seymour, P.D.; *Sums of Circuits*, in: Bondy, J.A.; Murty, U.S.R. (eds.); Graph Theory and Related Topics (Academic Press, New York, 1979) 341–356.

[SHAN68a] Shank, H.; *A Note on Hamilton Circuits in Tree Graphs*, IEEE Trans. Circuit Theory, C-T 15 (1968) 86.

[SHAN75a] Shank, H.; *The Theory of Left-Right Paths*, in: Combinatorial Mathematics III, Proc. Third Australian Conf., Univ. Queensland, St. Lucia, 1974; Lecture Notes in Math. 452 (Springer, Berlin-New York, 1975) 42-54.

[SHAN79a] Shank, H.; *Some Parity Results on Binary Vector Spaces*, Ars Combin. 8 (1979) 107–108.

[SHAN81a] Shank, H.; *Consecutive Eulerian Tree Graphs*, Ars Combin. 12 (1981) 69–71.

[SKIL83a] Skilton, D.K.; *Eulerian Chains and Segment Reversals*, in: Koh, K.M., Yap, H.P. (eds.); Graph Theory, Proc. First Southeast Graph Theory Colloq., Singapore, May 1983; Lecture Notes in Math. 1073 (Springer, Berlin-New York, 1984) 228–235.

[STIN87a] Stinson, D.R.; Seah, E.; *A Perfact One-Factorization for* K_{50}, preprint.

[THOA78a] Thomason, Andrew G.; *Hamilton Cycles and Uniquely Edge Colorable Graphs*, in: Advances in Graph Theory, Proc. Conf. Cambrige 1977; Ann. Discrete Math. 3 (1978) 259–268 (North-Holland, Amsterdam, 1978).

[THOM81b] Thomassen, C.; *Kuratowski's Theory*, J. Graph Theory 5 (1981) no.3, 225–241.

[THOM83a] Thomassen, C.; *A Theorem on Paths in Planar Graphs*, J. Graph Theory 7 (1983) no.2, 169–176.

[THOM84a] Thomassen, C.; *A Refinement of Kuratowski's Theorem*, J. Combin. Theory Ser. B 37 (1984) no.3, 245–253.

[TILL80a] Tillson, T.W.; *A Hamiltonian Decomposition of* K^*_{2m}, $2m \geqslant 8$, J. Combin. Theory Ser. B 29 (1980) 68–74.

[TOID73a] Toida, S.; *Properties of a Euler Graph*, J. Franklin Inst. 295 (1973) 343–345.

[TUTT41a] Tutte, W.T.; Smith. C.A.B.; *On Unicursal Paths in a Network of Degree 4*, Amer. Math. Monthly 48 (1941) 233–237.

[TUTT56b] Tutte, W.T.; *A Theorem on Planar Graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956) 99–116.

[TUTT61a] Tutte, W.T.; *On the Problem of Decomposing a Graph Into n Connected Factors*, J. London Math. Soc. 142 (1961) 221–230.

[TUTT71a] Tutte, W.T.; *On the 2-Factors of Bicubic Graphs*, Discrete Math. 1 (1971) no.2, 203–208.

[TUTT77a] Tutte, W.T.; *Bridges and Hamiltonian Circuits in Planar Graphs*, Aequations Math. 15 (1977) 1–33.

[TUTT81a] Tutte, W.T.; *Graph Factor*, Combinatorical 1 (1981) no.1, 79–97.

[VEBL12a] Veblen, O.; *An Application of Modular Equations in Analysis Situs*, Ann. of Math. (2) 14 (1912/13) 86–94.

[VEBL31a] Veblen, O.; *Analysis Situs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 5, Part II (1931) 1-39.

[VOKI85a] Vo, K.; *Ranking and Unranking Planar Embeddings*, Linear and multilinear Algebra 18 (1985) no.1, 35–65.

[WALL69a] Wall, C.E.; *Arc Digraphs and Traversability*, in: The Many Facets of Graph Theory, Proc. Conf., Western Michigan Univ., Kalamazoo, Michigan, 1968, Lecture Notes in Math. 110 (Springer Berlin, 1969) 287-290.

[WELS69a] Welsh, D.J.A.; *Euler and Bipartite Matroids*, J. Combin. Theory 6 (1969) 375–377.

[WHIT31a] Whitney, H.; *A Theorem on graphs*, Ann. Math. 32 (1931) 378–390.

[WHIT32a] Whitney, H.; *Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs*, Amer. J. Math. 54 (1932) 150–168.

[WIEG87a] Wiegers, M.; *Recognizing Outerplanar Graphs in Liner Time*, in: Tinhofer, G., Schmidt, G. (eds.); Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Proc. Int.

Workshop WG 1986, Bernried, FRG, Lecture Notes in Computer Science 246 (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987) 165–176.

[WILS79a] Wilson, R.J., Beineke, L.W (eds.); *Applications of Graph Theory* (Academic Press, London-New York, 1979).

[WILS85a] Wilson, R.J.; *Analysis Situs*, in: Alavi, Y. et al. (eds.); Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Proc. Kalamazoo Conf., Kalamazoo, Mich., 1984 (Wiley Intersci. Publ., New York, 1985) 789–800.

[WILS86a] Wilson, R.J.; *An Eulerian Trail Through Königsberg*, J. Graph Theory 10 (1986) no.3, 265–275.

[WOOD88a] Woodall, R.J.; *A Proof of McKee's Eulerian-Bipartite Characterization*, preprint.

[XIAX84a] Xia, X.; *Transformations of Directed Euler Tours*, Acta Math. Appl. Sinica 7 (1984) no.1, 73–77.

[ZAKS82a] Zaks, J.; *Non-Hamiltonian Simple Planar Graphs*, Ann. Discrete Math. 12 (1982) 255–263.

[ZHAF86a] Zhang, F.J.; Guo, X.F.; *Hamiltonian Cycles in Euler Tour Graph*, J. Combin. Theory Ser. B 40 (1986) 1–8.

第　二　卷

第 8 章　各种类型的闭覆盖途径

本章从欧拉的下述发现谈起：任一连通图都存在一条闭覆盖途径，使每条边恰好被经过两次 (见欧拉的文章中的第 18 段和推论 5.8). 事实上，存在一条闭覆盖途径经过每一边的两个方向各一次 (见推论 5.9).

本章将考虑各种类型的闭覆盖途径，首先考虑经过每条边恰好两次的闭覆盖途径.

8.1　双　　迹

为了区别各种类型的经过每条边恰好两次的闭覆盖途径，我们引进一些记号. 为此，我们遵循文献 [EGGL84a, SKIL85a].

定义 8.1　图中一条经过每条边恰好两次的闭覆盖称为一条**双迹**. 若一条双迹经过每条边的两个方向各一次 (恰好一次)，则称为**双有向的**. 同时，若没有边在经过第一次后接着经过第二次，则称它为**无缩回的**. 另一方面，如果它含有一段 e, v, e，我们说 e 在 v 有一个**缩回**. 如果一个双迹是双有向的无缩回，我们则称它是一个**强双迹**.

强双迹的存在性问题首先是由奥尔提出的 [OREO51a, P53].

注意 [EGGL84a] 中用术语*无折回*来代替*无缩回*，而第一个考虑无缩回双迹的撒比达斯，则用术语*无返回拟欧拉途径*代替无缩回 [SABI77a].

用上面的记号，推论 5.9 可叙述为每一个连通图有一条双有向双迹. 同时，对无缩回双迹，我们有下面撒比达斯的结果 [SABI77a]，这一结果在 [EGGL84a，定理 9] 中也被证明了 (后面文章的作者看来是不知道撒比达斯的早期工作)①. 它的证明是推论 5.5 的一个直接应用.

推论 8.2　一个连通图 G 有一条无缩回双迹当且仅当 G 没有悬挂点.

证明　因为在一个具有悬挂点的图中没有双迹是无缩回的，因此，只要证明如果 G 没有悬挂点，则存在一条无缩回的双迹即可. 为此，考虑由 G 通过对 $E(G)$ 的每条边 e 增加一条重边所得的图 D_1，则 G_1 是一个连通的欧拉图且 $\delta(G_1) \geqslant 4$. 用 e_1 表示 $E(G_1) - E(G)$ 的重边，定义 G_1 的一个转移系统 X_1 如下：对每个 $v \in V(G_1) = V(G)$ 和 $E^*(G) = \bigcup\limits_{v \in V(G)} E_v^*$，

① 事实上，这个结果是撒比达斯早在 1975 年 6 月通知我的.

$$X_1(v) = \{\{e', e'_1\} \mid e' \in E^*_v \subseteq E^*G\}\ ,$$

$$X_1 = \bigcup_{v \in V(G_1)} X_1(v)\ .$$

因为 $\delta(G_1) \geqslant 4$，存在 G_1 的一条欧拉迹 T_1 与 X_1 是相容的 (推论 5.5). 由构造，T_1 对应着 G 的一个双迹，由 X_1 的定义知，它是无缩回的 (注意 e' 和 e'_1 在 T_1 中是不相继的). 推论证毕.

事实上，推论 8.2 有一个有趣的解释，即一个没有悬挂点的图可作为一个圈的同态象. 这个解释等价于推论 8.2，并且事实上是撒比达斯文章的间接出发点 (见 [SABI77a，定理 3.2] 和文章的引言). 这个结果的证明能很容易从推论 8.2 证明导出，因此，留给读者作为一个练习.

推论 8.3 设 G 是一个没有悬挂点的连通图，并且设 C 是一个长为 $2|E(G)|$ 的圈，则存在一个同态

$$\varphi:\ C\ \longrightarrow\ G,$$

使得对 $E(G)$ 的每一条边 e 有

$$|\varphi^{-1}(e)| = 2$$

且

$$\varphi \text{ 是局部一一对应的}\ .$$

对于双有向双迹 (它可以有缩回) 在 [JAVO71a，定理 2.1] 中建立了一个类似的结果. 在那个例子中，应用 φ 将或者产生图 G，或者产生 G 的一个分拆 F (见定义 5.11)，对它应用另一个同态 ψ，使得 $\psi(G) = G$.

推论 8.2 并未告诉我们 G 是否有强双迹. 事实上，下一个结果 [TROY66a] 表明，一般来说，我们不能指望在没有悬挂点的图中找到强双迹.

定理 8.4 假设图 G 满足对 $i \geqslant 4$，$V_i(G) = \varnothing$ 且 $|V_3(G)| \equiv 0 \pmod 4$，则 G 没有强双迹.

代替直接证明定理 8.4，选择最近由汤姆森 (Thomassen) 改进的一个更一般的方法 [THOM87a]. 由此，定理 8.4 将很容易导出. 这时应该注意到定理 8.4 是命题 6.45 的一个关键 (见命题前面的讨论)①.

现在详细讨论 [THOM87a] 中最重要的部分. 将图 G 考虑为一个任意的图或者是 G 在某个曲面上一个嵌入的抽象，并且对每个 $v \in V(G)$，定义 $O^+(v)$. 定义一条闭途径 W，使起点为 $v \in V(G)$，沿着 $e = vw$ 并且继续在 w 沿着边 $f = wx$，其中 f' 作为 $O^+(w)$ 中 e' 的后继. 到达 x 以后继续沿着 g，其中 g' 在 $O^+(x)$ 中是 f' 的后继. 如此下去，沿着边 h 到达 v 停止，其中 h' 是 $O^+(v)$ 中 e' 的前驱. 在下面的引理中总结了一些结论，它们的证明留给读者作为练习.

① 这就是为什么把特洛伊 (Troy) 的结果作为一个定理，而不作为下面定理 8.9 的一个推论.

引理 8.5　设 G 和 W 如上所述，则 W 经过 G 的每一条边至多两次. 如果经过边 e_1 两次，则经过每个方向一次，进而若在 W 中从 v_1 到 v_2 通过 $e_2 = v_1v_2$，则从 v_1 开始沿 e_2 并且用 W 中同样的方法定义的闭途径 W_1 满足 $W_1 = W$.

因此，如果上面的 W 经过每条边两次，W 是一条双有向双迹，当 G 没有悬挂点时，它也是一条强双迹. 现在假设 G 的一条边在 W 中至多出现一次. 如果 W 含一条边恰好用过一次，我们记它为 $e_0 = v_0w_0$，并且假定 W 从 w_0 经过 e_0 到 v_0. 如果 W 不含这样的边，设 $e_0 = v_0w_0$ 是 $E(G) - E(W)$ 中任选的一条边. 事实上，在这种情况下，$\langle E(W)\rangle$ 是 G 的一个分支 (练习 8.3). 在任何情况下，我们都能定义一条开始于 v_0 沿 e_0 向 w_0 的新途径 W'. 从引理 8.5 可知，一条在 W 和 W' 中都出现的边在 W 和 W' 中均恰好在相反的方向用一次. 继续这个过程，最终得一组闭途径 S，使每条边恰好在每个方向用一次. 注意到 S 是由 $O^+(v)$ 的选择唯一决定，这一点由引理 8.5 可知. 我们注意对某个 $W \in S$，也可能有 $W^{-1} \in S$ 成立 (如若 G 有一个分支是一个圈)，并且 S 依赖于 $O^+(v)$ 的定义，$v \in V(G)$. 特别地，如果从 G 在某个曲面 $\mathcal{F}$ 上的嵌入得到 $O^+(v)$，S 恰好含有 $\mathcal{F}$ 中 G 的面的边界途径.

定义 8.6　设 G 和 S 如上面所定义. 对每个 $v \in V(G)$ 定义 $O^+(v)$. S 的元素称为 ***S*-轨道**，而 S 称为**轨道双覆盖**，进而如果对 $v \in V(G)$，能选择 $O^+(v)$，使对应的轨道双覆盖 S 恰好含一个 S- 轨道，则我们称 G 为**严格上可嵌入的**.

为了建立 [THOM87a] 中的主要结果，需要证明下述结果，这里给出的证明遵循上述文章中所提出的证明思路：

引理 8.7　若 G 是没有悬挂点的严格上可嵌入的图，则它有一条强双迹. 相反地，一个有强双迹且满足对 $i > 3$，$V_i(G) = \varnothing$ 的图是严格上可嵌入的.

证明　引理的第一部分可以从定义 8.6 和它前面的讨论导出. 反之，我们首先注意到引理的假设蕴涵对每个 $v \in V(G)$，$d(v) \in \{2,3\}$. 因为若 $d(v) = 2$，则唯一地确定了 $O^+(v)$. 不失一般性，我们假设 v 是 3- 次的，记 $E_v = \{e, f, g\}$，并且因为 G 有一条强双迹 W，$E_v = 3$. 因为 W 是无缩回的和双有向的，E_v 的每一对元素必定在 W 中出现，因此，或者 W，或者，W^{-1} 必定是形如

$$\cdots, e, v, f, \cdots, f, v, g, \cdots, g, v, e, \cdots,$$

或者形如

$$\cdots, e, v, f, \cdots, g, v, e, \cdots, f, v, g, \cdots.$$

在每种情况下，W 或者 W^{-1} 定义了 $O^+(v) := (e', f', g')$，即对 W 我们得到 $O^+(v) \in \{(e', f', g'), (e', g', f')\}$. 这样对这些 $O^+(v)$ 我们有 $S = \{W\}$ 作为一个轨道双覆盖，即 G 是严格上可嵌入的，引理证毕.

这样在 3- 正则图特殊情况下，严格上可嵌入和强双迹是等价的概念. 但汤姆森在他的文章中对每个 $r \geqslant 3$ 构造了无数个不是上可嵌入的 r- 正则 3- 连通图. 另一方面，对于连通图 G，如果 $\delta(G) > 3$，则 G 有一条强双迹 (因此，任意不是圈的连通欧拉图有一条强双迹). 这可立即从下面的引理得出.

引理 8.8　每一个连通图 G 有一条双有向双迹，使缩回仅在次为 1 和 3 的顶点产生①.

证明　反证法. 选 G，使得它的每一条双有向双迹在某个顶点 $v \in V(G) - (V_1(G) \cup V_3(G))$ 有一个缩回且 G 具有最小 $q_G = |E(G)|$. 若 $V_2(G) \neq \varnothing$，设 G_1 是一个 $V_2(G_1) = \varnothing$ 且同胚于 G 的图. 应用引理到 G_1 ($q_{G_1} < q_G$)，并且考虑 G_1 中的一条对应的双迹 W_1，易将 W_1 扩充为 G 的双迹 W，使 W 满足引理的结论. 从而 $V_2(G) = \varnothing$.

在 G 中用一个定向 2 边形代替每一条边构造一个连通的欧拉有向图 D. 于是对 $v \in V(D) = V(G)$，$d_G(v) = \mathrm{id}_D(v) = \mathrm{od}_D(v)$. 这样 G 的一个悬挂点变成 D 的一个次为 2 的顶点，同时，G 中次为 3 的顶点变成 D 中次为 6 的顶点. 对于这样的 v 通过两次重叠应用分裂引理，将 D 变换成一个连通的欧拉有向图 D_v，其中 v 在 D_v 中被三个次为 2 的顶点代替. 在 D 中对 G 的所有次为 3 的顶点都作这种变换. 我们得到一个连通的欧拉图 D_1，使对 $x \in V(D_1) - V_2(D_1)$ 有 $d_{D_1}(x) \geqslant 8$. 在 $V(D_1) - V_2(D_1)$ 上用下面的方法定义 D_1 的一个 (部分) 转移系统 X_1：

$$\{(a^+_{e,x})', (a^-_{e,x})'\} \in X_1(x)\text{当且仅当}a^+_{e,x} \in A^+_x, a^-_{e,x} \in A^-_x\text{ 且}a^+_{e,x}, a^-_{e,x}\text{对应于}e \in E_x.$$

由推论 6.15，D_1 有一个欧拉迹 T_1 与 X_1 相容. 由构造知，T_1 对应 G 的一条双有向双迹 W. 由 X_1 的定义知，W 在次至少是 4 的顶点没有缩回. 缩回在次为 1 的顶点产生，并且对每个次为 3 的顶点缩回至多沿着与它关联的一条边 (这一点通过适当地应用分裂引理可得). 引理证毕.

我们叙述下面的定理而不加证明，它是 [XUON79a，定理 2] 和重述②.

定理 8.9　一个连通图 G 是严格上可嵌入的当且仅当 G 有一个支撑树 T，使得 $G - T$ 的每一个分支都有偶数条边.

从定理 8.9 能够很容易导出定理 8.4. 就像上面所注意到的，在 3- 正则图的情况下，强双迹和严格上可嵌入性是等价的概念. 因此，这一点对每个同胚于一个

---

① 同样的结果能在 [SKIL85a，定理 1] 中找到，但那里的证明有缺陷 —— 这里给出的证明不同于斯凯尔顿 (Skilton) 和汤姆森的证明.

② 也见 [BEHZ79a，定理 5.14,5.15,5.16]，其中最后一个定理属于雄 (Xuong) 和简杰曼 (Jungermann). 事实上，汤姆森引进了严格上可嵌入的概念作为在 [XUON79a] 中所定义的上可嵌入的特殊情况. 我们注意到 [SCOT89a, ŚKOV89a] 是近来关于上可嵌入性专题的文章，后者包含了同一个专题的若干参考文献.

3- 正则图的图也成立. 考虑一个 3- 正则图 G 有 $p = 2k(k \in \mathbb{N})$. 对每个支撑树 T，$G - T$ 有

$$q - (p-1) = \frac{3p}{2} - (p-1) = k+1$$

条边. 这样如果 k 是偶数，则 $G - T$ 有奇数条边. 由定理 8.9，若 $p \equiv 0 \pmod 4$，G 不可能有一条强双迹.

然而，定理 8.9 (=[THOM87a，定理 2.1]) 是下面结果 ([THOM87a，定理 3.3]，那篇文章的主要结果) 的关键，下面的结果叙述了强双迹与特殊类型的支撑树之间的关系.

定理 8.10 对于无悬挂点的连通图 G，下面的说法等价:

1) G 有一个强双迹;

2) G 含有一个支撑树 T，使得 $G - T$ 的每个有奇数条边的分支含一个顶点 v 有 $d_G(v) > 3$.

证明 1) 蕴涵 2). 考虑 G 的一条强双迹 W，并且设点 v 是 G 的任意顶点. 对于 W 的每一段 e, v, f，其中 $e, f \in E_v$，

$$\text{由 } \pi(e') = f' \text{ 定义的函数 } \pi_v: \ E_v^* \longrightarrow E_v^*.$$

它是一个双射，因此，也是 E_v^* 的一个置换，能写为不相交循环 (置换) 的积

$$\pi_v = \pi_1 \ \cdots \ \pi_{r_v}, \quad r_v \geqslant 1 .$$

表示 π_v 的这种方法给出一个划分

$$\mathcal{P}(E_v^*) = \{E_{v,i}^* \mid i = 1, \cdots, r_v\}$$

及 $E_{v,i}^*$ 的元素的一个循环序 $O_{v,i}^+$，其中

$$O_{v,i}^+ = \pi_i, \quad i = 1, \cdots, r_v .$$

因此，如果我们用 r_v 个顶点 $v_1, \cdots, v_{r_v}$ 代替 $V(G)$ 的每个顶点 v，并且定义关联关系 $E_{v_i}^* := E_{v,i}^*$，则得到一个图 G_0，原来的 W 在 G_0 中作为一个强双迹 W_0 出现 (注意 $\delta(G_0) > 1$，这是因为 W 是一个强双迹蕴涵着 π_v 没有不动点). 定义 $O_{v_i}^+ := O_{v,i}^+$，现在从 G_0, W_0 和 $\{O_{v_i}^+ \mid i = 1, \cdots, r_v, \ v \in V(G)\}$ 的构造得到 G_0 的轨道双覆盖 S_0 满足等式

$$S_0 = \{W_0\} ,$$

即 G_0 是严格上可嵌入的. 由定理 8.9，G_0 有一个支撑树 T_0，使得 $G_0 - T_0$ 的每一个分支有偶数条边.

现在考虑 $G_1 := \langle E(T_0)\rangle_G$. 如果 G_1 是一个树，则 $G = G_0$ 且 $G_1 = T_0$，并且从定理 8.9 可得 2). 因此，我们可假设 G_1 含圈 C.

因为 T_0 是一个树，存在 $v_1 \in V(C)$，它至少对应着 G_0 的两个顶点，这就蕴涵 (考虑 $\delta(G_0) > 1$) $d_G(v_1) > 3$. 令 $G_2 := G_1 - e$，其中 $e_1 \in E(C) \cap E_{v_1}$，并且重复上面的论述直到对某个 $i > 1$，达到一个无圈图 $T := G_i \subset G$. 由构造法知，T 是一个树. $G - T$ 的具有奇数条边的分支 H 不能是 $G_0 - T_0$ 的分支，因此，它必含一条边 $e_j \in E_{v_j}$，其中 $d_G(v_j) > 3$ 且 $1 \leqslant j \leqslant i-1$，即 $v_j \in V(H)$. 这就证明了 1) 蕴涵 2).

2) 蕴涵 1). 考虑如 2) 中所描述的 G 的一个支撑树 T. 如果 $G - T$ 的每个分支有偶数条边，则由定理 8.9 和引理 8.7 立刻得到 G 有一条强双迹. 当 $G - T$ 有奇数条边的分支时，为了得到同样的结论，对每个这样的分支 H，增加一个新的顶点 w_H 和两条形如 $v_H w_H$ 的新边 $e_{H,1}$ 和 $e_{H,2}$，其中 $v_H \in V(H)$ 是某个固定的顶点且 $d_G(v_H) > 3$. 对这样得到的图 G^0，对每一个上述 H 增加 w_H 和 $e_{H,1}$ 到 T 中，T 扩充为 G^0 的一个支撑树 T^0. 现在 $G^0 - T^0$ 的每一个分支有偶数条边，因此，我们能够如上得到 G^0 有一条强双迹 W^0. 从 W^0 的定义知，W^0 必定是下面的形式：

$$W^0 = \cdots, e, v_H, e_{H,i}, w_H, e_{H,j}, v_H, f, \cdots, g, v_H, e_{H,j}, w_H, e_{H,i}, v_H, h, \cdots,$$

其中 $\{i, j\} = \{1, 2\}$. 这样我们能够把 W^0 化到一条双有向双迹

$$W_0^H = \cdots, e, v_H, f, \cdots, g, v_H, h, \cdots,$$

对上面的每一个 H 都这样做，我们就得到 G 的一条双有向双迹 W^*. 但是 W^* 可能不是无缩回的 (如若 $e = f$). 从 G^0 的构造知，W^* 只可能在 v_H 有缩回，其中 $d_G(v_H) > 3$. 用类似于引理 8.8 中的证明方法，我们能修改 W^*，使它成为 G 的一条双有向双迹 W，它在这些 v_H 不再有缩回. 因为 W 与 W^* 在 $V(G) - \{v_H \mid v_H \in V(H),\ q_H \equiv 1 \pmod 2\}$ 上的段是一致的. 因此，事实上，W 是一条强双迹. 这就证明了 2) 蕴涵 1). 定理证毕.

十分有意思的是，存在一个多项式算法，或者能够找到如定理 8.10 所述的树 T，或者肯定没有这样的 T 存在 [THOM87a，定理 3.4].

考察定理 8.4，人们不禁要问若 $p_G = 2 \pmod 4$，一个连通 3- 正则图 G 是否有一条强双迹? 图 8.1 说明了一般地上面问题的答案是否定的. 事实上，这个图的任一条从 x 到 y 的双有向双迹必定在 e_y 有一个缩回. 顺便注意到能用这个例子为基础构造无限多个 3- 正则图 G 满足 $p_G = 2 \pmod 4$，但是没有强双迹 (练习 8.4). 然而，这样的图 G 必定有低的连通度. 这一点从下面的结果可以看出，它是 [THOM87a，定理 6.1] 的一个精简和修改. 我们叙述它而略去其证明①.

① 这个定理的证明依赖于满足 $2 \leqslant \delta(G) \leqslant \Delta(G) \leqslant 3$ 的那些严格上可嵌入图的递归构造和 3- 次循环圈 4- 边连通图的递归特征.

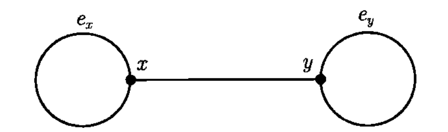


图 8.1　一个没有强双迹的 3 次图 G，其中 $p_G \equiv 2 \pmod 4$

定理 8.11　一个满足 $p_G \equiv 2 \pmod 4$ 的 3- 正则 3- 连通图 G，若对每一个三条边的边割 $E_0, G - E_0$ 的 (两个) 分支 G_1 和 G_2 满足

$$p_{G_1} \equiv p_{G_2} \equiv 1 \pmod 4\ ,$$

则 G 有一个强双迹 (注意因为 G 是 3- 连通的，$G - E_0$ 不可能有多于两个分支).

现在我们能够证明下面 [THOM87a，定理 6.2] 的一个 (等价) 说法，它可视为定理 8.4 的一个最一般的推广.

定理 8.12　一个满足

$$\delta(G) > 2, \quad \kappa(G) > 1, \quad \lambda_c(C) > 3$$

的简单图 G 有一条强双迹，除非

$$\delta(G) = \Delta(G) = 3 \quad 且 \quad p_G \equiv 0 \pmod 4\ .$$

证明　假设 $\Delta(G) < 4$，则 $\delta(G) = \Delta(G) = 3$，即 G 是 3- 正则图. 若 $\kappa(G) = 2$，则 $\lambda(G) = \lambda_c(G) = 2$ (见引理 3.38)，与 $\lambda_c(G) > 3$ 的假设矛盾. 因此，G 是 3- 连通的. 在这种情况下，定理的正确性从定理 8.4 和定理 8.11 立即可得. 因此，我们可以假设 $\Delta(G) \geqslant 4$. 考虑有 $d := d(v) \geqslant 4$ 的一个顶点 v. 为了构造一个图 G_1 满足定理的假设，并且

$$|V(G_1) - V_3(G_1)| < |V(G) - V_3(G)|, \qquad (*)$$

考虑 $G - v$ 的极大连通无桥子图 $H_1, \cdots, H_r (r \geqslant 1)$ (注意 $G - v$ 是连通图的，但可以有桥)，它们是 $G - v - \{e \mid e 是 G - v 的桥\}$ 的分支. 我们根据下面的法则定义 $O^+(v) = (e_1', e_2', \cdots, e_d')$. 不失一般性，首先假定对 $1 \leqslant k \leqslant s \leqslant r$，$H_k$ 含 x_k 和 y_k，使得 $x_k v, y_k v \in E_v$，记 $e_k = x_k v$，$e_{k+\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} = y_k v (1 \leqslant k \leqslant s)$，然后任意地用 e_j 表示 E_v 的其余元素，其中 $j \notin \{k + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \mid 1 \leqslant k \leqslant s\}$，$s < j \leqslant d$ (注意如果 $G - v$ 有一个桥，则 $s \geqslant 2$，这一点从 $\delta(G) > 2$ 和 $bc(G - v)$ 在这时是一个非平凡树的事实可得). 注意到因为 G 是简单图，则 $x_k \neq y_k$.

现在引进顶点 $v_i \notin V(G_v) (1 \leqslant i \leqslant d)$ 且设 v_i 与 e_i 关联，而与 v_{i-1} 和 v_{i+1} 邻接 (对 $i = 1$，令 $v_{i-1} = v_d$ 且对 $i = d$，令 $v_{i+1} = v_1$). 这样从 $G - v$ 得到的图 G_0 有下面的性质：

a) G_0 是具有 $\delta(G_0) > 2$ 的简单图 (因为对 $1 \leqslant i \leqslant d$ 有 $d_{G_0}(v_i) = 3$，这一点可以从 G_0 的构造得出).

b) 因为 $\kappa(G) > 1$ 和 G_0 的构造有 $\kappa(G_0) > 1$.

c) $\lambda_c(G_0) > 3$; 否则，考虑 G_0 的一个圈边割 E_0 且 $|E_0| \leqslant 3$. 我们得到对某个 i 和 j，$1 \leqslant i < j \leqslant d$ 有 $v_iv_{i+1}, v_jv_{j+1} \in E_0$ (对 $j = d$，令 $v_{j+1} = v_1$). 这直接从 $d > 3$，$\kappa(G) > 1$ 和 $\lambda_c(G) > 3$ 可得. 因此，我们可以记 G_0 的圈 $C = \langle\{v_n \mid n = 1, \cdots, d\}\rangle$ 为下面的形式：

$$C = P_{i+1,j}, v_jv_{j+1}, P_{j+1,i}, v_iv_{i+1}, v_{i+1} ,$$

其中 $P_{i+1,j}$ 和 P_{j+1} 是 $C - \{v_jv_{j+1}, v_iv_{i+1}\}$ 的分支，进而 $e_0 = x_0y_0 \in E_0 - \{v_iv_{i+1}, v_jv_{j+1,i}\}$ 是 $G - v$ 和 $G_0 - (E_0 - \{e_0\})$ 的一个桥. 因为 $bc(G - v)$ 是一个非平凡树，因此，$G - v$ 含 H_α 和 H_β，使得

(i) 对 $G_0 - (E_0 - \{e_0\})$ 的每一条连接 H_α 的一个顶点和 H_β 的一个顶点 ($1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant s$) 的路 $P_{\alpha,\beta}$ 有 $e_0 \in P_{\alpha,\beta}$.

(ii) H_α 和 H_β 都恰好与 $G - v$ 的一个桥关联 (注意 G 是 $\delta(G) > 2$ 的简单图).

(iii) $E(H_\alpha) \neq \varnothing \neq E(H_\beta)$.

另一方面，因为 (ii),(iii) 以及 G_0 的构造，存在 $x_\alpha, y_\alpha \in V(H_\alpha)$，$x_\beta, y_\beta \in V(H_\beta)$，使得

$$v_\gamma \in V(P_{i+1,j}) \text{ 当且仅当 } v_{\gamma+\lfloor\frac{d}{2}\rfloor} \in V(P_{j+1,i}) , \tag{**}$$

其中 $\gamma = \alpha, \beta$. 注意 $V(C) = V(P_{i+1,j}) \cup V(P_{j+1,i})$.

现在选 $V_\delta \in \{v_\alpha, v_{\alpha+\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}\}$ 和 $v_\epsilon \in \{v_\beta, v_{\beta+\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}\}$，使得 $\{v_\delta, v_\epsilon\} \subseteq V(P_{m,n})$，其中 $(m,n) = (i+1,j)$ 或者 $(m,n) = (j+1,i)$ (见 (**)) 并且考虑 $P_{m,n}$ 中连接 v_δ 和 v_ϵ 的路 $P_{\delta,\epsilon}$. 于是 $z_\beta v_\epsilon \in E(G_0) - E_0$，其中 $z_\alpha = x_\alpha$ 或者 $z_\alpha = y_\alpha$，并且 $z_\alpha v_\delta \in E(G_0) - E_0$，其中 $z_\beta = x_\beta$ 或者 $z_\beta = y_\beta$. 于是

$$P_0 := z_\alpha, z_\alpha v_\delta, P_{\delta,\epsilon}, v_\epsilon z_\beta, z_\beta$$

是连接 H_α 的一个顶点和 H_β 的一个顶点的一条路，并且不含 e_0. 这与 (i) 矛盾，于是证明了 c) 的正确性.

如果 G_0 是一个有 $p_{G_0} \equiv 0 \pmod 4$ 的 3- 正则图，则细分边 v_dv_1 和 $v_{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}v_{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor+1}$，用一条边连接细分的顶点并且用 G_1 表示新图；否则，设 $G_1 := G_0$. 无论在哪种情况下，G_1 都满足定理的假设，并且如果 G_1 是 3- 正则图，则 $p_{G_1} \neq 0 \pmod 4$，进而，G_1 满足 (*). 由归纳法，G_1 有一条强双迹 W_1，它容易变换为 G 的一条双有向双迹 W. 如果 W 不是一条强双迹，则缩回恰好在 v 产生. 因为 $d(v) > 3$，能在 v 修改 W，得到 G 的一条强双迹 (见引理 8.8 的证明). 定理证毕.

定理 8.11 和定理 8.12 某种程度上是最好可能的结果. 正如汤姆森在他的文章中所说明的那样，尽管 $p_G \equiv 2 \pmod 4$，也存在无限多个没有强双迹的 3- 正则 3-

连通图 G. 但是，它们含有圈边割 E_0，使 $G-E_0$ 的分支 G_1 和 G_2 满足同余式 $p_{G_i}\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)(i=1,2)$. 特别地，如果用一个三角形代替一个圈 4- 边连通 3- 正则图的每一个顶点，则所产生的图没有强双迹.

研究不同类型的强双迹在 [WAGN70a，p36, 问题 4] 中被提出，即考虑 $E_0\subseteq E(G)$，其中 G 是一个连通图，并确定 G 是否有一条双迹 W，使每一个 $e_0\in E_0$，W 经过它的每个方向一次，同时对每个 $e_1\in E(G)-E_0$，在同方向 (不是预先指定的) 经过两次，称这样的 W 是一条 **E_0- 限制双迹**. 这个问题的解用下面的规则给出 [VEST75a，定理 2]. 这里我们给出一个多少有点不同的证明.

定理 8.13 设 G 是一个连通图，并且选定 $E_0\subseteq E(G)$. G 有一条 E_0- 限制双迹当且仅当 $G-E_0$ 是欧拉的.

证明 设 G 有一条 E_0- 限制双迹 W. 用两条形如 $(x_0,y_0),(y_0,x_0)$ 的弧代替每条边 $e_0=x_0y_0\in E_0$，同时根据 W 从 x_1 到 y_1 经过 e_1，还是从 y_1 到 x_1 经过 e_1. 用两条形如 (x_1,y_1) 的弧，或者两条形如 (y_1,x_1) 的弧代替每条边 $e_1=x_1y_1\in E(G)-E_0$，这样从 G 得到有向图 D_W. 从 D_W 的构造立即可得 W 对应于 D_W 的一条欧拉迹 T_W，反之亦然，即 D_W 是一个欧拉有向图. 因为每一个 $e_0\in E_0$ 对应于 D_W 的一个定向 2- 边形 $C(e_0)=\langle\{x_0,y_0\},\{y_0,x_0\}\rangle$，并且因为 $\bigcup\limits_{e_0\in E_0}C(e_0)$ 是 D_W 的一个欧拉有向子图，于是

$$D_1:=D_W-\bigcup_{e_0\in E_0}C(e_0)$$

是一个欧拉有向图. 由欧拉有向图的定义和 D_W 及 D_1 的构造，对每个 $v\in V(G)$ 我们有

$$d_{G-E_0}(v)=\frac{1}{2}(\mathrm{id}_{D_1}(v)+\mathrm{od}_{D_1}(v))=\mathrm{id}_{D_1}(v)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

(注意 $e_v\in E_v$ 对应于有相同定向的两条弧). 因此，$G-E_0$ 是欧拉的.

反之，假设 $G-E_0$ 是欧拉的. 设 $G_1,\cdots,G_k(k>1)$ 表示 $G-E_0$ 的分支，并且设 T_i 是 $G_i(i=1,\cdots,k)$ 的一条欧拉迹. 对每一个 $i=1,\cdots,k$，根据 T_i 从 x 到 y 经过 e 还是从 y 到 x 经过 e，用两条形如 (x,y) 或者两条形如 (y,x) 的弧代替 $e=xy\in E(G_i)$. 用 D_i 表示这样得到的有向图. 因为对每个顶点 $v\in V(G_i)$，T_i 从 v 到 $N(v)$ 的元素和从 $N(v)$ 的元素到 v 经过的边数一样多，则由上面的构造，对每个 $v\in V(G_i)$ 和 $i=1,\cdots,k$，

$$\mathrm{id}_{D_i}(v)=\mathrm{od}_{D_i}(v)=d_{G_i}(v).$$

这样 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}D_i$ 是一个欧拉有向图，因此，

$$D:=\bigcup_{i=1}^{k}D_i\cup\bigcup_{e_0\in E_0}\langle\{(x_0,y_0),(y_0,x_0)\mid e_0=x_0y_0\}\rangle$$

是一个欧拉有向图. 从 D 的实际构造知，D 的任一条欧拉迹导出 G 的一条 E_0- 限制双迹. 定理证毕.

事实上，从定理 8.13 的证明知这个结果能推广到更一般的情况：在 G 的某一条覆盖途径 W 中，每条边 $e \in E_0$ 在每个方向被 W 用 m_e 次，其中 m_e 可以随 e 变化，同时每条边 $e \in E(G) - E_0$ 在两个可能的方向中的一个恰好被 W 用 $m \in \mathbb{N}$ 次 (但它不是事先给定的)，称这样的 W 是一条 $(\boldsymbol{E_0; m_e, m})$- **限制覆盖途径**，我们得到下面的结果，它的证明留给读者作为练习.

推论 8.14 对一个连通图 G，设 $E_0 \subseteq E(G)$，$\{m_e \mid e \subset E_0\} \subset \mathbb{N}$ 且 $m \in \mathbb{N}$ 是任选的，则 G 有一个 $(E_0; m_e, m)$- 限制覆盖途径当且仅当 $G - E_0$ 是欧拉的.

代替考虑双迹或用每条边恰好 k 次的 (可能在不同的方向) 闭覆盖途径，我们可以问一个图是否有一条 $V(G)$- 覆盖途径通过每个顶点恰好 k 次? 对 $k = 1$ 这就是 G 是否是哈密顿图的问题. 即使 $k > 1$ 是一个固定的整数，这个问题仍然是一个 NP- 完全问题. 然而，如果问是否存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得 G 有一个对应的 $V(G)$- 覆盖途径，则这个问题能够用多项式时间解决 (见 [BROE88a]).

8.2 图中的值–真途径和整流

在 [FLEI77a] 中介绍了由定理 8.13 和推论 8.14 所回答的瓦格纳 (K. Wagner) 的问题为基础的更一般类型的闭覆盖途径.

定义 8.15 设 G 是一个连通图且给定一个整数边标号 $\varphi : E(G) \to N \cup \{0\}$. W 是 G 的一个闭覆盖途径，如果对每个 $e \in E(G)$，当 $\varphi(e) = 0$ 时，W 在两个方向经过 e 同样的次数；当 $\varphi(e) > 0$ 时，W 在一个方向经过 e 恰好 $\varphi(e)$ 次且在另一个方向不经过 e (其中方向不是预先指定的)，则 W 是 G 的**值–真途径**，进而如果对每个 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，我们记 $E_i = \{e \in E(G) \mid \varphi(e) = i\}$，并且称 E_i 为 (φ 的) i- **集**.

推广定理 8.13 和推论 8.14 的证明，我们得到下面一个图有值–真途径的一个充分条件 (也见 [FLEI77a，定理 3]).

推论 8.16 设 φ 是连通图 G 的一个非负整数边标号. 如果对每个 i- 集 E_i ($i \in \mathbb{N}$)，$\langle E_i \rangle$ 是欧拉的，则 G 中存在一条值–真途径.

推论 8.16 的证明留下作为一个练习. 注意如果 φ 在 $E(G) - E_0$ 上是一个常量，则推论 8.16 可以化到推论 8.14，进而应该注意到在定义 8.15 中，如果我们要求 W 在 $\varphi(e) = 0$ 时，在每个方向经过 e 恰好一次将不失去一般性. 这一点可以从下面的事实看出. 通过增加欧拉有向图 D_1 的一些 2- 边形则得到一个欧拉有向图 D_2，在减少的情况下，只要每个 $e \in E_0$ 在 D_2 中用一个 2- 边形表示，那么当 D_1 是连通的，则 G_2 也是连通的. 这样如果对每个 $e \in E(G) - E_0$，$\varphi(e) = 2$，则推论 8.16 可化到定理 8.13.

下面的规则刻画了保证连通图 G 有值–真途径的函数 φ. 它也可以作为后面讨论的一些结果的基础.

引理 8.17 设 φ 是连通图 G 的一个非负整数边标号，则下面的叙述等价：

1) G 有一个值–真途径；

2) 存在 $G-E_0$ 的一个定向 D，使对每个 $v\in V(G)=V(D)$，

$$\sum_{a_e\in A_v^+}\varphi(e)=\sum_{a_e\in A_v^-}\varphi(e),$$

其中 $a_e\in A(D)$ 对应于 $e\in E(G)-E_0$.

证明 如果 G 有一条值–真途径，如定理 8.13 的证明一样，原则上可构造一个有向图 D_W. 只是当 $e=xy\in E(G)-E_0$ 且 W 分别从 x 到 y 和从 y 到 x 通过 e，则分别用 $\varphi(e)$ 条形如 (x,y) 和 (y,x) 的弧代替 e. 同时，对 $e=xy\in E_0$，若 W 在一个方向通过 e 多少次，就用多少条形如 (x,y) 和 (y,x) 的弧代替 e. 类似地，W 对应于 D_W 的一条欧拉迹 T_W，即 D_W 是欧拉的. 由构造知，对基图为 $G-E_0$ 的有向图 $D\subseteq D_W$，对每个 $v\in V(D)=V(D_W)=V(G)$ 有

$$\sum_{a_e\in A_v^+}\varphi(e)-\sum_{a_e\in A_v^-}\varphi(e)=\mathrm{od}_{D_W}(v)-\mathrm{id}_{D_W}(v)=0\ .$$

反之，设 $G-E_0$ 是满足 2) 中等式的有向图 D 的基图. 用 $\varphi(e)$ 条形如 (x,y) 的弧代替每条弧 $a_e=(x,y)$，并且对每个 $x_0y_0\in E_0$，增加一条弧 (x_0,y_0) 和一条弧 (y_0,x_0)，这样得到了有向图 D_W. 由 D_W 的构造知，对每个 $v\in V(D_W)=V(D)$ 有

$$\mathrm{od}_{D_W}(v)-\mathrm{id}_{D_W}(v)=\sum_{a_e\in A_v^+}\varphi(e)-\sum_{a_e\in A_v^-}\varphi(e)=0\ ,$$

其中 $A_v^+,A_v^-\subseteq A(D)$，即 D_W 是一个有向欧拉图，并且像前面一样得出结论：D_W 的一条欧拉迹对应于 G 的一条值–真途径. 引理证毕.

引理 8.17 容许我们不依赖于有向图刻画那些有一条值–真途径的 G 的非负整数边标号.

定理 8.18 假设对连通图 G 的非负整数边标号 φ 有 $E(G)-E_0\neq\varnothing$，则下面的叙述等价：

1) G 有一条值–真途径;

2) 对每条边 $e=xy\in E(G)$，存在数 $s_{e(x)}$ 和 $s_{e(y)}$ (其中 $e(x)$ 和 $e(y)$ 表示 e 的半边，如果 $x=y$，令 $e'=e(x)$，$e''=e(y)$)，使得 a) $\{s_{e(x)},s_{e(y)}\}=\{1,-1\}$; b) $\sum\limits_{e(x)\in E_x^*}s_{e(x)}\varphi(e)=0$.

证明　1) 蕴涵 2). 由引理 8.17，存在一个有向图 D，使 $G-E_0$ 为它的基图，并满足 $\sum_{a_e\in A_v^+}\varphi(e)-\sum_{a_e\in A_v^-}\varphi(e)=0$. 考虑一个固定的 $x\in V(G)$，对 $e=xy\in E_0$，定义 $s_{e(x)}$ 和 $s_{e(y)}$，使满足 a)；对 $e=xy\in E(G)-E_0$，如果 $a_e\in A_x^+$，定义 $s_{e(x)}=+1$；如果 $a_e\in A_x^-$，定义 $s_{e(x)}=-1$. 注意这包括 e 是环的情况，这时 $A_x^+\cap A_x^-\supseteq\{a_e\}$. $s_{e(x)}$ 和 $s_{e(y)}$ 的这个定义满足 a). 注意若 $e\in E_0$，则 $\varphi(e)=0$，上面的方程能重写为下面的形式：

$$\begin{aligned}0&=\sum_{a_e\in A_x^+}\varphi(e)-\sum_{a_e\in A_x^-}\varphi(e)=\sum_{a_e\in A_x^+}s_{e(x)}\varphi(e)+\sum_{a_e\in A_x^-}s_{e(x)}\varphi(e)\\&=\sum_{\substack{e(x)\in E_x^*\\e\notin E_0}}s_{e(x)}\varphi(e)+\sum_{\substack{e(x)\in E_x^*\\e\in E_0}}s_{e(x)}\varphi(e)=\sum_{e(x)\in E_x^*}s_{e(x)}\varphi(e).\end{aligned}$$

这就证明了 1) 蕴涵 2).

2) 蕴涵 1). 等式 b) 可化为

$$\sum_{\substack{e(x)\in E_x^*\\e\notin E_0}}s_{e(x)}\varphi(e)=0\ .$$

现在，如果 $s_{e(x)}=+1$ (因此，由 a)，$s_{e(y)}=-1$)，用形如 $a_e=(x,y)$ 的弧代替每条形如 $e=xy$ 的边；如果 $s_{e(x)}=-1$，用弧 $a_e=(y,x)$ 代替它. 在 $e=xy$ 是环的情况下，这就意味着如果 $s_{e(x)'}=+1$，则 (x,x) 应看成从 $e(x)'$ 到 $e(x)'$ 定向. 对每个 $x\in V(G)$ 这样做，我们能重写上面的等式为

$$0=\sum_{\substack{e(x)\in E_x^*\\e\notin E_0}}s_{e(x)}\varphi(e)=\sum_{a_e\in A_x^+}\varphi(e)+\sum_{a_e\in A_x^-}\varphi(e),$$

其中 $A_x\subseteq A(D)$，D 是基图为 $G-E_0$ 的有向图. 由引理 8.17，G 有一条值–真途径. 这就结束了第二个蕴涵的证明. 定理证毕.

不幸的是尽管引理 8.17 和定理 8.18 的叙述看起来很简单，但它们揭示以下问题的困难所在：对一个给定的连通图的 (非负) 整数标号确定 G 是否有一条值–真途径. 因为从刚才所引的结果知若 G 有一个值–真途径，在 $V(G)$ 的每个顶点 v 必须划分 $A:=E_v^*-\{e(v)\mid\varphi(e)=0\}$ 为两类：A' 和 $A-A'$，使得

$$\sum_{a\in A'}\varphi(a)=\sum_{a\in A-A'}\varphi(a),$$

其中 A' 恰好含那些满足 $s_{e(v)}=1$ 的 $a=e(v)$. 对于 $s:=\varphi$，前面的说法恰好如 [GARE79a，[SP12]] 中所引的划分问题. 根据加瑞 (Carey) 和约翰森的说法，这个问

题是 NP- 完全的. 另一方面，确定 D_W 的存在性的一个明显的算法 (见引理 8.17 的 2)) 在于构造 2^{q_1-1} 个有向图 D_1，其中 $q_1 = |A(D_1)| = |E(G) - E_0|$，并且它对应着 $G - E_0$ 的所有定向，其中对每一个这样的定向和它的逆定向，一个满足引理 8.17 的 2) 当且仅当另一个也满足 8.17 的 2) (这就是为什么我们用 $q_1 - 1$ 代替 q_1 作为指数). 在构造这些有向图的每一步，必须决定所得到的有向图是否满足这个等式.

此外，尽管我们在每个 $v \in V(G)$ 解一个对应的划分问题，但这不能保证存在一条值-真途径. 这可由图 8.2 (=[FLEI77a，图 1]) 中的图 $K_{4,\varphi}$ 说明. 事实上，对 $K_{4,\varphi}$ 在每一个顶点的划分问题有唯一解 $\{\{1,2\}\{3\}\}$. 这一点和在构造 D_1 时 (见上文) 能够指定一条弧的事实说明 $K_{4,\varphi}$ 没有值-真途径. 例如，不失一般性，如果 $(u,v) \in A(D_1)$，则 $(w,v),(v,t) \in A(D_1)$. 但是这样我们必须也有 $(w,t) \in A(D_1)$. 另一方面，$|A_t^-| > 1$ 必须蕴涵 $A_t^+ = \{(t,v)\}$，这与 $(v,t),(w,t) \in A(D_1)$ 矛盾. 因此，$K_{4,\varphi}$ 没有值-真途径.

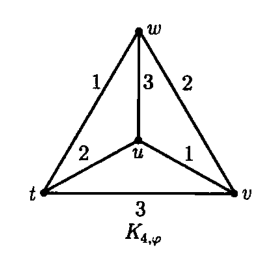


图 8.2 有一个整数边标号 φ 的四面体使对每个 $x \in V(K_{4,\varphi})$ 划分问题有唯一解，但 $K_{4,\varphi}$ 没有值-真途径

基于引理 8.17 和定理 8.18 所提出的等价性引进下面的记号. 为了简单起见，我们记 $\varphi(A_0) = \sum_{a_e \in A_0} \varphi(e)$，其中 $A_0 \subseteq A(D)$ 且 a_e 对应于 D 的基图 G 中的 $e \in E(G)$.

定义 8.19 对于图 G (不必连通) 和一个 $\varphi : E(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$，如果 G 有一个定向 D，使得对每个 $v \in V(D)$，

$$\varphi(A_v^+) = \varphi(A_v^-), \tag{1}$$

则称 φ 为一个 **整流** (或简称为**流**). 特别地，如果 $\max_{e \in E(G)} \varphi(e) < k$，我们称流 φ 为一个 ***k*- 流**.

对 $\varphi : E(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$，如果对每个 $e \in E(G)$，

$$0 \leqslant \varphi(e) < k$$

且存在 G 的一个定向 D，使得对每一个 $v \in V(D) = V(G)$，

$$\varphi(A_v^+) \equiv \varphi(A_v^-) \pmod k, \tag{2}$$

则称 φ 是 G 中的一个 **(模 *k*-) 流**.

对于一个 (模 k-) 流，如果 $E_0 \neq \varnothing$，我们称 φ 是一个 **部分 (模 *k*-) 流**；否则，称 φ 是一个 **处处不为零的 (模 *k*-) 流**.

注 8.20　1) 为了区别 $E_0 \neq \varnothing$ 和 $E_0 = \varnothing$，引进术语部分流 (见 [YOUN83a]). 大多数作者简称部分流为流.

2) 在 k- 流的情况下，某些作者定义 $\varphi : E(G) \to \{0, \pm 1, \cdots, \pm(k-1)\}$ (见 [SEYM81a,81d]). 然而，这里给出的定义不是一个真正的约束. 因为如果 φ 是在这一更广泛意义下的 k- 流，并且在 G 的一个定向 D 中弧 $a_e \in A(D)$，使得 $\varphi(e) < 0$，那么在 D 中把弧 a_e 反向，这样得到有向图 D_1，用 $\varphi_1(e) = -\varphi(e)$，当 $f \neq e$ 时，$\varphi_1(f) = \varphi(f)$ 定义的 φ_1 也满足定义 8.19 中的等式 (1). 另一方面，同理，k- 流的其他定义也独立于具体的定向，即如果 (1) 在 G 的某个定向 D 中被实现，那么对 D 的另一定向 D_1 能得到一个 k- 流 φ_1，使得 $|\varphi_1(e)| = |\varphi(e)| (e \in E(G))$. 然而由引理 8.17 知，如果 G 连通，那么上述定义的流 (k- 流) 的概念，等价于值–真途径的定义 (具有 $\max\limits_{e \in E(G)} \varphi(e) < k$ 的值–真途径)，这一等价性也蕴涵着至少有一个桥的图，对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 不可能有处处不为零的 k- 流.

3) 由定义 8.19 知，每一个 k- 流也是 $(k+1)$- 流.

4) 由 2) 中第一部分和 (模 k)- 流 φ 的定义知，对于 G 的一个对应于 φ 的定向 D，$D_1 := (D - \{(x,y)\}) \cup \{(y,x)\}$ 是对应于 (模 k)- 流 φ_1 的一个定向，其中 φ_1 定义如下：

$$\varphi_1 |_{E(G)-\{xy\}} = \varphi |_{E(G)-\{xy\}}, \quad \varphi_1(xy) \equiv k - \varphi(xy) \pmod{k} .$$

5) 如果 φ 是 G 的一个 k- 流或者是一个 (模 k)- 流且 D 是 G 对应于 φ 的一个定向，则 D 的逆定向 D^R 也对应于 φ，这是因为 D 的所有弧的反向使 (1) 和 (2) 不变.

注意一个图 G 有一个处处不为零的 2- 流当且仅当 G 是欧拉的. 3- 正则图的 3- 流，G 的值–真途径和 G 的结构性质之间存在有趣的关系 (也见 [JAEG79a，命题 2]).

定理 8.21　假设具有边标号 φ 的 3- 正则图 G 满足对任意的 $e \in E(G)$ 有 $\varphi(e) \in \{1, 2\}$，则 G 有一条值 - 真途径 (分别地，φ 是一个处处不为零的 3- 流) 当且仅当

a) $\{e \in E(G) \mid \varphi(e) = 2\}$ 是 G 的一个 1- 因子;

b) G 是 2- 部图.

证明　设 G 有一个值–真途径. 根据引理 8.17，构造出以 $G = G - E_0$ 为基图的 D. 对每个 $v \in V(D)$ 和 $A_{i,v} := \{a_e \in A_v \mid \varphi(e) = i\} (i = 1, 2)$ 有

$$|A_{2,v}| = 1$$

且

$$\text{或者 } A_v^+ = A_{1,v}, A_v^- = A_{2,v}, \quad \text{或者 } A_v^+ = A_{2,v}, A_v^- = A_{1,v} . \tag{$*$}$$

这可由 G 和 φ 的假设及引理 8.17 得出，即 G 的每一个顶点恰好关联于一条边有标号 2. 这就证明了 a). 在 D 中定义一个顶点划分 $\{V_0, V_i\}$，使得

$$V_0 = \{v \in V(D) \mid A_v^+ = A_{2,v}\}, \quad V_i = \{v \in V(D) \mid A_v^- = A_{2,v}\} .$$

因为 $|A_{2,v}| = 1(v \in V(G))$，这个顶点划分完全被确定. 如果存在 $a_e = (x, y) \in A(D)$ 有 $\varphi(e) = 1$ 且 $\{x, y\} \subseteq V_p(p \in \{0, i\})$，在 x 和 y 具有 $\varphi(f(x)) = 2 = \varphi(f(x))$ 的弧 $a_{f(x)}$ 和 $a_{f(y)}$ 满足 $\{a_{f(x)}, a_{f(y)}\} \subseteq A_x^+ \cup A_y^+$ (如果 $p = 0$)，或者 $\{a_{f(x)}, a_{f(y)}\} \subseteq A_x^- \cup A_y^-$ (如果 $p = i$). 在任何情况下，在顶点 x 和 y 之一违反了引理 8.17 的 2) 中的等式. 这个矛盾和 $E_0 = \varnothing$ 蕴涵 G 的确是一个 2- 部图.

相反地，假设 G 满足 a) 和 b). 因为 G 是连通的，顶点二划分 $\{V_0, V_1\}$ (即 $E(\langle V_0 \rangle) = E(\langle V_i \rangle) = \varnothing$) 是唯一确定的. 用从 V_0 到 V_i 定向的弧 a_e 代替满足 $\varphi(e) = 2$ 的每条边 e，同时用从 V_i 到 V_0 定向的弧 a_f 代替每条满足 $\varphi(f) = 1$ 的边 f 来构造 D. 由 a 和 D 的定义，在每个 $v \in V(D)$，我们有等式 (*) 成立 (见证明的第一部分). 这与 D 满足引理 8.17 的 2) 等价. 这样 G 有一条值–真途径 (分别地，一个处处不为零的 3- 流). 定理证毕.

当然，如果仅关心 3- 流，可以在定理 8.21 中放弃 G 是连通的假设.

事实上，引理 8.17，定理 8.18 和定理 8.21 导出有一个值–真途径的 G 和 φ 的另一个刻画. 不失一般性，我们假定 $E_0 = \varnothing$.

推论 8.22 对于一个具有正整数边标号的连通图 G，下面的结论等价:

1) G 有一条值-真途径 (分别地，φ 是处处不为零的流);

2) 存在一个 2- 部图 H 有顶点划分 $\{V_1, V_2\}$ 且具有整数边标号 φ_H 和一个同态 $\psi : H \to G$，使得

a) ψ 是 $E(H)$ 和 $E(G)$ 之间以及 $V_i(i = 1, 2)$ 和 $V(G)$ 之间的一个双射;

b) 对每个 $e \in E(H)$ 有 $\varphi_H(e) = \varphi(\psi(e))$;

c) 用 $\sigma(v) := \sum\limits_{e \in E_v(H)} \varphi_H(e)$ 定义的函数 $\sigma : V(H) \to \mathbb{N}$ 满足如果 $\psi(v_1) = \psi(v_2)(v_1 \in V_1, v_2 \in V_2)$，则 $\sigma(v_1) = \sigma(v_2)$.

因为推论 8.22 的证明很容易从前面的结果以及它们的证明中导出，因此，我们留下它作为一个练习.

如前所述，NP- 完全的划分问题的一个 p- 折解是确定关于非负整数边标号 φ，G 是否有一条值–真途径 (分别地，φ 是否一个流) 的必要条件. 另一个条件，称为西蒙 (Seymour) 割条件，也是相当有用的. 我们说 G 和 $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$ 满足这个条件当且仅当对每一个边割 E_S，

a) $\varphi(E_S) := \sum\limits_{e \in E_S} \varphi(e) \equiv 0 \pmod 2$;

b) $\max\{\varphi(e) \mid e \in E_S\} \leqslant \dfrac{1}{2}\varphi(E_S)$.

推论 8.23 在连通图 G 中每个处处不为零的流 φ，即每个使 G 有值–真途径的 $\varphi: E(G) \to \mathbb{N}$，满足西蒙割条件.

证明 对于 G 的一条值–真途径 W，根据引理 8.17 的 2) 构造 D，因为对每个 $e \in E(G)$，$\varphi(e) > 0$，它的基图是 G. 如引理 8.17 的证明中一样，由 D 构造 D_W. 因为 D_W 是一个欧拉有向图，因此，对 D_W 的每个弧割 A_S，存在一个顶点划分 $\{V_0, V_i\}$，使得在 D_W 中有

$$a^+(V_0) = a^-(V_i) = a^+(V_i) = a^-(V_0) \ .$$

在 D 中，这等同于

$$\sum_{a_e \in A^+(V_0)} \varphi(e) = \sum_{a_e \in A^+(V_i)} \varphi(e) \ .$$

因此，用 E_S 表示 G 中对应 A_S 的边割，我们得到

$$\varphi(E_S) = \sum_{a_e \in A^+(V_0)} \varphi(e) + \sum_{a_e \in A^+(V_i)} \varphi(e) \equiv 0 \pmod 2 \ .$$

这样西蒙割条件中的 a) 成立. 不失一般性，假定关于 E_S 有最大 $\varphi(f)$ 的某个 f，$a_f \in A^+(V_0)$，则从前面的等式，我们得到

$$\varphi(f) = \sum_{a_e \in A^+(V_i)} \varphi(e) - \sum_{\substack{a_e \in A^+(V_0) \\ e \neq f}} \varphi(e) \leqslant \sum_{a_e \in A^+(V_i)} \varphi(e) = \frac{1}{2}\varphi(E_S) \ .$$

推论证毕.

注 8.24 首先在 [SEYM79a,(3.5)] 中列出的西蒙割条件，是在研究平面图的圈覆盖时提出来的，而不是为了研究某些闭覆盖途径引进的. 虽然很容易证明存在值–真途径的必要条件，要在平面无桥图和相容圈分解的条件下，证明存在值–真圈覆盖 (即圈覆盖 S，其中每条边 e 恰好属于 S 的 $\varphi(e)$ 个元素) 的必要和充分条件绝对是件非平凡的事. 我们叙述这些事实说明在这里介绍这个条件是适当的 (推论 8.23)，但是也因为它与下面结果有一定的关系. 这里图 G 的一个定向圈覆盖是一个圈覆盖，它的元素能用这样一种方法定向，使任意边在它所属的所有圈上给出相同的方向.

推论 8.25 一个具有正整数标号的连通图 G 有一条值–真途径当且仅当 G 有一个值–真定向圈覆盖.

证明 首先对 G 的一条值–真途径 W 构造有向图 D_W (见引理 8.17 的证明). 因为 D_W 是欧拉的，它有一个圈分解 S_W (定理 4.8). 因为 $\varphi(e) \neq 0$ 和 D_W 的构造，那么 S_W 的每一个圈对应于 G 的一个圈. 因此，S_W 对应于 G 的一个经过每条边 $\varphi(e)$ 次的圈覆盖. 这样 S 是一个值–真圈覆盖，进而如果 S 的每一个元素根据 S_W 的对应元素定向，则 S 变为一个定向圈覆盖.

其次，如果 G 有一个值–真定向圈覆盖 S，能够得到一个与 S 有关的有向图 D_S. 它是把 G 中边 $e=xy$ 用 $\varphi(e)$ 条弧 a_e 代替得到的有向图，其中这 $\varphi(e)$ 条弧根据 S 中含 e 的元素的定向来定向为从 x 到 y 或从 y 到 x. 这样 S 对应于 D_S 的一个圈分解 S_D，即 D_S 是欧拉的 (定理 4.8). 因为 G 是连通的且 $\varphi(e)\neq 0(e\in E(G))$，所以它也是连通的. 于是 D_S 有一个欧拉迹 T_D，它通过上面形如 a_e 的弧时或者全部从 x 到 y 或者全部从 y 到 x，即 T_D 对应于一条在相同方向经过每条边 $e\in E(G)$ $\varphi(e)$ 次的闭覆盖途径 W，即 W 是 G 的一条值–真途径. 推论成立.

再次，如果放弃 G 是连通的假设，并考虑处处不为零的流来代替值–真途径，则推论 8.25 仍然成立. 此时推论 8.25 说明了它与定理 4.8 的联系.

鉴于推论 8.23 和推论 8.25 我们能说如果一个具有正整数边标号 φ 的图 G 有一个值–真定向圈覆盖，则它满足西蒙割条件. 因为如果 $E_S=\varnothing$，这个条件看成成立，因此，即使 G 不连通，上述结论也是成立的. 另一方面，由图 8.2 中关于 $K_{4,\varphi}$ 的说明和推论 8.25，尽管 $K_{4,\varphi}$ 满足西蒙割条件，但它没有值–真定向圈覆盖. 然而，$K_{4,\varphi}$ 有一个值–真圈覆盖 (见注 8.24).

如果人们对应地考虑有向图 D 中的值–真途径，其中 $\varphi: A(D)\to\mathbb{N}$，则引理 8.17 的 2) 和它的证明说明了这个问题转化为考察引理中等式是否在每个顶点成立 (实际上，只要在任意 $p-1$ 个顶点考察就够了，因为如果那些等式对这 $p-1$ 个顶点中的每一个成立，它对第 p 个顶点也一定成立). 类似地，推论 8.25 和它的证明说明了在弱连通有向图的情况，值–真途径和值–真定向圈覆盖是等价的概念.

至于混合图中的值–真途径，遇到的困难和图的情况一样 (见定理 8.18 后的讨论). 然而，至今对图所建立的结果原则上对混合图类似地成立. 我们把重述这些相应的结果作为一个练习.

对于给定的 $\varphi: E(G)\to\mathbb{N}\cup\{0\}$，基于确定是否存在一条值–真途径和流的困难性 (见定理 8.18 后面的讨论和前面的定义 8.19)，毫不奇怪，这个问题几乎没有引起注意. 除了那里引的两篇文章外，看起来只有一篇文章 [SCHM79a]，讨论了这一问题. 事实上，施密特 (R. Schmidt) 的出发点是 —— 隐含地 —— 讨论了图 G 有如下性质的非负整数边标号 φ: 对 φ，划分问题在每个顶点有解 (在这种情况下，他称 φ 为**星–相容的**)，并且每个极小边割有解 (在这种情况下，他称 φ 为**键–相容的**)①. 于是任意流 $\varphi: E(G)\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ 是星–相容的，也是键–相容的 ([SCHM79a, Satz 1]，也见上面关于划分问题的讨论和推论 8.23 的证明). 在这篇文章中所考虑的基本上是下面的问题:

1) 什么样的连通图 G 有一个处处不为零的流?

2) 什么样的连通图有如下性质: 每个星–相容 (键–相容) 的 φ 是一个流?

① 因为如果 G 没有环，E_v 是一些不相交极小边割的并，因此，每一个键–相容的 φ 也是星–相容的. 但是施密特没有说明这个事实.

为了回答这些问题，首先注意如果 e 是 G 的桥，则 $\varphi(e)=0$ 必定对每个流 φ 成立. 因此，我们可以假定 $\lambda(G)\geqslant 2$. 在这种情况下，我们能够证明下面的已知结果. 这里提出的证明不同于 [SCHM79a] 中的证明. 然而，下面的证明将与有向邮递员问题的讨论有关.

命题 8.26　对每个连通无桥图 G，存在一个处处不为零的流 φ，即对应 φ 有一条 G 的值–真途径.

证明　由引理 3.22，存在一个强连通有向图 D 以 G 为基图. 定义 $\mathrm{diff}(v)=\mathrm{od}_D(v)-\mathrm{id}_D(v)$，如果对每个 $v\in V(D)$，$\mathrm{diff}(v)=0$，D 是欧拉的. 对每个 $e\in E(G)$，定义 $\varphi(e)=1$，我们得出结论：D 的任一条欧拉迹 T 对应 G 中的一条值–真途径 W(在这种情况下，W 是一条欧拉迹). 因此，我们可以假设至少对某个 $v\in V(D)=V(G)$ 有 $\mathrm{diff}(v)\neq 0$. 因为对每个有向图 D 有 $\sum\limits_{v\in V(D)}\mathrm{diff}(v)=0$，所以存在 $v,w\in V(D)$，使得 $\mathrm{diff}(v)<0$，$\mathrm{diff}(w)>0$. 因为 D 是强连通的，D 中存在一条从 v 到 w 的路 $P(v,w)$. 我们双倍这条路上的弧，并称这样得到的有向图为 D_1. 当然，因为 $D\subset D_1$，D_1 是强连通的, 进而对 $\sum(D):=\sum\limits_{v\in V(D)}|\mathrm{diff}(v)|$，由构造法，我们有 $\sum(D_1)<\sum(D)$. 应用归纳法，我们通过加倍 D_1 中所适当选取的路上的弧得到强连通欧拉有向图 D_t. 因为 D_1 是从 D 通过这样的运算得到的图，我们有 $D_t\supset D$ 是通过用 $\lambda(a_e)$ 条同样定向的弧来代替某些弧所得到的图.

对每条弧 $a_e\in D$，定义

$$\varphi_D(a_e)=\lambda(a_e)=\varphi(e)\ .$$

分别从 D 和 D_t 的构造知，D_t 的每条欧拉迹 T 对应于 D 中的一条关于 φ_D 的值–真途径，并因此对应于 G 中的一条关于 φ 的值–真途径. 又从构造法知，对每个 $e\in E(G)$ 有 $\varphi(e)>0$. 这样 φ 是 G 中的一个处处不为零的流. 证毕.

至于第二个问题，施密特完满地回答了它，但是毫不奇怪的是，这些图类 (分别称为**星 – 守信的和键 – 守信的**) 是相当狭窄的一类图. 我们简略地提出这些结果而略去其证明 [SCHM79a, Satz2, Satz3]. 对 $n\geqslant 3$，用 $G(\Delta,n)$ 表示这样的图，它有三角形的圈分解 $S_\Delta=\{C_i\mid i=1,\cdots,n\}$，使得 $|V(C_i)\cap V(C_j)|\leqslant 1(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n)$ 且交图 $I(S_\Delta)$ 是一个圈. 注意对每个 $n\in\mathbb{N}-\{1,2\}$，$G(\Delta,n)$ 是在同构意义下唯一被确定的 (图 6.31 中的图 H_0 对应于 $G(\Delta,3)$)，进而用 $G_{\Delta,\Delta}$ 表示由两个不相交的三角形和连接它们的一条边所组成的图.

定理 8.27　设 G 是一个连通简单图.

1) G 是星–守信的当且仅当 G 不含 $G_{\Delta,\Delta},G(\Delta,3)$ 和 K_4 的细分作为子图;

2) G 是键–守信的当且仅当 G 不含 K_4 或 $G(\Delta,n)(n\geqslant 3)$ 的细分作为子图.

注意对 $n\geqslant 4$，$G(\Delta,n)$ 含 $G_{\Delta,\Delta}$ 的细分. 因此，每个星–守信的图也是键–守信的 (然而，因为一个键–相容的 φ 也是星–相容的，这个结论已经从星–守信和键–守

信的定义得到)，进而定理 8.27.1) 中的图 G 恰好是那些有一个顶点属于 G 的所有圈的图. 为了说明一个键-守信的图不必是星-守信的，我们可以考虑图 8.3 中的图 G_0，其中 φ 由 G_0 的边标号定义. 注意因为划分问题对 $\{1,3\}$ 没有解，这里我们考虑由不属于 G_0 的任意三角形的两条边构成的边割，φ 是星-相容的，但不是键-相容的. 因此，G_0 不是星-守信的 (事实上，它含 $G_{\Delta,\Delta}$ 作为子图)，但它是键-守信的，这是因为它不含 K_4 或 $G(\Delta,n)$ (其中 $n \geqslant 3$) 的细分作为子图.

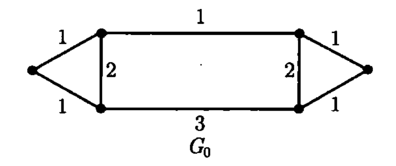


图 8.3 G_0 有 $\varphi: E(G_0) \to \mathbb{N}$. φ 是星-相容的，但不是键-相容的. 这样 G_0 不是星-守信的，但它确是键-守信的

考察命题 8.26 的证明中定义的函数 φ，仅有

$$1 \leqslant \max_{e\in E(G)} \varphi(e) \leqslant \frac{1}{2}\sum(D) + 1 .$$

由于 $\sum\limits_{v\in V(D)} \mathrm{diff}(v) = 0$，因此，

$$\begin{aligned}\sum(D) &= \sum_{\mathrm{diff}(v)>0} \mathrm{diff}(v) - \sum_{\mathrm{diff}(v)<0} \mathrm{diff}(v)\\ &= \sum_{v\in V(D)} \mathrm{diff}(v) - 2\sum_{\mathrm{diff}(v)<0} \equiv 0 \pmod 2,\end{aligned}$$

进而 $\sum(D_1) = \sum(D) - 2$，这是因为若 $x \neq v, w$ 且 $|\mathrm{diff}_{D_1} z| = |\mathrm{diff}_D z| - 1(z \in \{v,w\})$，则从 D 构造 D_1 时，diff(x) 仍然不变. 这样通过额外地引进对应于 $P(v,w)$ 的弧，D 的每一条弧对应于 D_1 的一条弧或两条弧. 重复这里的论述，我们可以得到结论：D 的每一条弧至多对应于 D_t 的 $\frac{1}{2}\sum(D)$ 条额外的弧. 在 [SCHM79a] 中给出的 φ 的上界一般比 $\frac{1}{2}\sum(D)+1$ 大得多. 然而，我们感兴趣的是数

$$\mu(G,\varphi) := \min_{\varphi} \max_{e\in E(G)} \varphi(e) ,$$

其中最小取遍所有处处不为零的流 φ 且 G 是无桥的. 这样我们有下面的猜想.

猜想 8.28 (塔特的 5- 流猜想) 对每个无桥图 G，$\mu(G,\varphi) \leqslant 5$，即每个无桥图有一个处处不为零的 5- 流.

注意由注 8.20 的 3)，如果 G 有一个 k- 流 $(1 \leqslant k \leqslant 5)$，它也有一个 5- 流.

这个猜想是在 [TUTT54a，猜想 II] 中提出的，最初出现在关于染色的文章中. 目前，它被认为是图论中最著名的没有解决的问题之一. 因此，引起了很多人的注意 (为了彻底了解图的流和它的各种应用，参见耶格 (Jaeger) 的综述性文章 [JAEG88a]).

在讨论关于 k- 流 ($k \geqslant 3$) 的各种结果之前，我们说明 k- 流和 (模 k)- 流之间的区别是操作问题，但不是本质的 (见 [TUTT49a，定理 IV]，[YOUN83a，命题 3]). 下面的证明沿着后者文献的线索进行.

命题 8.29　设 G 是一个图且设 k 是一个正整数，则下面的说法等价：

1) G 有一个 (处处不为零) 的 k- 流具有 0- 集 E_0;

2) G 有一个 (处处不为零) 的 (模 k)- 流具有 0- 集 E_0.

证明　因为由定义，一个 (处处不为零的) k- 流是一个 (处处不为零的) (模 k)- 流，我们假设 G 有一个 (处处不为零的) (模 k)- 流 φ. 不失一般性，我们假定 $E_0 = \varnothing$ (否则，下面的论述能应用到 $G - E_0$ 来代替原来的论述). 现在，G 有一个定向 D，使得对每个 $v \in V(D) = V(G)$，

$$\text{diff}_\varphi(v) := \sum_{a_e \in A_v^+} \varphi(e) - \sum_{a_e \in A_v^-} \varphi(e) \equiv 0 \pmod{k} .$$

不失一般性，假设 G 是连通的，现在我们用类似于命题 8.26 中的证明方法进行证明. 如果对每个 $v \in V(G)$，$\text{diff}_\varphi(v) = 0$，$\varphi$ 是一个 (处处不为零的) k- 流，以 D 作为 G 对应于 φ 的定向. 因此，我们可以假设

$$\Sigma_\varphi(D) := \sum_{v \in V(G)} |\text{diff}_\varphi(v)| > 0 .$$

因为对每个 $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$，$\sum\limits_{v \in V(D)} \text{diff}_\varphi(v) = 0$ (用类似于命题 8.26 中 $\sum\limits_{v \in V(D)} \text{diff}(v) = 0$ 的证明). 对某些 $x, y \in V(D)$ 有

$$\text{diff}_\varphi(x) > 0 , \quad \text{diff}_\varphi(y) > 0 . \tag{$*$}$$

对于一个有 $\text{diff}_\varphi(x) > 0$ 的固定的 x，考虑 $R_x := \{v \in V(D) \mid \exists P(x, v)\}$，则 $x \in R_x$. 我们断言存在 $y \in R_x$ 有 $\text{diff}_\varphi(y) < 0$. 假设没有这样的 y 存在，则由 ($*$) 知 $R_x \subset V(D)$. 由 R_x 的定义知，分离 $\langle V(D) - R_x \rangle_D$ 和 $\langle R_x \rangle_D$ 的割集 A_0 不含弧 (u, v)，使得 $u \in R_x$. 现在考虑 D 关于 A_0 的相关图 $D(A_0)$ (图 4.2). 因为 G 是连通的，$D(A_0)$ 恰好有两个分支 D_1, D_2，不失一般性，适当地选择记号，使得 $R_x \cup \{z_1\} = V(D_1)$. 由上述知 $\text{id}_{D_1}(z_1) = 0$. 给对应于 $a_e \in A_0$ 的弧 $a_{e,1} \in A_{z_1}^+$ 标号 $\varphi(e)$ (其中 $e \in S$，S 是 G 中对应的割集). 由假设，又因为 $\text{diff}_\varphi(x) > 0$ 和

$\text{diff}_\varphi(z_1) > 0$，对每个 $v \in V(D_1)$ 有 $\text{diff}_\varphi(v) \geqslant 0$. 这就与 $\sum\limits_{v\in V(D_1)} \text{diff}_\varphi(v) = 0$ 矛盾. 因此，在 R_x 中存在 y，使得 $\text{diff}_\varphi(y) < 0$.

现在设 $P(x,y)$ 是 D 中连接 x 和 y 的固定的路，并且定义

$$D_0 := (D - A(P(x,y))) \cup \{a^R \mid a \in A(P(x,y))\} ,$$

$$\varphi_1(e) = \begin{cases} \varphi(e), & a_e \in A(D_0) \cap A(D), \\ k - \varphi(e), & \text{否则} . \end{cases}$$

对每个 $v \in V(D_0) - V(P(x,y))$，

$$\text{diff}_{\varphi_1}(v) = \text{diff}_\varphi(v) .$$

对 $w \in V(P(x,y)) - \{x,y\}$，同样的等式成立. 这是因为对 $a_{e^+} \in A(P(x,y)) \cap A_w^+$ 和 $a_{e^-} \in A(P(x,y)) \cap A_w^-$ 有

$$\text{diff}_{\varphi_1}(w) = \text{diff}_\varphi(w) - \varphi(e^+) + \varphi(e^-) - (k - \varphi(e^+)) + (k - \varphi(e^-)) = \text{diff}_\varphi(w).$$

另一方面，对 $a_{e_x^+} \in A(P(x,y)) \cap A_x^+$ 和 $a_{e_y^-} \in A(P(x,y)) \cap A_y^-$，

$$\text{diff}_{\varphi_1}(x) = \text{diff}_\varphi(x) - \varphi(e_x^+) - (k - \varphi(e_x^+)) = \text{diff}_\varphi(x) - k,$$

$$\text{diff}_{\varphi_1}(y) = \text{diff}_\varphi(y) + \varphi(e_y^-) + (k - \varphi(e_y^-)) = \text{diff}_\varphi(y) + k .$$

于是

$$\Sigma_{\varphi_1}(D_0) = \Sigma_\varphi(D) - 2k < \Sigma_\varphi(D)$$

(注意对于 $\lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{N}$，$\text{diff}_\varphi(x) = \lambda_x k$，$\text{diff}_\varphi(y) = -\lambda_y k$). 从 φ_1 和 D_0 的定义知，φ_1 是 G 中的一个 (处处不为零的)(模 k)- 流. 若 $\Sigma_{\varphi_1}(D_0) = 0$，则 φ_1 是 G 中的一个 (处处不为零的) k- 流; 否则，对 D_0 和 φ_1 用归纳法得到 G 中一个 (处处不为零的) k- 流. 注意如果在上所定义的 φ_1 中对 $\varphi(e) = 0$，令 $k - \varphi(e) = 0$，若 $E_0 \neq \varnothing$，则从一个 (模 k)- 流到一个 k- 流的变换不改变 E_0. 命题得证.

事实上，(D,φ) 到 (D_0,φ_1) 的变换及 $\Sigma_{\varphi_1}(D_0) = \Sigma_\varphi(D) - 2k$ 说明了从一个处处不为零的 (模 k)- 流得到一个处处不为零的 k- 流要用 $\frac{1}{2}\Sigma_\varphi(D)$ 个这种类型的变换. 又由命题 8.29 容许我们在以后的讨论中可任意地考虑 k- 流或 (模 k)- 流.

注意命题 8.26 的证明中所构造的 k- 流的 k 的值依赖于所选的 G 的强连通定向 D (见前面猜想 8.28 的讨论). 我们可以用下面等价的形式重新来解释塔特的 5- 流猜想. *每一个连通无桥图 G 有一个强连通定向 D，它能够通过对每条形如 (x,y) 的弧，最多增加三条形如 (x,y) 的弧变换引发为一个欧拉有向图 D_1(若 $(u,v) \notin A(D)$，不增加形如 (u,v) 的弧)*. 但是是什么引发猜想 8.28? 首先，我们注意下面的等价性.

命题 8.30　下面的叙述等价:

1) 塔特的 5- 流猜想;

2) 每一个 3- 正则 2- 连通图有一个处处不为零的 5- 流.

证明　因为 2) 是 D 的一个特殊情况，只要说明 2) 蕴涵着 1) 就行了. 若不然，假设 2) 成立，但存在一个无桥图 G 没有处处不为零的 5- 流. 选 G，使得 $p_G + q_G$ 最小，并且注意 G 有一个处处不为零的 k- 流当且仅当 G 的每个分支有这样的流，因此，我们可以假定 G 是连通的. 由 G 的选择可以假定 $V_2(G) = \varnothing$，否则，对 $v \in V_2(G)$ 和 $E_v = \{xv, yv\}$，构造图 $H = (G - v) \cup \{e_{xy}\}(e_{xy} \notin E(G)$，$e_{xy} \in E_x(H) \cap E_y(H))$. H 是无桥的且 $p_H + q_H < p_G + q_G$，这样 H 有一个处处不为零的 5- 流 φ_H，φ_H 可以通过

$$\varphi|_{E(G)-E_v} = \varphi_H|_{E(G)-\{e_{xy}\}} \quad \text{且} \quad \varphi(xv) = \varphi(yv) = \varphi_H(e_{xy}) \ .$$

变换为 G 的一个 5- 流 φ (通过细分 H 的对应的定向 D_H 的弧 $a_{e_{xy}}$ 得到 G 对应的定向 D). 这个矛盾证明了 $V_2(D) = \varnothing$.

由假设和 G 的选择知 $\Delta(G) > 3$. 对满足 $d(v) > 3$ 的 $v \in V(G)$ 应用分裂引理，不失一般性，设 $G_{1,2}$ 是连通且无桥的. 对于同胚于 $G_{1,2}$ 的满足 $V_2(H) = \varnothing$ 的图 H，我们有 $p_H + q_H < p_G + q_G$. 用上面同样的论述，我们看到 H 的一个处处不为零的 5- 流能变换为 $G_{1,2}$ 的一个这样的流 $\varphi_{1,2}$. 然而，因为 $E(G_{1,2}) = E(G)$，我们有 $\varphi_{1,2}$ 也是 G 的一个处处不为零的 5- 流 φ，其中 G 的一个对应的定向 D 可由在 $G_{1,2}$ 的定向 $D_{1,2}$ 中等同 $v_{1,2}$ 和 v 而得到. 这个最终的矛盾证明了命题 8.30.

回顾命题 8.30 和定理 8.21，自然导出下面的问题：什么样的 3- 正则图有一个处处不为零的 4- 流. 答案由下面的结果给出 (见 [TUTT49a，定理 1]，[MINT67a]，[JAEG76a,79a]). 我们给出一个类似于 [MINT67a] 的证明.

定理 8.31　对一个 3- 正则图 G，下面的叙述等价:

1) G 有一个 1- 因子分解;

2) G 有一个处处不为零的 4- 流.

证明　回顾命题 8.29 和注 8.20 的 4)，构造并且用 (模 k)- 流就够了. 因此，我们构造 G 的一个定向，它的弧只有标号 1 和 2.

现在设 G 有一个 1- 因子分解 $\{L_1, L_2, L_3\}$. $\langle L_1 \cup L_2 \rangle$ 是 G 的一个 2- 部 2- 因子 Q，即是支撑 G 的不相交偶圈的并. 设 $\{V_1, V_2\}$ 是 $V(Q)$ 的 2- 划分 (即 $E(\langle V_1 \rangle) = E(\langle V_1 \rangle) = \varnothing$)，并且 $E(Q)$ 的元素从 V_1 到 V_2 定向. 这样得到的有向图 D_Q 有 V_1 作为它的源集而 V_2 作为它的汇集. 任意地定向每个 $e = xy \in L_3$，使得定向从 x 到 y 或者从 y 到 x. 用 A_3 表示对应于 L_3 的弧集. 定义 $\varphi : E(G) \to \{1, 2\}$，使得

$$\varphi(e) = 1 \leftrightarrow e \in E(Q), \quad \varphi(e) = 2 \leftrightarrow e \in L_3 \ .$$

在 $D = D_Q \cup A_3$ 中，对每个 $v \in V(D) = V(G)$，我们有

$$\sum_{a_e \in A_v^+} \varphi(e) - \sum_{a_e \in A_v^-} \varphi(e) \equiv 0 \pmod{4} .$$

这从 D 和 φ 的定义立即可得. 因此，G 有一个 (模 4)- 流，其值在 $\{1,2\}$ 中.

最后，假设 G 有一个处处不为零的 (模 4)- 流 φ_1，设 D_1 是 G 对应于 φ_1 的一个定向. 如果对某个 $e \in E(G)$，$\varphi_1(e) = 3$，则在 D_1 中用它的相反方向的弧 a_e^R 代替 a_e. 因此，我们可考虑

$$D = (D_1 - \{a_e \mid \varphi_1(e) = 3\}) \cup \{a_e^R \mid \varphi_1(e) = 3\},$$

并且定义 $\varphi : E(G) \to \{1,2\}$，使得

$$\varphi_1(e) \in \{1,2\} \to \varphi(e) = \varphi_1(e), \quad \varphi_1(e) = 3 \to \varphi(e) = 1 .$$

现在由注 8.20 的 4) 知，D 将 φ 分类为 G 的一个 (模 4)- 流. 于是对这个 φ 的 i- 集 $E_i (i = 1,2)$，对每个 $v \in V(G)$，

$$|E_1 \cap E_v| = 2, \quad |E_2 \cap E_v| = 1,$$

即 $Q := \{e \in E(G) \mid \varphi(e) = 1\}$ 是 G 的一个 2- 因子，进而由 (模 4)- 流的定义和 $d(v) = 3$ 知

$$\{e, f\} = E_1 \cap E_v \leftrightarrow (\{a_e, a_f\} \subseteq A_v^+ \text{ 或 } \{a_e, a_f\} \subseteq A_v^-) .$$

这就蕴涵着 Q 的分支是偶圈 (因为上面的等价性蕴涵着 D_Q 只有源和汇，即为 2- 部图). 这样我们能记 $E(Q) = L_1 \cup L_2$，其中 L_1 和 L_2 是 G 的 1- 因子，它们与 $L_3 := \{e \in E(G) \mid \varphi(e) = 2\}$ 一起产生了 G 的一个 1- 因子分解 $\{L_1, L_2, L_3\}$. 定理证毕.

任意的一个无桥 3- 正则图不能指望总有一个处处不为零的 k- 流 ($k < 5$). 另一方面，彼特森图没有 1- 因子分解但有一个处处不为零的 5- 流 (图 8.4).

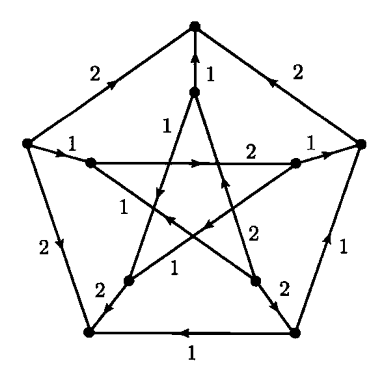


图 8.4 彼特森图 P_5 的一个定向和一个弧标号描述了 P_5 的一个处处不为零的 (模 5)- 流

由注 8.20 的 4) 和命题 8.29，一个 3- 正则图 G 有一个处处不为零的 5- 流当且仅当存在 $\varphi: E(G) \to \{1,2\}$ 和 G 的一个定向 D，使得对每个 $v \in V(G)$，

$$\text{diff}_\varphi \in \{0, \pm 5\}. \tag{$\circ$}$$

如图 8.4 中所标示的 P_5 的一个 (模 5)- 流的构造与 ($\circ$) 一致，它导出了下面的等价性.

定理 8.32　一个 3- 正则图 G 有一个处处不为零的 5- 流当且仅当 G 能分解成二部因子 G_i 具有 (顶点) 二划分 $\{V_{1,i}, V_{2,i}\}(i=1,2)$，使得对 $j=1,2$，

$$x \in V_{j,1} \cap V_{j,2} \text{ 当且仅当 } d_{G_2}(x) = 2\ .$$

证明　对于 G 的一个处处不零的 5- 流，等价地考虑如上面 ($\circ$) 中所描述的 D 和 φ. 用 G_i 表示 G 中的由 E_i 导出的子图，其中 E_i 是 φ 的 i- 集 $(i=1,2)$. 因为 G 是 3- 正则图，因此，对每个 $v \in V(G)$ 和 $i=1,2$，$d_{G_i}(v) \neq 0$，即 $G_i(i=1,2)$ 是 G 的因子. 考虑 D 的由 G_i 作为基图的子图 D_i，由 ($\circ$)，我们得到对每个 $v \in V(D_i)(i=1,2)$，

$$\text{id}_{D_i}(v) = 0 \text{ 当且仅当 } \text{od}_{D_i}(v) \neq 0\ ,$$

即 D_i 的每个顶点或者是 D_i 的一个源或者是 D_i 的一个汇，这就蕴涵着 G_i 是 2- 部图. 定义 G_i 的一个顶点二划分，使得

$$V_{1,i} = \{v \in V(G) \mid \text{id}_{D_i}(v) = 0\}, \quad V_{2,i} = V(G) - V_{1,i}, \quad i = 1,2,$$

即 $V_{1,i}$ ($V_{2,i}$) 是 D_i 的源集 (汇集). 现在注意由 ($\circ$)，对 $\{j,k\} = \{1,2\}$，D_j 的一个源 (汇) 也是 D_k 的一个源 (汇) 当且仅当 $\text{diff}_\varphi(v) = 5\ (-5)$，因此，

$$x \in V_{m,1} \cap V_{m,2} \text{ 当且仅当 } d_{G_2}(x) = 2, m = 1,2\ .$$

相反地，设 $G_i(i=1,2)$ 是给定的具有定理中所述性质的图. 定义 G_i 的一个定向 D_i，使得

$$D_i = \langle \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_{1,i}, v_2 \in V_{2,i} \text{ 且 } v_1 v_2 \in E(G_i)\} \rangle\ .$$

因为 $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ 且 $E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$，$G$ 的一个定向 D 是由 $D = D_1 \cup D_2$ 给出的. 现在定义

$$\varphi(e) = i \text{ 当且仅当 } e \in E(G_i)\ .$$

由命题 8.29，只要说明 D 和 φ 表示 G 的一个 (模 5)- 流即可. 为了看清这一点，首先考虑 $x \in V_{j,1} \cap V_{j,2} (j \in \{1,2\})$. 若 $j=1$，x 是 D 的一个源; 若 $j=2$，x

是 D 的一个汇. 这从 $D_i(i = 1,2)$ 的定义可得，进而因为由假设，在这种情况下，$d_{G_2}(x) = 2(= d_{G_1}(x) + 1)$，我们得出

$$\text{diff}_\varphi(x) = 5 \cdot (-1)^{j-1} \equiv 0 \pmod 5 .$$

最后假设 $x \in V_{1,1} \cap V_{2,2}$，或者 $x \in V_{2,1} \cap V_{1,2}$. 这个假设和 D_i 的定义一起蕴涵 x 是 $D_j(i = 1,2)$ 的一个源当且仅当 x 是 D_k 的一个汇，$\{j,k\} = \{1,2\}$. 由此及 $d_{G_1}(x) = 2 = d_{G_2}(x) + 1$ 得到

$$\text{如果 } x \in V_{j,1} \cap V_{k,2}, \{j,k\} = \{1,2\}, \text{则 } \text{diff}_\varphi(x) = 0 .$$

现在定理 8.32 从 (○) 可得.

我们注意到在定理 8.32 中，如果一个 G_j 由圈组成，G_j 可分解成 G 的两个 1-因子，同时 G_k 是 G 的 1- 因子，$\{j,k\} = \{1,2\}$，即在这种情况下，G 甚至有一个处处不为零的 4- 流 (定理 8.31).

与 5- 流猜想等价的另一个叙述在 [JAEG83b] 中已建立. 在那里，耶格把一个 3- 正则图 G 的每个定向 D 联系于一个向量

$$x_D := (\text{diff}_D(v_1), \cdots, \text{diff}_D(v_n)) \in \mathbb{R}^n ,$$

其中 $V(G) = \{v_1, \cdots, v_n\}$，并且定义

$$B(G) = \{x_D \mid D\text{是 } G \text{ 的一个定向}\} .$$

我们叙述 [JAEG83b] 中的主要结果而略去证明.

定理 8.33 对于一个非 2- 部 3 正则图 G，下面的结论等价：

1) G 有一个处处不零的 5- 流;

2) 存在 $x_{D_1}, x_{D_2}, x_{D_3} \in B(G)$，使得 $(-1)^i x_{D_j}(i = 1,2, j = 1,2,3)$ 是在一般位置上的 6 个共面的点.

然而，正如耶格所指出的，应该注意到为了避免存在 $x_{D_1}, x_{D_2} \in B(G)$, 使得 $(-1)^i x_{D_j}(1 \leqslant i,j \leqslant 2)$ 是 4 个共线的点，G 不是 2- 部图的要求是必要的. 然而，由注 8.20 的 3) 和定理 8.21，对于猜想 8.28 这个条件不是本质的.

解决猜想 8.28 的第一大步是由耶格做出的. 1975 年，他证明了每一个无桥图有一个处处不为零的 8- 流 (在 [JAEG76b]) 中宣布，在 [JAEG79a] 中明确地证明了). 因此，就证明了每个无桥图对某个 $k > 0$ 有一个处处不为零的 k- 流 (见 [TUTT54a，猜想 1]). 同样的结果同时独立地被基尔帕特里克 (Kilpatrick) 得到了 (见 [JAEG87a]). 几年后，西蒙改进了耶格的结果 [SEYM81a]. 我们将按照西蒙的证明思路进行证明 (除了某些非本质的修改，这些修改是由流的不同但等价的定义

而引起的)，但为了使得说明更清楚，我们首先证明两个引理 (事实上，这占据了西蒙证明的大部分 —— 见 [SEYM81a，(3.1) 和 (3.2) 的证明]).

对一个图 G，考虑 $E \subseteq E(G)$. 对 $k \in \mathbb{N}$，设 $(E)_k \subseteq E(G)$ 具有下面的性质：

1) $E \subseteq (E)_k$；

2) 没有 G 的圈 C 满足 $0 < |E(C) - (E)_k| \leqslant k$；

3) 在满足 1) 和 2) 的条件下，使得 $|(E)_k|$ 最小.

$E = E(G)$ 满足 1) 和 2)，进而对任意的 E，E'，$E'' \subseteq E(G)$，使得 $E \subseteq E'$ 且 $E \subseteq E''$，如果 E', E'' 有性质 2) (分别用 E' 和 E'' 代替 $(E)_k$)，$E''' = E' \cap E'' \supseteq E$ 也有性质 2)，这是因为任选的 $F \in \{E', E''\}$，

$$|E(C) - E'''| \geqslant |E(C) - F| ,$$

若 $E(C) \cap E' = E(C) \cap E''$，则等式成立. 因此，$(E)_k$ 唯一地被确定了.

我们也注意到从 E 到 $(E)_k$ 的变换是一个闭包运算，这是因为

若 $F = (E)_k$，则 $E \subseteq (E)_k, F = (F)_k$；

若 $E \subseteq F \subseteq E(G)$，则 $(E)_k \subseteq (F)_k$.

因此，如果 $F = (E)_k$，则 F 也满足 2)，并且无论如何 $F \subseteq F$，并且由 1) $E \subseteq F$ 蕴涵 $E \subseteq (F)_k$，因此，上面的考虑 $(E' = (E)_k, E'' = (F)_k)$ 和 3) 蕴涵着 $(E)_k \cap (F)_k = (E)_k$. 回忆对一个流 φ，E_i 表示 φ 的 i- 集 $(i \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

引理 8.34　在一个简单 3- 连通图 G 中，存在完全不相交的圈 $C_1, \cdots, C_r (r \geqslant 1)$，使 $\left(\bigcup_{i=1}^{r} E(C_i)\right)_2 = E(G)$.

证明　设 C_1 是 G 的一个圈. 记 $F_1 = E(C_1)$ 且考虑 $(F_1)_2$. 假设 $G_1 := \langle (F_1)_2 \rangle$ 是不连通的. 设 $G_{C_1} \subset G_1$ 是含 C_1 的分支且记 $G_0 = G_1 - G_{C_1}$. 因为 $E(G_{C_1}) \subset (F_1)_2$，存在一个圈 $C \subset G$，使得 $1 \leqslant |E(C) - E(G_{C_1})| \leqslant 2$. 然而，由 $(F_1)_2$ 的定义，$1 \neq |E(C) - (F_1)_2| \neq 2$. 因此，$E(C) \subseteq (F_1)_2$，并且由 $G_{C_1} \cap G_0 = \varnothing$ 知 $E(C) \cap E(G_{C_1}) = \varnothing$. 这就蕴涵 $E(C)$ 或者是一个环，或者是一对重边. 然而，由假设 G 是简单图，故这是不可能的. 于是 G_1 是连通的.

现在设 $r \in \mathbb{N}$ 尽可能大，使在 G 中存在完全不相交的圈 $C_1, \cdots, C_r$ 有性质 $G_r := \left\langle \left(\bigcup_{i=1}^{r} E(C_i)\right)_2 \right\rangle$ 是连通的. 我们要证明 $G_r = G$.

假设 $V(G_r) \subset V(G)$，我们考虑 $G_0 := \langle V(G) - V(G_r) \rangle \neq \varnothing$. $v \in V(G_0)$ 不能邻接于不同的顶点 $w_1, w_2 \in V(G_r)$; 否则，因为由构造知 G_r 是连通的，存在一条路 $P(w_1, w_2) \subset G_r$，于是存在 G 的一个圈 C_0 满足

$$E(C_0) = E(P(w_1, w_2)) \cup \{vw_1, vw_2\} \quad 且 \quad |E(C_0) - E(G_r)| = 2 .$$

这就与 $E(G_r) = \left(\bigcup_{i=1}^{r} E(C_i)\right)_2$ 的定义矛盾. 因此，G_0 的每个顶点邻接于至多 G_r

的一个顶点，因为 $\delta(G) \geqslant \kappa(G) \geqslant 3$ 及 G 是简单的假设，故有 $\delta(G_0) \geqslant 2$. 因为 G_0 没有悬挂点，这就意味着 G_0 含有一个 2- 连通的悬挂块 B_0，并且由 G 是简单图知，$|V(B_0)| \geqslant 3$. 因为 B_0 至多一个顶点属于 $G_0 - B_0$，因此，从 $\kappa(G) \geqslant 3$ 得到存在 $x_1, x_2 \in V(B_0)$，使得

$$d_{B_0}(x_i) = d_{G_0}(x_i), \quad i = 1, 2 ,$$

并且 x_i 邻接于 $y_i \in V(G_r)$. 因为 G_0 的每个顶点至多与 G_r 的一个顶点相邻，从 $\kappa(G) \geqslant 3$，不失一般性，我们得到

$$y_1 \neq y_2, \quad e_i = x_i y_i \notin E(G_0) \cup E(G_r),\ i = 1, 2 .$$

另一方面，B_0 有一个圈 C_{r+1}，使得 $x_1, x_2 \in V(C_{r+1})$，并且由 G_0 的定义，

$$V(C_{r+1}) \cap \bigcup_{i=1}^{r} V(C_i) = \varnothing . \tag{1}$$

考虑路 $P(x_1, x_2) \subset C_{r+1}$ 和 $P(y_2, y_1) \subset G_r$，我们构造圈 $C_{r,0}$，使得

$$E(C_{r,0}) = E(P(x_1, x_2)) \cup E(P(y_2, y_1)) \cup \{e_1, e_2\} .$$

因为

$$|E(C_{r,0}) - (E(G_r) \cup E(C_{r+1}))| = 2 ,$$

则从 (1) 得到 $\{C_1, \cdots, C_{r+1}\}$ 是 $r+1$ 个完全不相交的圈集，使得 $\{e_1, e_2\} \subset \left(\bigcup\limits_{i=1}^{r+1} E(C_i)\right)_2$.

定义 $G_{r+1} := \left\langle \left(\bigcup\limits_{i=1}^{r+1} E(C_i)\right)_2 \right\rangle$，注意到

$$H := \langle E(G_r) \cup E(C_{r+1} \cup \{e_1, e_2\}) \rangle$$

是 G_{r+1} $\left(因为 \bigcup\limits_{i=1}^{r} C_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r+1} C_i，故 G_r \subset G_{r+1} \right)$ 的一个连通子图，并因此在 G_{r+1} 的一个分支 H_0 中. 如在 G_1 的情况一样，由 G 是简单的假设，我们得 $H_0 = G_{r+1}$. 因此，G_{r+1} 是连通的，与 r 的最大性矛盾，这样 $V(G_0) = \varnothing$，即 $V(G_r) = V(G)$，进而如果 $xy \in E(G) - E(G_r)$. 对某条路 $P_r(y, x) \subseteq G_r$，

$$C := P_r(y, x), xy, y$$

是 G 的一个圈，并且

$$0 < |E(C) - E(G_r)| = 1 \leqslant 2 ,$$

与 G_r 的定义矛盾. 因此，$G_r = G$. 这就完成了引理的证明.

引理 8.35　设 G 是一个图且设 $k \in \mathbb{N}$，假设对某个 $F \subseteq E(G)$，$(F)_k = E(G)$，则 G 有一个 $(k+1)$- 流 φ，使得 $F \supseteq E_0$.

证明　对 $n_F := |E(G) - F|$ 用归纳法进行证明. 当 $n_F = 0$，则对每个 $k \in \mathbb{N}$，$\varphi : E(G) \to \{0\}$ 是 $E(G) - F = \varnothing$ 上的一个处处不为零的 $(k+1)$- 流 (在这种情况下，G 的任意定向对应于 φ).

假设 $n_F > 0$，则 $F \subset (F)_k = E(G)$. 于是由 $(F)_k$ 的定义中的性质 2)，存在一个圈 $C \subseteq G$，使得

$$0 < |E(C) - F| \leqslant k \ . \tag{1}$$

这样 $F \subset F' := F \cup E(C)$，由此及 $(F)_k = E(G)$ 蕴涵 $(F')_k = E(G)$. 因为 $n_{F'} < n_F$，由归纳法我们得到 G 有一个 $(k+1)$- 流 φ，使得 $F' \supseteq E_0$. 由 F' 的定义，

$$E(C) - F = F' - F \subseteq E(C) \ . \tag{2}$$

如果 $(F' - F) \cap E_0 = \varnothing$，则 $F \supseteq E_0$ 且 φ 是所需的 $(k+1)$- 流. 因此，我们可以假设 $(F' - F) \cap E_0 \neq \varnothing$. 考虑对应于 φ 的 G 的一个定向 D. 首先假设 C 对应 D 的一个圈. $(F' - F) \cap E_0 \neq \varnothing$，并且由 (1) 和 (2) 知，存在某个 $n \in \{1, \cdots, k\}$，使得对每个 $e \in E(C) - F$，

$$\varphi(e) \neq n \ . \tag{3}$$

定义整数值函数 $\varphi_n : E(G) \to \{-n, 0\}$，使得

$$\text{若 } e \in E(C), \text{ 则 } \varphi_n(e) = -n; \text{ 否则, } \varphi_n(e) = 0 \tag{4}$$

(注意 φ_n 是 G 中的一个整流).

从 n 的选择及 (3) 和 (4) 知，整数值函数 $\varphi_0 := \varphi + \varphi_n$ 满足

$$\text{对每个 } e \in E(G), -k \leqslant \varphi_0(e) \leqslant k \ , \tag{5}$$

$$\text{对每个 } e \in E(C) - F, \varphi_0(e) \neq 0 \ , \tag{6}$$

$$\text{对每个 } e \in V(D) = V(G), \quad \varphi_0(A_v^+) = \varphi_0(A_v^-) \ . \tag{7}$$

如果 $v \notin V(C)$，则有 $\varphi_0(A_v^+) = \varphi(A_v^+)$，同时如果 $v \in V(C)$，则 $\varphi_0(A_v^+) = \varphi(A_v^+) - n = \varphi(A_v^-) - n = \varphi_0(A_v^-)$. 最后，定义

$$\varphi_F(e) := |\varphi_0(e)|, e \in E(G) \ , \tag{8}$$

并且设

$$D_F := (D - \{a_e \in A(D) \mid \varphi_0(e) < 0\}) \cup \{a_e^{\mathrm{R}} \mid a_e \in A(D) \wedge \varphi_0(e) < 0\} \ .$$

由 (5) 和 (8)，对每个 $e \in E(G)$，

$$0 \leqslant \varphi_F(e) \leqslant k \ . \tag{9}$$

同时，由 (7) 和 D_F 的定义得到对每个 $v \in V(D_F) = V(G)$ ，

$$\varphi_F(A^+_{v,D_F}) = \varphi_F(A^-_{v,D_F}) \ , \tag{10}$$

其中 A^+_{v,D_F} (A^-_{v,D_F}) 表示在 D_F 中起点 (终点) 是 v 的弧集. 因为，$\varphi_F(A^+_{v,D_F}) \neq \varphi_0(A^+_v)$ 蕴涵 $v \in V(C)$，并且对 $a_e \in A_v \subset A(D)$，$\varphi_0(e) < 0$, 这又蕴涵着对 $a_e \in A^\alpha_v$ 和 $\{\alpha, \beta\} = \{+, -\}$，

$$\varphi_F(A^\alpha_{v,D_F}) = \varphi_0(A^\alpha_v - \{a_e\}) = \varphi_0(A^\alpha_v) - \varphi_0(e) = \varphi_0(A^\beta_v) + |\varphi_0(e)| = \varphi_F(A^\beta_{v,D_F}) \ .$$

从 (9) 和 (10) 得到 φ_F 是 G 中的 $(k+1)$- 流，进而对 φ_F 的 0- 集 $E_{0,F}$，我们从 (4) 和 φ_0 的定义以及 (6) 和 (8) 得到

$$E_{0,F} \cap E(C) \subseteq F, \quad E_{0,F} - E(C) \subset E_0 \ .$$

这一事实和 $F' = F \cup E(C) \supseteq E_0$ 一起蕴涵 $F \supseteq E_{0,F}$.

如果 C 不对应于 D 的一个圈，我们将 φ 变换为一个 (模 $(k+1)$-) 流，它对应于 G 的某一个定向，其中某个圈对应于 C (见注 8.20 的 2) 和 4)). 因此，我们可假设 φ 本身是这样一个 (模 $(k+1)$-) 流，并且如上面所进行的一样，我们得到 (模 $(k+1)$-) 流 φ_F 有 $F \supseteq E_{0,F}$ (但是注意 (7) 和 (10) 以及与它们联系的等式用 (模 $(k+1)$-) 同余代替). 由命题 8.29，φ_F 可变换为一个所需的 $(k+1)$- 流. 引理得证.

定理 8.36(西蒙的 6- 流定理) 对每个无桥图 G，$\mu(G, \varphi) \leqslant 6$.

证明 用反证法证明. 假设 G 是一个反例且 $p_g + q_G$ 极小. 用类似于命题 8.30 的证明中所使用的论述 (用 6- 流代替 5- 流)，我们有 G 是一个 2- 连通 3- 正则图. 假设 $\lambda(G) = 2$，考虑一个 2- 割 $E_s = \{x_1y_1, x_2y_2\}$，使得 $x_1, x_2 \in V(G_1)$ 且 $y_1, y_2 \in V(G_2)$，其中 G_1, G_2 是 $G - E_S$ 的分支. 设 H 是由 G 通过等同 x_1 和 y_1 为 $z \in V(H) - V(G)$ 所得到的图，$d_H(z) = 4$. H 无桥，并且 $p_H + q_H < p_G + q_G$ 蕴涵着 H 有一个处处不为零的 6- 流 φ_H. 用 D_H 表示 H 的一个对应的定向. $E^H_S := \{x_2y_2\} \cap (E_{x_1,G} - \{x_1y_1\})$ 是 H 的一个割集，分离 $H_1 := \langle V(G_1) - \{x_1\} \rangle \subset H$ 和 $H_2 := \langle (V(G_2) - \{y_1\}) \cup \{z\} \rangle$. 用 A^D_S 表示 D_H 中对应于 E^H_S 的弧割，我们可记 $A^D_S = A^+ \cup A^-$，其中 A^+ (A^-) 恰好含 A^D_S 中的以 $V(H_1)$ 的顶点为始点 (终点) 的元素 (且因此以 $V(H_2)$ 的顶点为终点 (始点)). 因为 φ_H 是一个处处不为零的 6- 流，故

$$\varphi_H(A^+) = \varphi_H(A^-) \quad 且 \quad 0 < \varphi(x_2y_2) < 6 \ . \tag{*}$$

记 $A_z = \{a_{e_1}, a_{f_1}, a_{e_2}, a_{f_2}\}$，其中 $\{e_1, f_1\} = E_{x_1,G} - \{x_1y_1\}$，$\{e_2, f_2\} = E_{y_1,G} - \{x_1y_1\}$，并且注意 $\mathrm{diff}_{\varphi_H}(z) = 0$. 用

$$\varphi(e) = \varphi_H(e), \quad e \in E(H) = E(G) - \{x_1y_1\}$$

及

$$\varphi(x_1y_1) = \varphi(x_2y_2)$$

定义 $\varphi : E(G) \to \{1,2,3,4,5\}$，这样就有 $0 < \varphi(x_1y_1) < 6$，进而把 $A(D_H)$ 视为 $G - \{x_1y_1\}$ 的一个定向的弧集，并且注意对 $A'_{x_1} := \{a_{e_1}, a_{f_1}\}$，$A'_{y_1} := \{a_{e_2}, a_{f_2}\}$，$\varphi$ 的定义和 $(*)$ 蕴涵关于 A'_{x_1} 和 A'_{y_1}，$\text{diff}_\varphi(x_1) = -\text{diff}_\varphi(y_1) \in \{\pm\varphi(x_2y_2)\}$. 现在从 $(*)$ 得到或者 $A(D_H) \cup \{(x_1, y_1)\}$，或者 $A(D_H) \cup \{(y_1, x_1)\}$ 是 G 对应于 6- 流 φ 的一个定向的弧集. 与 G 的选择矛盾，于是 $\lambda(G) > 2$. 因为，G 是 3- 正则的，$\kappa(G) = \lambda(G) = 3$，因此，$G$ 是一个简单 3- 连通的 3- 正则图.

现在对 G 应用引理 8.34，我们找到完全不相交的圈 $C_1, \cdots, C_r$，使得 $\left(\bigcup_{i=1}^{r} E(C_i)\right)_2 = E(G)$. 由引理 8.35，$G$ 中存在一个 3- 流 φ，使得 $\bigcup_{i=1}^{r} E(C_i) \supseteq E_0$ (这意味着 E_0 是独立边集).

考虑 G 对应于 φ 的一个定向 D. 设 $D_0 \subset D$ 是对应于 $\bigcup_{i=1}^{r} C_i$ 的一个子有向图，并且设 D_1 是 G 的这个欧拉子图的一个欧拉定向 (注意 $C_i \cap C_j = \varnothing$，$1 \leqslant i < j \leqslant r$). 定义 $\varphi_3 : E(G) \to \{0, \pm 3\}$，使得

$$\varphi_3(e) = \begin{cases} 3, & a_e \in D_0 \cap D_1, \\ -3, & a_e \in D_i,\ a_e \notin D_j,\ \{i,j\} = \{0,1\}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

注意　由 φ 和 φ_3 的定义，对 $\varphi_0 := \varphi + \varphi_3$ (我们联系 D 与 φ_0) 有对每个 $v \in V(G)$，

$$0 = \text{diff}_\varphi(v) = \text{diff}_{\varphi_3}(v) = \text{diff}_{\varphi_0}(v) \tag{**}$$

并且对每个 $e \in E(G)$，

$$\varphi_0(e) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}\,. \tag{***}$$

另一方面，为了从 φ_0 构造一个处处不为零的 k– 流 φ_F，使 k 最小，从 $(***)$ 有 $k = 6$. 如引理 8.35 的证明中一样，定义 φ_F 和 G 的一个对应的定向 D_F (见 (8) 和 (9)). 因为 $(**)$，现在引理 8.35 中的等式 (10) 成立. 因此，φ_F 的确是一个处处不为零的 6- 流. 6- 流定理证毕.

我多次研究西蒙的证明，仍未能发现是什么启发了它. 最后，我请他解释他是怎样找到这个证明的. 根据他的回答，我能叙述他的思想如下：

a) 一个极小反例 G 必定是 3- 正则 3- 连通并且简单的 (这个想法在这段文章中是很自然的 —— 也见命题 8.30 的证明).

b) 要使任一个图 G 有处处不为零的 6- 流，只需找一个欧拉子图 G_1，使得 G 有一个 3- 流 ψ 具有 0- 集 $E_{0,\psi} \subseteq E(G_1)$. 注意 $6 = 2 \times 3$，我们注意到当研究一般的 $2k$- 流时也可以应用这种想法. 因为如果我们取 G_1 的一个定向 D_1，并且对 $\varphi_1 : E(G_1) \to \mathbb{N}$，令 $\varphi_1 \equiv k$，则 φ_1 是 G_1 的一个处处不为零的 $(k+1)$- 流. 应用到 3- 正则图的情况，G_1 是一个完全不相交圈的集合，$S_r = \{C_1, \cdots, C_r\}(r \geqslant 1)$.

c) “我们也可以选择 $C_1, \cdots, C_r$，使没有圈与 $C_1 \cup \cdots \cup C_r$ 相交——因为，如果存在这样的圈，如 C_{r+1}，则 $C_1, \cdots, C_{r+1}$ 是比 $C_1, \cdots, C_r$ 更有希望的一组 (即如果 $C_1, \cdots, C_r$ 可行，则 $C_1, \cdots, C_{r+1}$ 必可行). ”

d) “给出任意的一个‘极大’族 $C_1, \cdots, C_r$，何时存在一个在补上非零的 Z_3 流？不知道，就这么简单. ” (Z_3- 流基本上与 3- 流是相同的，非零 = 处处不为零，并且补意味着 $E(G) - \bigcup\limits_{i+1}^{r} E(C_i)$).

e) “如果 $r = 1$ 如何？即 C_1 是一个与所有圈都相交的圈. 那么何时存在一个在 $E(G) - E(C_1)$ 上非零的 Z_3- 流？总存在. 这个证明也建议用闭包. 这是关键的思想. ” (这段引用取自西蒙博士的回答.)

那么，怎么证明上面的“总存在”？注意因为 G 是 3- 正则图，$G - \bigcup\limits_{i=1}^{r} C_i$ 是一个二分森林 T (即 $d_T(v) \in \{1, 3\}$，$v \in V(T) = V(G)$). 在处理问题中现在我们有两种想法.

e_1) T 可以认为是一个 2- 部 3- 正则图 G' 的一个子图，由定理 8.21，它有一个处处不为零的 3- 流 φ'. 限制 $\varphi_T := \varphi' |_T$ 可扩充到 G，得到 G 的一个 3- 流 ψ 有 $E_{0,\psi} \subseteq E(C_1)$ (可能必须用命题 8.29). 然而，如果 $|S_r| > 1$，则这个简短的论述将不再起作用.

e_2) 然而，T 是一个二分森林蕴涵着下面的结论：或者存在 $G_1 := C_1$ 的一个圈的弦 e_1，其中 $e \in E(T_1)$ 且 $T_1 := T$，或者 T_1 含有两个悬挂点 v_1, w_1 (因此，它们属于 G_1)，使得 $d_{T_1}(v_1, w_1) = 2$，即 T_1 的悬挂点 v_1, w_1 能够在 T_1 中用一条长为 2 的路 P_1 连接. 依赖于哪种情况产生，分别令 $H_1 = \langle e_1 \rangle$ 或 $H_1 = P_1$，或者任选 $H_1 \in \{\langle e_1 \rangle, P_1\}$. 令 $G_2 = G_1 \cup H_1$，并注意 $G - G_2$ 也是一个二分森林 T_2.

因此，我们能够定义一个递增序列 $G_1, G_2, \cdots, G_m = G$，使得 $G_i \subset G_{i+1}$，G_i 是连通的，$G_{i+1} - G_i = H_i$ 是 T_i 中长为 1 或 2 的一条路，并且 H_i 的端点在 G_i 中.

f) 现在，如果 φ 是 $G_m = G$ 的一个部分 3- 流，并且如果 j 是满足以下条件的一个最小指标：$\varnothing \neq E_{0,\varphi} \subseteq E(G_j)$，如果 $j > 1$，则能够定义一个 (部分) 3- 流 φ_0，使得 $E_{0,\varphi} \subseteq E(G_{j-1})$ (见引理 8.35 对 $k = 2$ 的证明 (3)~(6)). 用这种方式，最终得到 G 的一个 (部分) 3- 流，它的 0- 集在基本集 $E(G_1)$ 中.

g) 事实上，e_2) 和 f) 的最后一段提出了任意图中 k- 流的推广 ($k \geqslant 3$). 首先为了得到引理 8.35 只需要一个基本集 F，使递增序列 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ (具有 $G_1 = \langle F \rangle$

且 $G_m = G$) 满足 $|E(G_{i+1} - E(G_i))| \leqslant k$，即 e$_2$) 和 f) 也指出了 $(F)_k$ 的定义.

h) 然而，因为人们的目的是一个处处不为零的 6- 流，所以基本集 F 的选择必须更特殊，即 $\langle F\rangle$ 必须是欧拉的，这就意味着对 3- 正则图 G，$\langle F\rangle$ 是 G 的一个 2- 正则子图. 这就导出了引理 8.34，它比必要性更强 (注意在那个引理的假设中 G 恰好是简单的，并且是 3- 连通的).

我们注意杨格 (Younger) 用前面的证明得到一个多项式时间算法来构造一个处处不为零的 6- 流 [YOUN83a]. 鲍奇特 (A. Bouchet) 也用 6- 流定理证明了下面的结论 [BOUC82c]: 设 G 是一个任意的图且设 $n \in \mathbb{N}$，使得 $n \not\equiv 0 \pmod m (m = 2, 3, 5)$. 设 H 是把 G 中每一个顶点 $v \in V(G)$ 用 n 个顶点 $v_1, \cdots, v_n \in V(H)$ 代替所得到的图，并且 $v_iw_j \in E(H)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 当且仅当 $vw \in E(G)$. 如果 G 能嵌入到一个曲面 F 上，使得每一个面的边界是一个三角形，则 H 能被嵌入到一个曲面 F_1 上，使得 H 的每个面的边界是一个三角形，并且或者 F 和 F_1 都是可定向的，或者二者都是不可定向的. 这样鲍奇特不但能够推广他自己的某些工作 (如 [BOUC78a])，而且也能够推广其他人的一些工作 (见 [BOUC82c] 的参考文献). 然而，他注意到猜想 8.28 的正确性将改进他的结果，使 $n \not\equiv 0 \pmod 5$ 的限制可以消去.

注意到耶格给我指出的一个有趣的细节，就像西蒙在 [SEYM81a,5.1] 中所注意到的，6- 流定理的另一个证明能够用耶格证明 8- 流定理的方法得到. 在这种情况下，$E_0 \subset E(G)$ (对应于 G 中的一个 3- 流 φ—— 见定理 8.36 的证明) 不分离 G，就像耶格所说的“*每一个3-边连通图有一个连通的支撑子图，它有一个处处不为零的3-流*”. 称这个子图为 H，这就意味着 φ 导出了 H 上的一条值–真途径 W 在同一个方向用 H 的边一次或两次. 因为 $V(H) = V(G)$，W 覆盖 $V(G)$，因此，W 是一条闭 $V(G)$- 覆盖途径. 它能够被扩充为 G 的一条闭覆盖途径 W_G，用每条边 $e \in E(G)$ 至多两次，并且用每条边 $e \in E$. 在每一个方向恰好一次. 当我们叙述中国邮递员问题与哈密顿途径问题相关联时，我们将在 8.3.1 小节中讨论闭 $V(G)$- 覆盖途径.

已经看到不是每一个 2- 连通 3- 正则图都有一个处处不为零的 4- 流 (见定理 8.31)，而它确有一个处处不为零的 6- 流 (定理 8.36)，塔特的 5- 流猜想的现状类似于四色问题. 在很早以前就已经知道不是每个平面 2- 连通 3- 正则图 G 都是 3- 面可染色的，但很容易证明这样的图 G 有 5- 面染色 (见定理 3.66 和定理 3.65a).

我们分别考虑 5- 流和等价于 5- 流的模 5- 流 (命题 8.29)，以及导出定理 8.32 的它们的重述 (∘). 我们将使用下面的引理，其中 $E_{i,\varphi}$ 表示流 φ 的 i- 集.

引理 8.37 设 $\varphi: E(G) \to \{1,2\}$ 是 3- 正则图 G 中的一个处处不为零的 (模 5)- 流并且设 D_φ 是 G 的一个对应的定向. 考虑任意的 $v \in V(G)$，存在一个处处不为零的 (模 5)- 流 $\psi: E(G) \to \{1,2\}$ 和 G 中对应于 ψ 的一个定向 D_ψ，使得 $\mathrm{od}_{D_\psi}(v) = 0$.

证明 如果 v 是 D_φ 的一个汇，则选 $\psi = \varphi$ 且 $D_\psi = D_\varphi$. 如果 v 是 D_φ 的一个源，则选 $\psi = \varphi$ 且 $D_\psi = D_\varphi^R$ (见注 8.20 的 5)); v 是 D_ψ 的一个汇. 因此，假设 v 既不是 D_φ 的源，也不是 D_φ 的汇.

设 $D_i := \langle\{a_e \in A(D_\varphi) \mid e \in E_{i,\varphi}\}\rangle (i = 1, 2)$，定义 $\psi : E(G) \to \{1, 2\}$，使得

$$\psi(e) \equiv 2\varphi(e) \pmod 3 , \tag{1}$$

即 $E_{1,\varphi} = E_{2,\psi}$，$E_{2,\varphi} = E_{1,\psi}$，进而定义

$$D_\psi = (D_\varphi - D_2) \cup D_2^R . \tag{2}$$

ψ 是一个 (模 5)- 流，D_ψ 作为 G 的对应定向 (由定义 ψ 处处不为零)：因为由 (1) 和 (2)，我们有

$$\mathrm{diff}_\psi(x) = 0 \ \leftrightarrow \ |\mathrm{diff}_\varphi(x)| = 5, \tag{3}$$

$$|\mathrm{diff}_\psi(x)| = 5 \ \leftrightarrow \ \mathrm{diff}_\varphi(x) = 0 , \tag{4}$$

其中 (3) 刻画了将 D_φ 的源和汇变换为满足 $\psi(A_x^+) = \psi(A_x^-)$ 的顶点变换，而 (4) 描述了把 D_φ 的满足 $\varphi(A_x^+) = \varphi(A_x^-)$ 的顶点变为 D_φ 的源和汇的变换.

因为 (3) 和 (4) 描述了 $V(G) = V(D_\varphi) = V(D_\psi)$ 的所有顶点的变换，ψ 是 G 中的一个 (模 5)- 流，并且 D_ψ 是 G 对应于 ψ 的一个定向，进而因为关于选择 v 的假设，则从 (4) 得到，v 或者是 D_ψ 的一个源，或者是 D_ψ 的一个汇. 由注 8.20 的 5)，或者 (ψ, D_ψ)，或者 (ψ, D_ψ^R) 将是所需要的. 引理证毕.

引理 8.37 的证明说明倘若 $E_v \cap E_{0,\varphi} \in \{\varnothing, E_v\}$，则如果假定 $E_{0,\varphi} \neq \varnothing$，那么这个引理仍然成立. 因为在这种情况下，$E_{0,\varphi} = E_{0,\psi}$，并且 $E_{0,\varphi} = E_{0,\psi}$ 的元素的定向可以是任意的 (当然，对 $E_x \subseteq E_{0,\varphi}$，我们总有 $\mathrm{diff}_\varphi(x) = \mathrm{diff}_\psi(x) = 0$). 但是，如果 $\varnothing \neq E_{i,\varphi} \cap E_v \neq E_v$，则

$$|E_{0,\varphi} \cap E_v| = 1 \quad 对\ i \in \{1, 2\}, |E_{i,\varphi} \cap E_v| = 2 .$$

对于这种类型的顶点，我们也有 $\mathrm{diff}_\varphi(x) = \mathrm{diff}_\psi(x) = 0$，但是 $0 \neq \varphi(A_v^+) = \varphi(A_v^-)$，这意味着 v 在 D_ψ 中既不是源，也不是汇.

我们还需要下面的引理，其证明作为一个练习.

引理 8.38 设 G 是一个 3- 正则图，$e = xy \in E(G)$，并且设 G_1 是从 G 通过用两种可能的方式之一分裂 e 所产生的图 (图 3.14). 记 $\{e', e''\} = E(G_1) - E(G)$. 假设 G_1 有一个处处不为零的 (模 5)- 流 $\varphi_1 : E(G_1) \to \{1, 2\}$，并且考虑 G_1 的一个对应的定向 D_{φ_1} 和 G 对应于 D_{φ_1} 的两个可能的定向 D' 和 D'' ($G - \{xy\}$ 的定向 $D''' = D' \cap D''$ 是由 D_{φ_1} 导出). 如果 x 或 y 是 D' 或 D'' 的源，或者如果 $\varphi_1(e') \neq \varphi_1(e'')$，则 φ_1 能够被扩充为 G 的一个处处不为零的 (模 5)- 流 φ，使得 D' 或 D'' 对应于 φ.

现在我们证明下面的结果.

定理 8.39 设 G 是一个连通无桥图，它在欧拉特征 $\chi(\mathcal{F}) \geqslant 0$ 的一个曲面 $\mathcal{F}$ 上有一个 2- 胞嵌入，则 G 有一个处处不为零的 5- 流.

证明 假设定理不成立，选一个反例 G，使得 $\sigma(G) = 2q_G - 2p_G$ 极小，$V_2(G)$ 极小且 $\chi(F)$ 极大. 如在命题 8.30 的证明中一样，我们得出 G 是 2- 连通 3- 正则图. 然而，应用分裂引理必须更特殊：对 $v \in V(G)$，$d(v) > 3$，设 e_1, e_2, e_d 根据 $O^+(v) = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_d)$ 选出，其中 $O^+(v)$ 由 G 在 $\mathcal{F}$ 上的嵌入给出，并且不失一般性，如果 v 是一个割点，e_1 和 e_2 属于 G 的不同的块. 当然，如果 $G_{1,2}$ 是连通的并且是无桥的，它在 $\mathcal{F}$ 上可能不是 2- 胞嵌入. 但这没关系，因为 $G_{1,2}$ 能够 2- 胞嵌入在一个 $\chi(\mathcal{F}_1) > \chi(\mathcal{F})$ 的曲面 $\mathcal{F}_1$ 上 (见 [BEIN78a,p20])，其中作者参考了凯格纳 (Kagno) 和扬斯 (Youngs) 的工作. 因此，对于证明的其余部分，我们可以假定无论何时一个导出图在 $\mathcal{F}$ 上不是 2- 胞嵌入的，它有一个处处不为零的 5- 流 (因为上面的论述保证了在一个有 $\chi(\mathcal{F}_1) > \chi(\mathcal{F})$ 的曲面 $\mathcal{F}_1$ 上有一个 2- 胞嵌入). 这样，因为 $\sigma(G_{1,2}) < \sigma(G)$，我们得到 $G_{1,2}$ 有一个处处不为零的 5- 流，它可以解释为 G 的一个处处不为零的 5- 流，这是因为 $E(G_{1,2}) = E(G)$. 因为可以假定 $V_2(G) = \varnothing$，因此，G 必须是 2- 连通的 3- 正则图.

为了看出 G 必须是 3- 连通的，我们首先如在定理 8.36 的证明中一样进行论证. 然而对于从 G 通过等同顶点 x_1 和 y_1 所得到的图 H (其中 $x_1y_1 \in E_s$ 是 G 的一个 2- 割)，我们有 $\sigma(H) = \sigma(G)$. 另一方面，在 G 中将 $e = x_1y_1$ 分裂为在 $\mathcal{F}$ 中互相不交的两条边 e' 和 e'' (图 3.14)，得到一个 2- 连通图 G_1：因为 G_1 同胚于从 H 通过用两种可能的方法之一分裂 $z \in V(H) - V(G)$ 所得到的图 H_1 (我们不交叉分裂，是为了得到 H_1 在 $\mathcal{F}$ 上的一个嵌入)，而用另一种可能的方法分裂 z 得到的 H_2 含有 x_2y_2 作为桥，其中 $E_S = \{x_1y_1, x_2y_2\} \subset E(G)$.

我们有 $\sigma(G_1) < \sigma(G)$，并且 G_1 (可能不是 2- 胞) 嵌入在 $\mathcal{F}$ 上. 总之，因为 G_1 是 2- 连通的，由假设它有一个处处不为零的 5- 流，它确实能变换为 H 的一个处处不零的 5- 流 φ_H. 现在用定理 8.36 中同样的论证 (用 5- 流代替 6- 流)，变换 φ_H 为 G 的一个处处不为零的 5- 流 φ. 于是 G 是 3- 连通的. 特别地，G 不含重边，这样每个面的边界至少有三条边.

推论 3.57 蕴涵对 G 的恰好有 i 条边的面的数目 f_i 有对某个 $i \in \{3, 4, 5, 6\}$，

$$f_i \neq 0\ . \tag{1}$$

为了得到一个最终的矛盾，我们一步步地说明 $f_i = 0 (3 \leqslant i \leqslant 6)$. 下面设 x_j 是 i-边形面边界 $\mathrm{bd}(F)$ 的顶点，$3 \leqslant i \leqslant 6$，$1 \leqslant j \leqslant i$，按逆时针方向，记 $e_j = x_jx_{j+1} \in E(\mathrm{bd}(F)) (1 \leqslant j \leqslant i)$，令 $x_{j+1} = x_1$，进而设 $g_j = y_jx_j \in E_{x_j} - E(\mathrm{bd}(F)) (1 \leqslant j \leqslant i)$. 不失一般性，在随后的讨论中，我们将考虑定理 8.32 前面由 (○) 给出的处处不为

零的 (模 5)- 流 $\varphi_H : E(H) \to \{1,2\}$. 又对 $i = 3,4,5$，设 G_F 表示从 G 通过收缩 i-边形面 F 为一个顶点 $x \in V(G_F) - V(F)$ 所得的图，使得 $O^+(x) = (g'_1, g'_2, \cdots, g'_i)$.

a) 假设 G 含有一个三角形面 F. 由假设和引理 8.37，$H := G_F$ 有一个处处不为零的 (模 5)- 流 $\varphi_H : E(H) \to \{1,2\}$，使得在 H 的对应于 φ_H 的某一个定向 D_H 中 $od_{D_H}x = 0$. 我们分两种情况.

(i) $\varphi_H(g_1) = 1, \varphi_H(g_2) = \varphi_H(g_3) = 2$;

(ii) $\varphi_H(g_2) = 1, \varphi_H(g_1) = \varphi_H(g_3) = 2$

(对于我们的目的，情况 $\varphi_H(g_3) = 1, \varphi_H(g_1) = \varphi_H(g_2) = 2$ 与情况 (i) 对称).

在两种情况下，为了得到 $\varphi : E(G) \to \{1,2\}$，我们有两种方法扩充 φ_H. 首先定义 $\varphi|_{E(G)-E(\mathrm{bd}(F))} = \varphi_H$.

在情况 (i)，定义

$$\varphi(e_1) = 1 = \varphi(e_2), \quad \varphi(e_3) = 2,$$

使得

$$D_\varphi := \langle A(D_H) \cup \{(x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_1, x_3)\} \rangle$$

作为 G 的对应的定向，或者

$$\varphi(e_1) = 2, \quad \varphi(e_2) = \varphi(e_3) = 1,$$

使得

$$D_\varphi := \langle A(D_H) \cup \{(x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_1)\} \rangle$$

作为这种情况所需要的定向 (图 8.5)

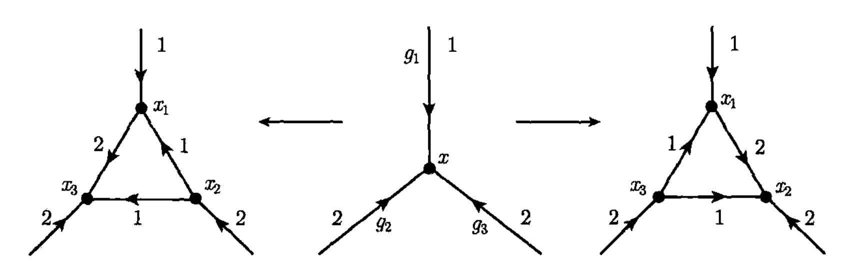


图 8.5 若 $\varphi_H(g_1) = 1$，$\varphi_H(g_2) = \varphi_H(g_3) = 2$，扩充 φ_H 到 φ 的两种可能性

在情况 (ii)，为了得到所需的 φ 和 D_φ，定义

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = 1, \quad \varphi(e_2) = 2,$$

并且

$$D_\varphi := \langle A(D_H) \cup \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_1, x_3)\} \rangle ,$$

或

$$\varphi(e_1) = 2, \quad \varphi(e_2) = \varphi(e_3) = 1,$$

并且

$$D_\varphi := \langle A(D_H) \cup \{(x_2, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_1)\}\rangle$$

(图 8.6). 注意在情况 (i) 和 (ii) 中的每一种情况,

φ_H 能够扩充到 φ, 使得可以指定弧 (x_1, x_2) 和 (x_2, x_1) 中的哪一条属于 D_φ, 而不影响在 $\langle A(D_H)\rangle_{D_\varphi}$ 中的定向. (2)

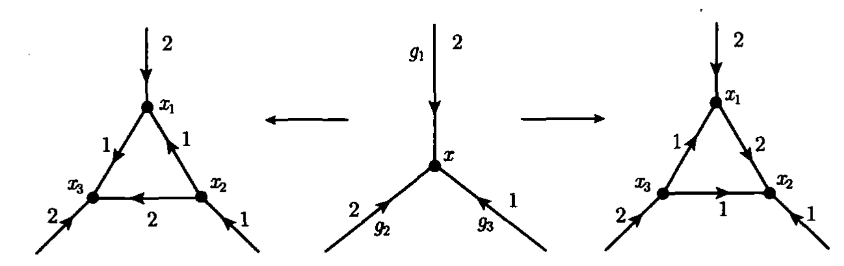


图 8.6　若 $\varphi_H(g_1) = 2$, $\varphi_H(g_2) = 1$, $\varphi_H(g_3) = 2$, 扩充 φ_H 到 φ 的两种可能性

在所有可能的情况下, 我们已从 H 中的这样一个流 φ_H 得到了 G 中一个处处不为零的 (模 5)- 流 φ. 从 G 的选择, 我们得到 $f_3 = 0$ 必须成立.

b) 如果 G 有一个四边形面 F, 由分裂引理, 或者 $(G_F)_{1,2}$, 或者 $(G_F)_{1,4}$ 将是连通的和无桥的, 这是因为 G_F 是这样一个图, 其中指标 1,2 和 1,4 分别对应于 g_1, g_2 和 g_4 (注意因为 $\kappa(G) = 3$, 则 $\kappa(G_F) \geqslant 2$). 不失一般性, 我们假设 $\lambda(G_F)_{1,2} \geqslant 2$, 这等价于说, 从 G 通过不产生交叉边的方式分裂 e_1 得到的 H 是 2-连通 3- 正则图. 注意 H 含有 2- 边形 $\langle x_3, x_4\rangle$. 在任何情况下, 从我们的基本假设得到 H 有一个处处不为零的 (模 5)- 流 φ_H (这里由引理 8.37, 在 H 的对应的定向 D_H 中, $\mathrm{od}_{D_H} x_4 = 0$), 由引理 8.38, φ_H 能扩充为 G 中一个这样的流 φ, 除非 $\varphi_H(e') = \varphi_H(e'')$, 其中 $e', e'' \in E(H) - E(G)$ 是从分裂 e_1 所得到的两条边. 不失一般性, $e' \in E(\langle x_3, x_4\rangle)$.

如果 $\varphi_H(e') \neq \varphi_H(e_3)$, 因为 $\mathrm{od}_{D_H} x_4 = 0$ 的选择, $\varphi_H(g_4) = 2 = \varphi_H(g_3)$. 定义

$$\varphi'_H(e_3) = \varphi_H(e'), \quad \varphi'_H(e') = \varphi_H(e_3)\ ,$$

$$\varphi'_H(g) = \varphi_H(g), \quad g \in E(H) - \{e_3, e'\}\ ,$$

并且保留 D_H 作为 H 对应于 φ'_H 的定向 (注意在这种情况下, D_H 含形如 (x_3, x_4) 的两条弧). 这样, 我们有一个

处处不为零的(模 5)- 流 φ'_H, 由引理8.38, 因为 $\varphi'_H(e') \neq \varphi'_H(e'')$, 它能扩充为 G 中一个这样的流. (3)

现在假设 $\varphi_H(e') = \varphi_H(e_3)$，我们得到

$$\varphi_H(e') = \varphi_H(e'') = \varphi_H(e_3) = 2, \quad \varphi_H(g_3) = \varphi_H(g_4) = 1,$$

并且

$$A(D_H) \supset \{(y_1, y_2), (y_4, x_4), (x_3, y_3), a_{e_3}, a_{e'}\},$$

其中 $a_{e'}$ 和 a_{e_3} 是形如 (x_3, x_4) 的弧.

在这种情况下，由定义

$$若\ g \in E(H) - \{e'\},\ 则\ \varphi'_H(e') = 1,\ \varphi'_H(g) = \varphi(g)$$

及

$$D'_H := (D_H - \{a_{e_3}\}) \cup \{a^R_{e_3}\}\ ,$$

则 φ'_H 也是 H 中满足 $\varphi'_H(e') \neq \varphi'_H(e'')$ 的一个处处不为零的 (模 5)- 流. 从 (3) 和引理 8.38，我们得出存在所需要的 $\varphi : E(G) \to \{1, 2\}$ (也见图 8.7). 在各种可能的情况下，再次构造了所需要的 φ，于是 $f_4 = 0$.

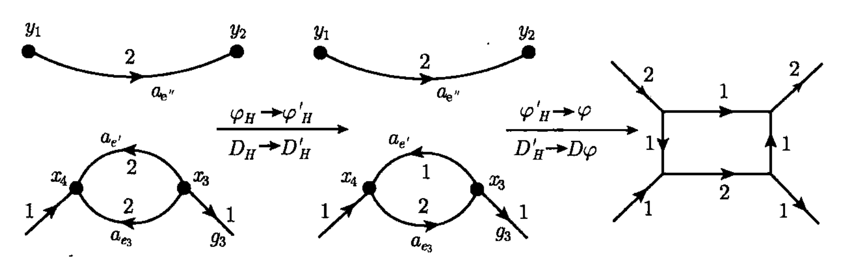


图 8.7 $\varphi_H(e') = \varphi_H(e'') = \varphi_H(e_3) = 2$ 的情况被变换为 $\varphi'_H(e') \neq \varphi'_H(e'')$ 的情况，它能扩充到 $\varphi : E(G) \to \{1, 2\}$

c) 假设 G 有一个五边形面 F，则 G_F 是连通且无桥，因此，不失一般性，分裂引理蕴涵 $(G_F)_{1,2}$ 是连通且无桥. 如在情况 b)，我们有从 G 通过适当地分裂 e_1 得到的 H 是 3- 正则 2- 连通图. 注意 $\mathrm{bd}(F) \subset G$ 对应于 H 中三角形面 Δ 的边界，并且 $(G_F)_{1,2}$ 能够从 H 通过收缩 Δ 为一个顶点 $x \in V(G_F) - V(G)$ 及细分 $y_1y_2 \in E(H)$，使得顶点 $x_{1,2} \in V((G_F)_{1,2}) - V(G_F)$ 而得到.

H 有一个处处不为零的 (模 5)- 流 φ_H，使得由 (2)，对于对应的 D_H，

$$(x_5, x_3) \in A(D_H)\ 当且仅当\ (y_1, y_2) \in A(D_H) \tag{4}$$

(我们假设 φ 从 $G_0 := ((G_F)_{1,2} - x_{1,2}) \cup \{y_1, y_2\}$ 的一个 (模 5)- 流 φ_0 得到，使得 x 是 G_0 的一个对应的定向 D_0 的一个源).

这就是说，或者 x_1 或者 x_2 是 $D' \supset \{(x_1, x_2)\}$ 或 $D'' \supset \{(x_2, x_1)\}$ 的一个源，其中 $D''' = D' - \{(x_1, x_2)\} = D'' - \{(x_2, x_1)\}$ 是由 D_H 导出的 $G - \{(x_1x_2)\}$ 的一个

定向 (图 8.8). 由 (4) 和引理 8.38, 我们可以得出 G 有一个处处不为零的 (模 5)- 流 φ, 使得 $D_\varphi \in \{D', D''\}$ (注意 $2 \leqslant \varphi_H(y_1y_2) + \varphi(x_5x_3) \leqslant 4$ 蕴涵 $1 \leqslant \varphi(x_1x_2) \leqslant 2$). 于是 $f_5 = 0$ 必须成立.

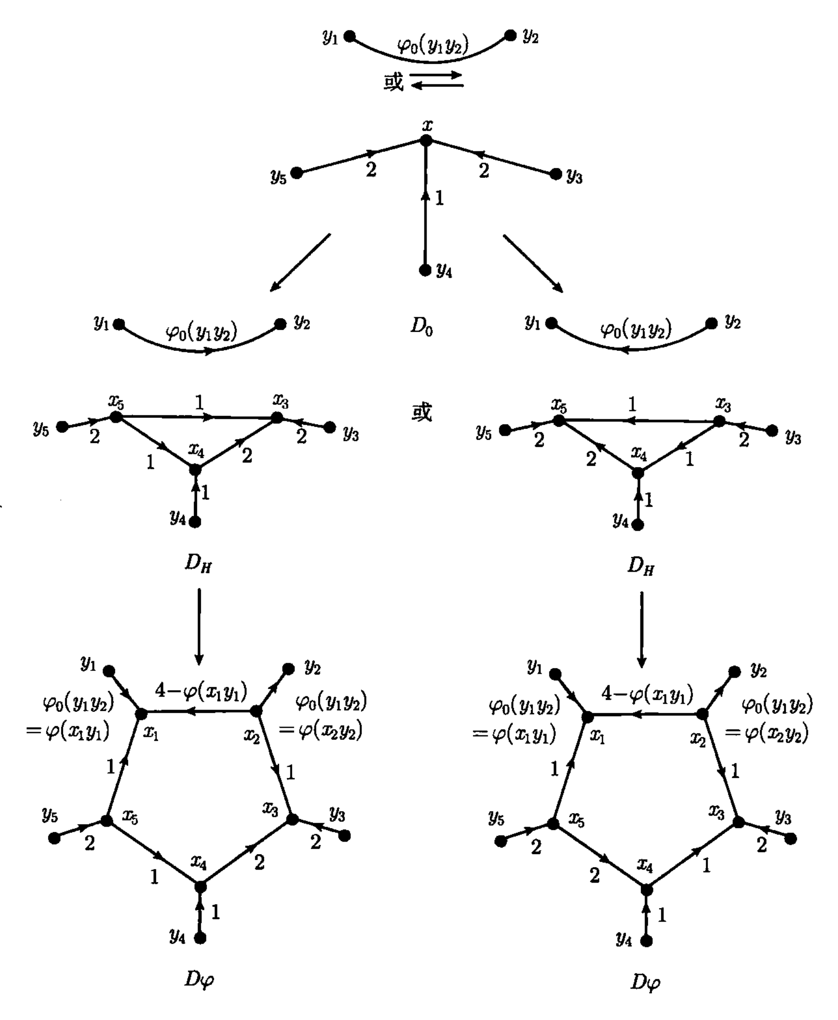


图 8.8　在 $\varphi_0(g_4) = 1$, $\varphi_0(g_3) = \varphi_0(g_5) = 2$ 的情况, 扩充 φ_H 和 D_H (对应于 H) 到 φ 和 D_φ (对应于 G), 其中 $\varphi_H|_{H-E(\Delta)} = \varphi_0$. 如果 $\varphi(x_1, y_1) = \varphi_0(y_1, y_2) = 1$, 则我们定义 $\varphi(x_1x_2) = 2$, 并且用逆代替连接 x_1 和 x_2 的弧

已经证明了 $f_i = 0 (i = 3, 4, 5)$, 我们得到

$$2q = \sum_{i \geqslant 6} i f_i \geqslant 6f\ ,$$

$$0 \leqslant 6\chi(F) = 6p - 6q + 6f \leqslant 4q - 6q + 2q = 0 ,$$

由此，我们得到 $\chi(F) = 0$ 且 $f = f_6$.

假设 $\lambda_c(G) = 3$，并且考虑 $S_c \subset E(G)$，G 的一个圈 3- 割 (注意 G 是非哈密顿的，否则，因它是可 1- 因子分解的，故有一个处处不为零的 4- 流，这样它也有一个处处不为零的 5- 流，与 G 的选择矛盾. 因为 G 有一个 2- 因子，这样它有两个完全不相交的圈). 设 B_1, B_2 是 $G - S_c$ 的两个分支，因为 S_c 是独立边的集合，故 $\kappa(B_i) = 2(i = 1, 2)$. 不失一般性，设

$$p_{B_1} + q_{B_1} \leqslant p_{B_2} + q_{B_2} .$$

在对应于所有圈 3- 割的 B_1 中，选出 B_0 满足

$$p_{B_0} + q_{B_0} = \min\{p_{B_1} + q_{B_1}\} ,$$

最小取在 G 的所有圈 3- 割上. 用 S_0 表示对应于 B_0 的唯一确定的 3- 割.

如果 $\lambda_c(G) \geqslant 4$，记 $B_0 = G$.

d) 对于一个 $\mathrm{bd}(F) \subset B_0$ 的六边形面 F，设

$$G_1 := G - \{e_{2i-1} \mid i = 1, 2, 3\}, \quad G_2 := G - \{e_{2i} \mid i = 1, 2, 3\} .$$

我们断言

$$G_1 \text{ 和 } G_2 \text{ 都是 2- 连通的.} \tag{*}$$

首先 G_1 和 G_2 都不可能是不连通的；否则，从去掉的边中增加某条边将得到一个不连通图，与 $\lambda(G) = 3$ 矛盾 (注意在这种情况下，至多两对邻接的 2- 次顶点属于同一个分支). 假设 $\lambda(G_2) = 1$，并且设 $e = uv$ 是 G_2 的一个桥. 因为 $\delta(G_2) = 2$，G_2 的每一个端块是 2- 连通的 (又 G_2 至少存在两个端块). 因为 2- 次顶点的邻接对属于 G_2 的同一个块，必定存在一个端块，如 B，使得

$$|E(B) \cap \{e_1, e_3, e_5\}| = 1. \tag{5}$$

不失一般性，$e_1 = x_1x_2 \in E(B)$. 于是 B 是图 $G_2 \cup \{e_4\}$ 的一个端块，它仍然有一个桥. 不失一般性，现在假设 $u \in V(B)$ (因为 $\kappa(B) \geqslant 2$，$\kappa(G_2) = 1$ 且 $\Delta(G_2) = 3$，B 必定与 G_2 的一个桥关联)，则 $S_c := \{e, e_2, e_6\}$ 是 G 的一个圈 3- 割，因为

$$G - S_c = (G_2 \cup \{e_4\}) - \{e\}$$

有 B 作为它的分支之一，并且 e_2, e_6 是独立边，因此，S_c 以非平凡的方法分离 G，并且 $\lambda_c(G) = 3$. 现在 $\mathrm{bd}(F)$ 满足

$$\mathrm{bd}(F) \subset B_0, \quad \mathrm{bd}(F) \cap B \neq \varnothing \neq \mathrm{bd}(F) \cap (G - (B \cup S_c)) . \tag{6}$$

我们要证明

$$\text{或者 } S_0 \cap E(B) = \varnothing, \text{或者 } S_0 \cap E(G-(B \cup S_c)) = \varnothing . \tag{7}$$

注意 B_0 和 F 的选择，(5) 和 (6) 蕴涵

$$\varnothing \neq B_0 \cap B \neq B_0 , \tag{8}$$

这等价于说

$$B \cap B_0 \neq \varnothing \neq B \cap (G-(B_0 \cup S_0)) . \tag{9}$$

(9) 和 (6) 蕴涵

$$(G-(B \cup S_c)) \cap B_0 \neq \varnothing \neq (G-(B \cup S_c)) \cap (G-(B_0 \cup S_0)) \tag{10}$$

(注意由 (9) 和 B_0 的选择，$G-(B \cup S_c) \subseteq B_0$ 是不可能). 然而，由 (10)，我们在 G 中有两个边集

$$\{e\} \cup S_0 \cap E(B) \quad \text{和} \quad \{e\} \cup S_0 \cap E(G-(B \cup S_c)), \tag{11}$$

其中前者把 $B \cap (G-(B_0 \cup S_0))$ 和 $B \cap B_0$ 分离，并且后者把 $(G-(B \cap S_c)) \cap (G-(B_0 \cup S_0))$ 和 $(G-(B \cup S_c)) \cap B_0$ 分离. 另一方面，因为 (9) 和 (10)，$\{e_2, e_6\}$ 是 B_0 的 2- 割蕴涵 (11) 中的集是 G 中的分离边集. 因为 $|S_0| = 3$，并且这些集恰好有公共边 e，因此，G 有一个 2- 割 (如果我们假定 (7) 不成立)，与 $\lambda(G) = 3$ 矛盾. 这样 (7) 的有效性就被证明了.

另一方面，$S_0 \cap E(B) = \varnothing$ 蕴涵 $B \subset B_0$，这是因为 $\mathrm{bd}(F) \cup B$ 是 $G - S_0$ 的 2- 连通子图，并且 $\mathrm{bd}(F) \subset B_0$，这与 B_0 的选择矛盾. 这个矛盾与 (7) 一起推出 $S_0 \subset E(B) \cup \{e\}$. 因为 $G^* := \mathrm{bd}(F) \cup (G-(B \cup S_c))$ 是 2- 连通的，并且 $E(G^*) \cap S_0 = \varnothing$，于是

$$G-(B \cup S_c) \subset G^* \subseteq B_0,$$

即对 G 的 3- 割 S_c，$G - S_c$ 的分支 $B_1 := G-(B \cup S_c)$ 满足 $p_{B_1} + q_{B_1} < p_{B_0} + q_{B_0}$，与 B_0 的选择矛盾. 这就最终证明了 (*). 于是我们考虑对某个固定的 $j \in \{1, 2\}$，同胚于 G_j 的 2- 连通 3- 正则图 H_0. 不失一般性，假定 $j = 2$.

由 G 的选择和引理 8.37 的证明得到 H_0 中一个处处不为零的 (模 5)- 流 φ_0 的存在性 (D_0 作为 H_0 的对应定向)，使得对 $h_i = y_{2i-1}y_{2i} \in E(H_0) - E(G) (i = 1, 2, 3)$，

$$|\{i \in \{1,2,3\} \mid \varphi_0(h_i) = 2\}| \geqslant 2; \text{不失一般性，设 } \varphi_0(h_2) = \varphi_0(h_3) = 2 . \tag{12}$$

G_j 的 2- 连通性和 (12) 蕴涵着从 G 通过分裂 e_3 和 e_5 所得到的 3- 正则图 H 是 2- 连通的，并且有一个处处不为零的 (模 5) 流 φ_H，使得 $\varphi_H|_{E(H)-(E_{x_1} \cup E_{x_2})} =$

$\varphi_0|_{E(H_0)-\{h_1\}}$ (这样 $\varphi_H(h_i)=\varphi_0(h_i)=2(i=2,3)$)，$\varphi_H(g_1)=\varphi_H(g_2)=\varphi_0(h_1)$，并且其中连接 x_1 和 x_2 的边 $e_1'\neq e_1$ 满足

$$\varphi_H(e_1')=1\ . \tag{13}$$

不管 $\varphi_H(g_1)=\varphi_H(g_2)$ 取什么值，总能得到 (13)，而 $\varphi(e_1)\in\{1,2\}$ 依赖于 $\varphi_H(g_1)=\varphi_H(g_2)$ 和由 D_0 导出的 $H-\{e_1,e'\}$ 的定向 (分别见情况 b) 中 φ_H' 和 D_H，D_H' 的定义及图 8.7). 因为 (12) 和 (13)，两次应用引理 8.38，将 φ_H 扩充到 G 的一个处处不为零的 (模 5)- 流 φ 满足

$$\begin{aligned}
&\varphi\Big|_{E(G)-\bigcup\limits_{i=3}^{6}E_{x_i}}=\varphi_H|_{E(H)-\{e_1',h_2,h_3\}}\ ,\\
&\varphi(e_{2i})=\varphi_H(e_1')=1,\quad i=1,2,3\ ,\\
&\varphi(g_i)=\varphi_H(h_2)=\varphi_H(h_3)=2,\quad j=3,4,5,6\ ,
\end{aligned}$$

并且 $\varphi(e_k)\in\{1,2\}(k\in\{3,5\})$，依赖于由对应于 φ_H (图 8.9) 的 $H-\{e_1,e_1'\}$ 的定向导出的 $G-\{e_3,e_5\}$ 的定向 D^-.

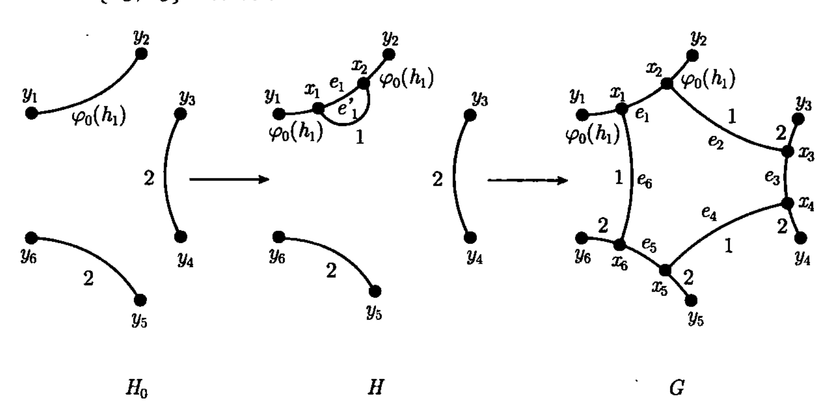


图 8.9 扩充 H_0 中的 φ_0 到 H 中的 φ_H 到 G 中的 φ. 值 $\varphi(e_k)(k=1,3,5)$ 被去掉，这是因为它们需要可分别借助于对应的有向图 D_0 和 D_H 来确定

已经假定 G 没有处处不为零的 (模 5)- 流，并且已证明了 $\lambda(G)=3$，(1) 及 $f_i=0(i=3,4,5)$ (情况 a),b),c))，因此，$f_6\neq 0$，可是在情况 d)，我们证明了在较小 3- 正则图中的一个处处不为零的 (模 5)- 流能够扩充为 G 中的这样一个流 φ. 最终与 G 的选择矛盾. 定理 8.39 得证.

然而，只有 4 个曲面具有非负欧拉特征：① 3- 维球 S_3 (= 平面，$\chi(F)=2$)；② 环面 (具有 $\chi(F)=0$ 的可定向曲面)；③ 射影平面 (= 交叉帽，$\chi(F)=1$)；④ 克莱因瓶 (具有 $\chi(F)=0$ 的不可定向曲面). 对于平面，存在一个更一般的结论：平面图有一个 k- 面染色当且仅当它有一个处处不为零的 k- 流 (我们将在关于染色的章节中证明这个定理，见 [TUTT54a, p83]). 这样在平面图中一个处处不为零的

5- 流的存在性可以从 5 色定理导出 (定理 3.65a)), $k=3,4$ 的情况分别在定理 8.21 和定理 8.31 中讨论了. 在射影平面的情况下, 定理 8.39 已经在 [STEI84a] 中证明了. 这里及可平图的情形都无需处理六边形面, 这能够从情况 c) 和 d) 之间的讨论看出①.

定理 8.40 塔特的 5- 流猜想的每一个极小反例 G 是一个具有 $\lambda_c(G) \geqslant 5$ 和 $g(G) \geqslant 7$ 的斯纳克 (Snark).

(由定义, 一个**斯纳克**是一个满足 $\chi'(G) > 3$ 且 $\lambda_c(G) \geqslant 4$ 的 3- 正则图, 而一个**弱斯纳克**只满足 $\lambda_c(G) \geqslant 3$.)

注意从流的各种结果和这里给出的它们的证明, 我们只能得到定理 8.40 的弱的形式, 即 "斯纳克" 用 "弱斯纳克" 代替, 并且 5 用 3 代替. 注意在定理 8.39 中, $\lambda(G)=3$ 的证明只利用 G 在一个曲面 $\mathcal{F}$ 上的 2- 胞嵌入, 并且情况 a)~ d) 的讨论也可用来说明猜想 8.28 的一个反例必须有围长至少是 7 (因为我们实际上没有利用 bd(F) 是 $i(i=3,4,5,6)$ 边形边界的事实). 我们将详细验证留下作为一个练习 (练习 8.11).

另一方面, 如果 G 是一个满足定理 8.40 或它的弱的形式 (练习 8.11) 的 3- 正则图, 并且 G 在一个有欧拉特征 $\chi(F)=2-\alpha$ 的可定向或不可定向曲面上有一个 2- 胞嵌入 (其中 $\frac{\alpha}{2}$ 是可定向情况的柄的数目, 而在不可定向情况 α 是可交叉帽的数目). 我们可以从

$$2-\alpha = p-q+f, \quad 3p=2q, \quad 2q=\sum if_i \geqslant 7f$$

得出

$$42-21\alpha = 21p-21q+21f \leqslant 14q-21q+6q=-q, \text{即 } q \leqslant 21\alpha - 42,$$

即对于固定的定向或不可定向亏格, 只存在有限个极小反例的候选者 (推论 3.57). 因此, 如果人们能够确定对猜想 8.38 的极小反例关于 α 的一个上界, 这个猜想将化到一个有限问题 (原则上能够用计算机解决 —— 类似于四色问题). 另一方面, 耶格和斯瓦特 (T. Swart) 猜想不存在围长至少是 7 的斯纳克.

如果考虑比无桥图更特殊的图类, 对 $\mu(G,\varphi)$ 是否存在一个比 5 小的上界? 事实上, 下面是塔特的猜想 (见 [TUTT66a,p22].

猜想 8.41(塔特 4- 流猜想) 如果 G 是一个无桥图, 并且没有能收缩到彼特森图的子图, 则 $\mu(G,\varphi) \leqslant 4$.

---

① 根据耶格 (口头交流), $\chi(F)=0$ 的两种情况最近已经解决了 (尽管他没有给我们准确的文献, 并且他在 [JAEG88a] 中没有叙述这些情况). 事实上, [MÖLL88a] 含有这些情况的证明并且借助于计算机, 甚至把定理 8.39 作了推广. 威沃 (R. Weaver) 推广这个结果到所有满足 $\chi(G) \geqslant -2$ 的可容许图 G[WEAV88a]. 而赛尔明斯 (Celmins) 证明了下面我们引用而没有证明的一个重要结果 (对于确切的文献, 见 [JAEG88a]).

用四色定理和拟阵理论，沃尔顿 (P.N. Walton) 和威尔士 (D.J.A. Welsh) 证明了如果 G 是无桥的，并且没有收缩到 $K_{3,3}$ 的子图，那么它有一个处处不为零的 4- 流 [WALT80a]. 这个结果指出了猜想 8.41 的证明方向，可以找到把 G 中的处处不为零的 4- 流问题转化为覆盖 G 的子图问题的结果 (如在定理 8.32 中对 5- 流所作的)，例如，在 [SEYM81d, 2.2] 中. 根据西蒙 (书信交流)，这个结果属于塔特.

定理 8.42 一个图 G 有一个处处不为零的 4- 流当且仅当 G 能被两个欧拉图覆盖.

证明 假设 $G = G_1 \cup G_2$，其中 $G_i(i = 1,2)$ 是 G 的欧拉子图. 设 D_i 是 $G_i(i = 1,2)$ 的欧拉定向 (见推论 4.3). 现在定义 $\varphi : E(G) \to \{1,2,3\}$，

当 $e \in E(G_1) - E(G_2)$时，$\varphi(e) = 1$； 当 $e \in E(G_2) - E(G_1)$时，$\varphi(e) = 2$；

当 $a_e \in A(D_1) \cap A(D_2)$时，$\varphi(e) = 3$； 当 $a_e \in A(D_1) \cap A(D_2^R)$时，$\varphi(e) = 1$.

为了构造 G 中对应于 φ 的一个定向 D_φ，定义

$$A(D_\varphi) = A(D_2) \cup (A(D_1) - \{a_e \in A(D_1) \mid a_e^{\mathrm{R}} \in A(D_2)\}) .$$

因为只去掉了 D_1 的那些弧，使在 D_2 中有与它们相反方向的弧，故 D_φ 是 G 的一个定向，进而 φ 可以认为从处处不为零的 4- 流 $\varphi_1 : E(G_1) \to \{1\}$ 和 $\varphi_2 : E(G_2) \to \{2\}$ 得到. 正因为 φ 的这个解释和 $A(D_\varphi)$ 的定义，因此，φ 是一个所需要的对应于 D_φ 的处处不为零的 4- 流.

相反地，假设 G 有一个处处不为零的 4- 流 $\varphi : E(G) \to \{1,2,3\}$. 对 $v \in V(G)$ 和对应于 φ 的 D_φ，我们有

$$\begin{aligned}|\{e \in E_v \mid \varphi(e) \in \{1,3\}\}| &\equiv \sum_{\substack{e \in E_v \\ \varphi(e) \neq 2}} \varphi(e) \equiv \sum_{e \in E_v} \varphi(e) \\ &= \varphi(A_v^+) + \varphi(A_v^-) = 2\varphi(A_v^-) \equiv 0 \pmod 2,\end{aligned}$$

即 $G_1 := \langle \{e \in E(G) \mid \varphi(e) \in \{1,3\}\} \rangle$ 是 G 的一个欧拉子图，设 D_1 是 G_1 的一个欧拉定向，并且定义

当 $e \in E(G) - E(G_1)$时，$\psi(e) = \varphi(e)$;
当 $a_e \in A(D_1) \cap A(D_\varphi)$时，$\psi(e) = \varphi(e) + 1$;
当 $a_e \in A(D_1) - A(D_\varphi)$时，$\psi(e) = \varphi(e) - 1$.

这样由 φ 和 G_1 的定义，$\psi : E(G) \to \{0,2,4\}$. 显然，$G_2 := \langle \{e \in E(G) \mid \psi(e) = 2\} \rangle \supseteq G - G_1$. 因此，证明 G_2 是欧拉的就够了. 事实上，$D_\psi := D_\varphi$ 是 G 对应于 ψ 的一个定向，这样对每个 $v \in V(G)$ 有 $\psi(A_v^+) = \psi(A_v^-)$. 这从 ψ 的定义和 φ 是一个 (4-) 流的事实可得. 因此，D_1 对应于 G_1 的一个 (2-) 流. 于是

$$D_2 := \langle \{a_e \in A(D_\psi) \mid \psi(e) = 2\} \rangle$$

是对应于 $\psi_2 : E(G) \to \{0,2\}$ 的 G_2 的一个定向，其中 ψ_2 定义如下：

当 $\psi(e)=2$时，$\psi_2(e)=\psi(e)$；否则，$\psi_2(e)=0$.

因为对每个 $v \in V(G_2)$,

$$\psi_2(A_v^+) \equiv \psi_2(A_v^-) \pmod 4, \quad A_v^+ \cup A_v^- \subset A(D_2) ,$$

因此，ψ_2 是一个 (模 4)- 流.

这样我们就从 G_2 和 ψ_2 的定义得到

$$2\mathrm{od}_{D_2}(v) = \psi_2(A_v^+) \equiv \psi_2(A_v^-) = 2\mathrm{id}_{D_2}(v) \pmod 4.$$

因此，$2d_{D_2}(v) \equiv 0 \pmod 4$，即对每个 $v \in V(G_2)$，$d_{G_2}(v)$ 是偶数. 已经找到了由两个欧拉图 G_1 和 G_2 构成的 G 的一个覆盖，因此，证明了定理的有效性.

这样猜想 8.41 等价于说每个没有收缩到 P_5 的子图的无桥图能被两个欧拉图覆盖 (对于猜想 8.41 的进一步讨论和它与其他猜想的关系见 [SEYM81d]).

注 8.43　在定理 8.42 证明的第一部分中，φ 的定义说明了甚至能够对指定的边 $e \in E(G)$ 得到 $\varphi(e)=1$，因为在 G_1 和 G_2 中 φ 的这个定义是对称的 (即两个欧拉图中哪一个先考虑，哪一个后考虑是没有关系的)，并且因为注 8.20，集 $E_1 \cap E(G_1) \cap E(G_2)$，$E_3 \cap E(G_1) \cap E(G_2)$ 可以交换 (如果必要的话，只考虑 D_1^R 而非 D_1). 同理，我们能指定 $a_e \in A(D_\varphi)$ 的定向.

在 [JAEG88a] 中已经提到，在 3- 正则的情况下，猜想 8.41 转化为**3- 次 4- 流猜想**：*每一个不含同胚于 P_5 的子图的 3- 正则无桥图是 3- 边可染色的*(由定理 8.31，这等价于说，这个图有一个处处不为零的 4- 流)，但是这两个猜想是否等价还不清楚.

为了使得 $\mu(G,\varphi)$ 尽可能小，把 G 限制到一类特殊的无桥图的另一方法是增加连通度. 对于这种情况，有另一个猜想.

猜想 8.44(3- 流猜想)　如果 G 是没有 3- 割的无桥图，则 $\mu(G,\varphi) \leqslant 3$.

耶格给我指出，以下面较弱的形式证明猜想 8.44 就够了 (见 [BOND76a, p252, 问题 48]).

猜想 8.44a　每一个没有 3- 割的无桥 5- 正则简单图 G 有一个定向 D，使对每一个 $v \in V(D) = V(G)$ 有 $\{\mathrm{od}_D(v), \mathrm{id}_D(v)\} = \{1,4\}$.

此外，耶格提出了**弱 3- 流猜想**：*对某个 $k \in \mathbb{N}$，每个 k- 边连通图有 $\mu(G,\varphi) \leqslant 3$*[JAEG88a]. 在更早的时候，他得到一个结果，这一结果与猜想 8.44 密切相关，就像西蒙的 6- 流定理与猜想 8.28 密切相关一样 [JAEG76b,79a,88a].

定理 8.45(耶格的 4- 流定理)　每一个没有 3- 割的无桥图有一个处处不为零的 4- 流.

像耶格在证明定理 8.45 中所做的一样，我们将使用库达 (Kundu) 的引理 (引理 3.40). 但是，在其他方面，我们将用纯粹构造性方法证明主要部分，将使用下面的引理.

定理 8.46 设 T 是一个连通图 G 的支撑树，则存在 G 的一个支撑欧拉子图 H 满足 $E(G)-E(T)\subseteq E(H)$.

证明 考虑 $H_0:=\langle E(G)-E(T)\rangle\cup V(G)$. 如果 H_0 是欧拉的，则设 $H=H_0$；否则，在 T 中标记 H_0 的奇顶点 $v_1,\cdots,v_{2k}$.

设 $P_i=P(v_{2i-1},v_{2i})$ 是 T 中连接 v_{2i-1} 和 v_{2i} 的路，$i=1,\cdots,k$. 假设这 $2k$ 个顶点的下标用这样一种方法选择，使得这 k 条路的总长尽可能小. 我们断言这种选择蕴涵着对 $1\leqslant i<j\leqslant k$,

$$E(P_i)\cap E(P_j)=\varnothing\ . \tag{1}$$

若不然，对某个 $i\neq j$，$E(P_i)\cap E(P_j)\neq\varnothing$，则因为在一个树中任意两个顶点有唯一的路连接它们 (定理 3.29)，$\langle E(P_i)\cap E(P_j)\rangle_T$ 是一条路. 构造

$$F_{i,j}=P_i\cup P_j-\langle E(P_i)\cap E(P_j)\rangle_T\ .$$

$F_{i,j}$ 只由 P_i 和 P_j 中的边组成，并且它是一个恰好由两个分支 P_i',P_j'，使得 $\{v_{2i-1},v_{2i},v_{2j-1},v_{2j}\}=V_1(F_{i,j})$ 的路-森林 (即每一分支是一条路). 对 $i\neq m\neq j$，$1\leqslant m\leqslant k$，设 $P_m'=P_m$，我们有

$$\sum_{i=1}^{k}l(P_i')\leqslant\sum_{i=1}^{k}l(P_i)\ .$$

与 $v_1,\cdots,v_{2k}$ 的下标的选择相矛盾. 现在定义

$$H:=H_0\cup\left(\bigcup_{i=1}^{k}P_i\right)\ .$$

由 (1)，

$$d_H(v_j)\equiv d_{H_0}(v_j)+1\ (\mathrm{mod}\ 2),\quad j=1,\cdots,2k\ ,$$

$$d_H(v)\equiv d_{H_0}(v)\ (\mathrm{mod}\ 2),\qquad v\neq v_j,j=1,\cdots,2k,$$

即 H 是欧拉的.

下面的两个推论是引理 8.46 证明的直接结果.

推论 8.47 设 $v_1,\cdots,v_{2k}$ 是连通图 G 的任意 $2k$ 个顶点，则 G 中存在 k 条边不交的路 $P_1,\cdots,P_k$，使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}V_1(P_i)=\{v_1,\cdots,v_{2k}\}$(在 G 的一个支撑树中考虑 $v_1,\cdots,v_{2k}$).

推论 8.48　如果一个连通图 G 有两个边不交的支撑树 T 和 T'，则 G 有两个连通的支撑欧拉子图 H 和 H'，使得 $T \subset H$，$T' \subset H'$.

定理 8.45 的证明　用反证法. 我们选 G 具有极小 $p_G + q_G$，使得 $\lambda(G) \geqslant 2$，G 没有 3- 割，但 $\mu(G, \varphi) > 4$. G 的每一个块 B 也能满足 $\lambda(B) \geqslant 2$，并且 B 的一个 3- 割是 G 的一个 3- 割，进而一般来说，如果 φ_j 是 B_j 的一个处处不为零的 k- 流，其中 $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_s\}$ 是 G 的块集，因为 $E(G) = \bigcup_{j=1}^{s} E(B_j)$，故对于 $j \in \{1, \cdots, s\}$，

$$\varphi(e) = \varphi_j(e) \leftrightarrow e \in E(B_j)$$

是 G 的一个处处不为零的 k- 流 (因此，φ 由 $\{\varphi_j \mid j = 1, \cdots, s\}$ 唯一确定)，从而由 G 的选择知 $\mathcal{B} = \{G\}$，因此，$\kappa(G) \geqslant 2$. 我们断言 $\lambda(G) > 2$.

首先注意 G 的选择蕴涵 $\delta(G) > 2$ (也见命题 8.30 的证明). 假设 $\lambda(G) = 2$，我们找到一个 2- 割 $S_c = \{x_1y_1, x_2y_2\}$. 因为 $\kappa(G) \geqslant 2$，S_c 的元素是不邻接的，并且使得图

$$(G - S_c) \cup \{x_1x_2, y_1y_2\}$$

是不连通的，并且恰好有两个分支 G_1, G_2. 不失一般性，令 $x_1x_2 \in E(G_1)$，$y_1y_2 \in E(G_2)$. 注意 $G_i (i \in \{1,2\})$ 的任意 3- 割导出 G 的 3- 割，并且注意 $p_{G_i} + q_{G_i} < p_G + q_G (i = 1, 2)$，因此，从定理的假设和 G 的选择 (注意 $\kappa(G_i) \geqslant 2 (i = 1, 2)$) 知 G_i 有一个处处不为零的 4- 流 φ_i. 用 D_i 表示 G_i 的对应定向，$i = 1, 2$. 由注 8.43，不失一般性，我们假定 $\varphi_1(x_1x_2) = \varphi_2(y_1y_2) = 1((x_1, x_2) \in A(D_1)$，$y_2, y_1 \in A(D_2))$. 现在定义

$$\varphi(e) = \begin{cases} \varphi_1(e), & e \in E(G_1) - \{x_1x_2\}, \\ \varphi_2(e), & e \in E(G_2) - \{y_1y_2\}, \\ \varphi_1(x_1x_2) = \varphi_2(y_1y_2), & e \in S_c, \end{cases}$$

$$D_\varphi = (D_1 - \{(x_1, x_2)\}) \cup (D_2 - \{(y_2, y_1)\}) \cup \{(x_1, y_1), (y_2, x_2)\}.$$

因此，φ 是 G 中一个处处不为零的 4- 流，使得 D_φ 是 G 中的对应的定向. 因为 G 的选择和 G 不存在 3- 割，我们得到 $\lambda(G) \geqslant 4$.

由库达引理 (引理 3.40)，G 含有两个边不交的支撑树 T, T'，由推论 8.48，就产生了两个连通的欧拉子图 $H \supset T$ 和 $H' \supset T'$. 因为 $G - E(T') \subseteq H$，$G - E(T) \subset H'$ (见引理 8.46) 和 $T \cap T' = V(G)$，则有 $G = H \cup H'$. 现在从定理 8.42 导出定理 8.45①.

作为前面证明的最后部分的一个结论，我们得到下面的结果.

① [SEYM81d]包含定理 8.42，并且其中西蒙考虑了耶格的 8- 流定理 (它在西蒙的 6- 流定理之前，并且也含定理 8.45)，[SEYM81] 没有明确地注意定理 8.42 和耶格的 4- 流定理之间的联系，前者给出了证明后者的一个简单的方法. 事实上，耶格从更一般的讨论导出了他的结果，见 [JAEG79a，命题 5,6,7,8].

推论 8.48a 每一个 4- 边连通图有一个连通的支撑欧拉子图.

推论 8.48 将作为后面对讨论连通支撑欧拉子图存在性的一个基础.

我们采用证明定理 8.45 中所用的方法，得到 8- 流定理的一个证明：加倍一个 3- 边连通 3- 正则图 G 的边，产生一个 6- 边连通图 H，由库达引理，它含三个分别对应于支撑树 $T_1, T_2, T_3 \subset G$，使得 $E(T_1) \cap E(T_2) \cap E(T_3) = \varnothing$ 的边不交的支撑树 T, T', T'' (见 [JAEG88a，引理 4.2]). 因此，G 能被三个欧拉图 G_1, G_2, G_3 覆盖. 定义 $\varphi_i : E(G_i) \to \{2^{i-1}\}(i = 1, 2, 3)$，产生 G 的一个处处不为零的 8- 流.

除了定理 8.45，耶格也隐含证明了 3- 流猜想蕴涵着西蒙的 6- 流定理 [JAEG79a，命题 11]. 作为 3- 流猜想的部分结果，在 [STEI88a] 中，这个猜想对射影平面已经得到证明.

在 [JAEG84b,88a] 中提出了下面的猜想.

猜想 8.49(循环流猜想) 对每一个 $k \in \mathbb{N}$ 和每一个 $4k$- 边连通图 G，存在 G 的一个定向 D，使得对每个 $v \in V(D) = V(G)$ 有 $\mathrm{id}_D(v) \equiv \mathrm{od}_D(v) \pmod{(2k+1)}$①.

猜想 8.49 不仅可以由猜想 8.44a 得到，而且对 $k = 1$，它确实等价于 3- 流猜想，进而对 $k = 2$，它蕴涵着 5- 流猜想，即如果 G 是 3- 边连通的，则通过用三条平行边代替每一条边 (即每条边的重数为 3)，得到一个 9- 边连通图 H，满足 $\mathrm{id}_D(v) \equiv \mathrm{od}_D(v) \pmod 5$ 的 H 的任一个定向 D 能够被变换为 G 的一个处处不为零的 5- 流. 我们留下作为一个练习 (练习 8.13).

用覆盖子图 (见定理 8.42) 的术语描述处处不为零的 4- 流的另一种方法由凯特林 (P.A. Catlin) 给出，他用与定理 8.42 中等价的形式定义了一个处处不为零的 4- 流 [CATL86b].

定理 8.50 设 G 是任意图，下面的结论等价：

1) G 有一个处处不为零的 4- 流;

2) $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$，$E(G_i) \cap E(G_j) = \varnothing (1 \leqslant i < j \leqslant 3)$，并且 $d_{G_i}(v) \equiv d_G(v) \pmod 2 (v \in V(G)$，$1 \leqslant i \leqslant 3)$;

3) 存在 $G_1 \subset G$，使得 $d_{G_1}(v) \equiv d_G(v) \pmod 2$，$v \in V(G)$，并且 $G - E(G_1)$ 的每个分支含 G 的偶数个奇顶点.

(注意在 3) 中，因为次的条件，$G - E(G_1)$ 是一个欧拉图.)

证明 1) 蕴涵 2). 由定理 8.42，G 有一个处处不为零的 4- 流当且仅当 $G = H_1 \cup H_2$，并且 H_1, H_2 是欧拉图. 定义

$$G_1 = \langle E(H_1) - E(H_2) \rangle \cup V(G) ,$$

$$G_2 = \langle E(H_2) - E(H_1) \rangle \cup V(G) ,$$

① 耶格称 G 的这个定向是一个 (模 $(2k+1)$-) 定向 [JAEG88a].

$$G_3 = \langle E(H_1) \cap E(H_2) \rangle \cup V(G)$$

(当然，如果 G 是欧拉的，则 $E(G_i) = \varnothing$ 可能对某个 $i \in \{1,2,3\}$ 成立). 因为一般地，

$$d_G(v) = d_{H_1}(v) + d_{H_2}(v) - |E(H_1) \cap E(H_2) \cap E_v| \tag{1}$$

且因为 $E(G_i) \cap E(G_j) = \varnothing (1 \leqslant i < j \leqslant 3)$，由构造法，我们对每个 $v \in V(G)$ 有

$$d_{G_i}(v) = d_{H_i}(v) - |E(H_1) \cap E(H_2) \cap E_v|, \quad i = 1,2 \tag{2}$$

(其中在 $H_1 \cap H_2$ 中的环算两次). 现在，$d_{H_i}(v) \equiv 0 \pmod 2$ 与 (1)，(2) 结合得到

$$d_G(v) \equiv d_{G_i}(v) \pmod 2, \quad i = 1,2 .$$

因为 $G_1 \cup G_2$ 是欧拉的，并且 $G_1 \cup G_2 \cup G_3 = G$ 是边不交的并，这个同余式对 $i = 3$ 也成立.

2) 蕴涵 3). 对于满足 2) 的 G_1, G_2, G_3，每个图 G_i 满足 $d_{G_i}(v) \equiv d_G(v) \pmod 2$ $(i = 1,2,3)$. 不失一般性，令 $i = 1$. 因为 $G - E(G_1) = G_2 \cup G_3$ 是欧拉的，并且因为对 $k = 2,3$，G_k 的每个分支有 G_k 的偶数个奇顶点，它们也是 G 的奇顶点. 又因为 $G_2 \cup G_3$ 的每个分支 C 是 G_2 和 G_3 的某些分支的并，从而 C 包含 G 的偶数个奇顶点.

3) 蕴涵 1). 设 $G_1 \subseteq G_2$ 被选出，使得 G_1 满足 3). $H := G - E(G_1)$ 的每个分支是欧拉的，并且 H 的每个分支 C 含有 G 的偶数个奇顶点，记它们为 $v_1, \cdots, v_{2k_C}$. 由推论 8.47，存在 k_C 个边不相交的路 $P_1, \cdots, P_{k_C}$，它们的奇顶点恰好是这些顶点 $v_1, \cdots, v_{2k_C}$. 这样 $G_2 := \bigcup\limits_{C \subset H} \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k_C} P_i \right) \cup V(G)$ 也满足 3)，其中第一个并取遍 H 的所有分支 C，于是 H 和 $G_1 \cup G_2$ 都是 G 的欧拉子图，并且它们覆盖 G. 现在定理 8.50 从定理 8.42 可得.

我们还注意到定理 8.50 与圈覆盖有关.

对于一般的 k- 流 $\varphi : E(G) \to \{0,1,\cdots,k-1\}$，可以对 $\min\{\varphi(e) \mid e \in E(G)\}$ 的实际值进行限制，参见 [JAEG76a].

定义 8.51　a) 对 $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$a \leqslant b$，如果 G 的一个整 k- 流 φ 对每个 $e \in E(G)$ 有 $a \leqslant \varphi(e) \leqslant b$，则称它为一个 $[a,b]$- **流**. 如果 G 有一个 $[a,b]$- 流 φ，我们称 G 是 $[a,b]$- **可定向的**，并且 G 对应于 φ 的一个定向称为一个 $[a,b]$- **定向**.

b) 对一个图 G，称一个映射 $\omega : V(G) \to \mathbb{R}$ 是 G 的一个 **平衡值**，如果对每个 $X \subseteq V(G)$，

$$\left| \sum_{v \in X} \omega(v) \right| \leqslant e(X) .$$

这样，图 G 中一个处处不为零的 k- 流的存在性等价于说 G 是 $[1,k-1]$- 定向的. 注意 $[a,b]$- 流和定义 3.83 间的密切联系. 至于平衡值，注意映射 ω 由条件 $|\omega(v)| \leqslant d(v)(v \in V(G))$ 界定. 然而，$[a,b]$- 可定向性和平衡定向性之间存在密切的联系. 首先，我们证明两个引理. 第一个对一个给定图的定向的出次序列进行了分类.

引理 8.52([HAKI65a]) 设 G 是一个图，并且设 $d_1,\cdots,d_p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，$p=p_G$，存在 G 的一个定向 D，使得 $d_i=\mathrm{od}(v_i)(i=1,\cdots,p)$，当且仅当

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = q_G \quad 且对每个X \subseteq V(G), \quad \sum_{v_i \in X} d_i \geqslant q_{\langle X\rangle_G}\ .$$

证明 假设对 G 的某个定向图 D，我们有 $\mathrm{od}(v_i)=d_i(i=1,\cdots,p)$，则

$$q_G = a_D = \sum_{i=1}^{p}\mathrm{od}(v_i) = \sum_{i=1}^{p} d_i,$$

进而对每个 $X \in\subseteq V(G)$ 有

$$\sum_{v_i\in X} d_i = \sum_{v_i\in X}\mathrm{od}(v_i) = a_{\langle X\rangle_D} + a^+(X) \geqslant a_{\langle X\rangle_D} = q_{\langle X\rangle_G}\ .$$

这就证明了必要性.

反之，假设 $\sum\limits_{i=1}^{p} d_i = q_G$，并且对每个 $X\subseteq V(G)$ 有 $\sum\limits_{v_i\in X} d_i \geqslant q_{\langle X\rangle_G}$. 不失一般性，我们假设 G 是连通的 $\left(注意对每个分支 C，\sum\limits_{v_j\in V(C)} d_j \geqslant q_C 蕴涵等式成立，这是因为 \sum\limits_{i=1}^{p} d_i = q_G\right)$. 因为 $p=1$ 的情况是平凡的 (在这种情况下，G 的任意定向都满足要求)，我们假定对某个 $i\neq j$，$1\leqslant i<j\leqslant p$，$v_iv_j\in E(G)$. 不失一般性，$i=p-1$，$j=p$. 等同 v_{p-1} 和 v_p 得到 $x_{p-1}\notin V(G)$，并且增加 $\lambda(v_{p-1}v_p)$ 个新的与 x_{p-1} 关联的环. 记为 $x_i=v_i(1\leqslant i\leqslant p-2)$，并对这样得到的图 H，定义

$$d_i' = d_i,\ 1\leqslant i\leqslant p-2, \qquad d_{p-1}' = d_{p-1}+d_p\ .$$

由 H 的构造，不管 $x_{p-1}\in X'$，或者 $x_{p-1}\notin X'$，对每个 $X'\subseteq V(H)$，我们仍然有 $\sum\limits_{i=1}^{p-1} d_i' = q_H$ 和 $\sum\limits_{x_i\in X'} d_i' \geqslant q_{\langle X'\rangle_H}$.

应用归纳法，我们得到 H 的一个定向 D'，使得 $\mathrm{od}_{D'}(x_i)=d_i'(1\leqslant i\leqslant p-1)$. 我们变换 D' 为 G 的一个定向 D，除了 $\lambda(v_{p-1}v_p)\geqslant 1$ 条连接 v_{p-1} 和 v_p 的边的定向外，它被 D' 唯一确定. 特别地，我们有 $d_i'=d_i=\mathrm{od}_D(v_i)(1\leqslant i\leqslant p-2)$. 不失一般性，假设 $\mathrm{od}_D(v_{p-1})\geqslant d_{p-1}$. 这样因为 $\sum\limits_{i=1}^{p} d_i = a_D = q_G$ 有 $\mathrm{od}_D(v_j)\leqslant d_p$. 因此，假定 $\delta_{p-1} := \mathrm{od}_D(v_{p-1}) - d_{p-1}\geqslant 0$. 在满足 $d_i=\mathrm{od}_D(v_i)(1\leqslant i\leqslant p-2)$ 的 D 的所

有可能的选择中，选择一个 D，使得 δ_{p-1} 极小. 如果 $\mathrm{od}_D(v_{p-1}) = d_{p-1}$，则 D 是所需要的，因此，必须假定 $\delta_{p-1} > 0$. 我们断言在 D 中，存在一条从 v_{p-1} 到 v_p 的路 $P = P(v_{p-1}, v_p)$.

若不然，假设不存在这样的 P，并且定义

$$X := \{v_j \in V(G) \mid \exists P(v_{p-1}, v_j) \subseteq D\} .$$

由定义和假设，我们有

$$v_{p-1} \in X, \quad v_p \notin X, \quad A^+(X) = \varnothing, \quad \delta_{p-1} > 0 .$$

这样

$$q_{\langle X \rangle_G} = a_{\langle X \rangle_D} = \sum_{v_i \in X} \mathrm{od}(v_i) > \sum_{v_i \in X} d_i ,$$

与假设矛盾. 因此，P 确实存在. 令

$$D_1 := (D - P) \cup P^R,$$

我们有 $\mathrm{od}_{D_1}(v_i) = \mathrm{od}_D(v_i) = d_i (1 \leqslant i \leqslant p-2)$，$\mathrm{od}_{D_1}(v_{p-1}) = \mathrm{od}_D(v_{p-1}) - 1$，$\mathrm{od}_{D_1}(v_p) = \mathrm{od}_D(v_p) + 1$. 因此，$0 \leqslant \delta'_{p-1} := \mathrm{od}_{D_1}(v_{p-1}) - d_{p-1} < \delta_{p-1}$. 这与 δ_{p-1} 的极小性矛盾. 引理证毕.

下面的引理将一个图的出次序列和平衡值联系起来.

引理 8.53 [JAEG76a, 命题 3]　设 G 是 p 个顶点的图，并且设 $d_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} (i = 1, \cdots, p)$. 下面的结论等价:

1) G 有一个定向图 D，使得 $\mathrm{od}(v_i) = d_i (i = 1, \cdots, p)$;

2) 用 $\omega(v_i) = 2d_i - d_G(v_i) (i = 1, \cdots, p)$ 定义的 $\omega : V(G) \to \mathbb{R}$ 是一个平衡值.

证明　ω 是一个平衡定向当且仅当

$$X \subseteq V(G) \to -e(X) \leqslant \sum_{v_i \in X} \omega(v_i) \leqslant e(x) ,$$

即因为 $\sum\limits_{v_i \in X} d_G(v_i) = 2q_{\langle X \rangle} + e(x)$，当且仅当

$$-e(X) \leqslant 2 \sum_{v_i \in X} d_i - 2q_{\langle X \rangle} - e(X) \leqslant E(X) .$$

这等价于

$$X \subseteq V(G) \to q_{\langle X \rangle} \leqslant \sum_{v_i \in X} d_i \leqslant e(X) + q_{\langle X \rangle} . \tag{a}$$

我们断言 (a) 等价于

$$X \subseteq V(G) \to \sum_{v_i \in X} d_i \geqslant q_{\langle X \rangle} \text{且} \sum_{i=1}^{p} d_i = q_G . \tag{b}$$

注意因为不等式 (b) 是 (a) 的一部分，故 (a) 蕴涵 (b). 同时，对 $X = V(G)$，(a) 变成 $q_G \leqslant \sum_{i=1}^{p} d_i \leqslant q_G$，即 $\sum_{i=1}^{p} d_i = q_G$. 反之，假设 (b) 成立，对每个 $X \subset V(G) = V$，我们有不等式

$$\sum_{v_i \in X} d_i \geqslant q_{\langle X \rangle}, \quad \sum_{v_j \in V-X} d_j \geqslant q_{\langle V-X \rangle}$$

和等式

$$\sum_{v_i \in X} d_i + \sum_{v_j \in V-X} d_j = q_G = q_{\langle X \rangle} + q_{\langle V-X \rangle} + e(X).$$

它们联合起来得

$$\sum_{v_i \in X} d_i = q_{\langle X \rangle} + e(X) + \left(q_{\langle V-X \rangle} - \sum_{v_j \in V-X} d_j \right) \leqslant q_{\langle X \rangle} + e(X) \ .$$

因此，(b) 和 (a) 是等价的. 可是由引理 8.52，(b) 等价于存在 G 的一个定向 D，使得 $\mathrm{od}(v_i) = d_i (i = 1, \cdots, p)$，即引理的结论 1) 和 2) 事实上等价.

用引理 8.53，我们能证明下面的结果 [JAEG76a，定理 2] ($\mathbb{Z}$ 表示整数集).

定理 8.54 设 G 是一个图，设 $n, m \in \mathbb{N}$，$n > m$. 下面的结论等价:

1) G 是 $[m, n]$- 可定向的;

2) 对于每个 $v \in v(G)$，存在 $\gamma_v \in \mathbb{Z}$ 满足 $\gamma_v \equiv d(v) \pmod 2$，并且用 $\omega(v) = \gamma_v \dfrac{n+m}{n-m}$ 定义 $\omega : V(G) \to \mathbb{R}$ 是一个平衡值.

证明 由霍夫曼定理 (定理 3.84)，G 有一个 $[m, n]$- 定向 D 当且仅当对每个 $X \subseteq V(G) = V(D)$ 有

$$n \cdot a^+(X) \geqslant m \cdot a^-(X), \quad n \cdot a^-(X) \geqslant m \cdot a^+(X) \ ,$$

即当且仅当对每个 $X \subseteq V(G)$ 有

$$(n+m)(a^-(X) - a^+(X)) \leqslant (n-m)(a^-(X) + a^+(X)) \ ,$$

$$(n+m)(a^+(X) - a^-(X)) \leqslant (n-m)(a^-(X) + a^+(X)) \ ,$$

这等价于说，对每个 $X \subseteq V(G) = V(D)$ 有

$$\frac{n+m}{n-m} |a^+(X) - a^-(X)| = a(X) = e(X) \ . \tag{1}$$

然而，在任意情况下，对任意的 $X \subseteq V(G) = V(D)$ (其中 D 被看成任意定向)，我们有

$$a^+(X) - a^-(X) = \sum_{x \in X} \mathrm{od}_D(x) - \sum_{x \in X} \mathrm{id}(x) = \sum_{x \in X} (2\mathrm{od}_D(x) - d_G(x)) \ . \tag{2}$$

因此，有一个 $[m,n]$- 定向 D 等价于 (1)，由 (2) 这等价于

$$\frac{n+m}{n-m}\left|\sum_{x\in X}(2\mathrm{od}_D(x)-d_G(x))\right|$$
$$=\left|\sum_{x\in X}\frac{n+m}{n-m}(2\mathrm{od}_D(x)-d_G(x))\right|\leqslant e(X) \tag{3}$$

(注意 $\frac{n+m}{n-m}>1$). 定义 $\omega:V(G)\to\mathbb{R}$，使得

$$\omega(v)=\frac{n+m}{n-m}(2\mathrm{od}_D(v)-d_G(v))\ , \tag{4}$$

我们得到 ω 是 G 的平衡值当且仅当 (3) 被满足，即当且仅当 G 是 $[m,n]$- 可定向的. 现在假设 G 是 $[m,n]$- 可定向的，对于

$$\gamma_v:=2\mathrm{od}_D(v)-d_G(v)\equiv d_G(v)=d(v)\ (\mathrm{mod}\ 2)\ ,$$

我们可得 $\omega(v)=\gamma_v\cdot\frac{n+m}{n-m}(v\in V(G))$，定义了 G 的一个平衡值.

反之，假设对每个 $v\in V(G)$，存在一个整数 $\gamma_v\equiv d_G(v)\ (\mathrm{mod}\ 2)$，使得

$$\omega(v)=\gamma\cdot\frac{n+m}{n-m} \tag{5}$$

定义 G 的一个平衡值。因为 $|\omega(v)|\leqslant d_G(v)$ (见定义 8.51 后面的一段)，我们有 $|\gamma_v|\leqslant\frac{n-m}{n+m}d_G(v)<d_G(v)$，即

$$-d_G(v)<\gamma_v<d_G(v)\ .$$

因为对每个 $d_v\in\{0,\cdots,d_G(v)\}$，

$$-d_G(v)\leqslant 2d_v-d_G(v)\leqslant d_G(v)\ ,$$

故存在

$$d_v\leqslant\{0,\cdots,d_G(v)\},\ \text{使得}\ \gamma_v=2d_v-d_G(v)\ . \tag{6}$$

因为 ω 是 G 的一个平衡值，对每个 $X\subseteq V(G)$，我们有

$$\left|\sum_{v\in X}\gamma_v\right|=\frac{n-m}{n+m}\left|\sum_{v\in X}\omega(v)\right|\leqslant\left|\sum_{v\in X}\omega(v)\right|\leqslant e(X),$$

即 $\omega_0(v):=\gamma_v$ 已经定义了 G 的一个平衡值. 由引理 8.53，G 有一个定向 D，使得 $\mathrm{od}_D(v)=d_v(v\in V(G))$. 这与 (6) 和 (5) 一起得到 (4). 因为 ω 是 G 的一个平衡值，从而 G 是 $[m,n]$- 可定向的，这就结束了定理的证明.

推论 8.55([JAEG76a, 命题 4]) 一个 3- 正则图 G 是 $[m,n]$- 可定向的，$0<m<n$，当且仅当 G 有一个平衡值 $\omega: V(G)\rightarrow\left\{-\frac{n+m}{n-m},\frac{n+m}{n-m}\right\}$.

推论 8.56([JAEG76a, 命题 5]，也见 [BOND72a, 定理 7]) 一个 3- 正则图有一个处处不为零的 4- 流当且仅当它有一个平衡值 $\omega: V(G)\rightarrow\{-2,2\}$.

推论 8.55 和推论 8.56 是定理 8.54 和用 $[1,3]$- 可定向性解释 4- 流的直接结果. 因此，它们的证明作为一个练习. 至于推论 8.56，我们能够用定理 8.31 等价地重述它如下：*一个3-正则图是3-边可染色的当且仅当它有一个值在 $\{-2,+2\}$ 中的平衡值.* 我们将在染色问题的情形下讨论平衡值和 $[a,b]$- 可定向性. 可是我们注意耶格的另一个猜想 [JAEG76a].

猜想 8.57 每个平面无桥图是 $[2,7]$- 可定向的.

耶格注意到这个猜想比五色定理强，但是比四色定理弱. 他也向我指出 $[a,b]$-可定向性可视为不必是值–真途径的闭覆盖途径问题.

命题 8.58 一个连通图 G 有一个 $[m,n]$- 流，$0<m\leqslant n$，当且仅当 G 有一条闭覆盖途径 W 用每条边恰好 $2n$ 次，并且使每条边在两个可能的方向之一至少用 $m+n$ 次.

证明 考虑 G 中一个 $[m,n]$- 流. 由定义，G 有一个处处不为零的流 φ 和一个定向 D_φ，使得对每个 $e\in E(G)$，$m\leqslant\varphi(e)\leqslant n$，并且对每个 $v\in V(G)=V(D_\varphi)$，$\varphi(A_v^+)=\varphi(A_v^-)$，这等于说，$G$ 有一条值–真覆盖途径在两个可能的方向之一，但不在另一方向，用每条边恰好 $\varphi(e)$ 次. 定义

$$D_1:=D_\varphi\cup D_\varphi^R,$$

并且定义 $\varphi_1: A(D_1)\rightarrow\{1,\cdots,2n\}$，使得

$$\varphi_1(a)=\begin{cases}\varphi(e)+n, & a=a_e\in D_\varphi,\\ n-\varphi(e), & a=a_e^R\in D_\varphi^R,\end{cases} \tag{1}$$

那么对每个 $v\in V(D_1)$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_1(A_{v,D_1}^+)&=\varphi(A_v^+)+n|A_v^+|+n|A_v^-|-\varphi(A_v^-)\\&=\varphi(A_v^-)+n|A_v^-|+n|A_v^+|-\varphi(A_v^+)\\&=\varphi_1(A_{v,D_1}^-)\end{aligned}$$

(其中 A_{v,D_1}^+, A_{v,D_1}^- 表示 $A(D_1)$ 中对应的弧集)，即 φ_1 是 G_1 的一个流，G_1 是从 G 通过加倍每条边所得的图. 而 G_1 中对应于 φ_1 的一个值–真途径 W_1 等价于 G 中一条在一个方向用每条边恰好 $\varphi(e)+n$ 次，在另一个方向用每条边恰好 $n-\varphi(e)$ 次的闭覆盖途径. 这样，e 恰好被用 $2n$ 次并且在两个可能方向之一至少用 $m+n$ 次 (注意 $\varphi(e)\geqslant m$).

反之，假设 G 有一条用每条边恰好 $2n$ 次，并且在两个可能的方向之一用每条边至少 $m+n$ 次的闭覆盖途径 W，如用 $\varphi_1(e) \geqslant m+n$ 次. 记 $2n-\varphi_1(e)=\varphi_2(e)$，并且对 $e=xy$，令 $a_{e,1}=(x,y)$，$a_{e,2}=(y,x)$，假定 e 从 x 到 y 被用 $\varphi_1(e)$ 次，则对

$$D_\varphi := V(G) \cup \{a_{e,1}, a_{e,2} \mid e \in E(G)\}$$

有等式

$$\varphi(A^+_{v,D_\varphi}) = \varphi(A^-_{v,D_\varphi}), \quad v \in V(G)$$

(其中 $\varphi(a_{e,i}) := \varphi_i(e)(i=1,2)$). 这是因为 W 对应于 D_φ 中的一条闭途径 W_φ 用每条弧 $a_{e,i}$ 恰好 $\varphi_i(e)(i=1,2)$ 次. 注意 $\varphi_2(e) < \varphi_1(e)$，并且定义

$$D_0 := D_\varphi - \{a_{e,2} \mid e \in E(G)\}\ ,$$

$$\varphi_0(e) := \frac{1}{2}(\varphi_1(e) - \varphi_2(e)), \quad e \in E(G)$$

(注意 $\varphi_1(e) - \varphi_2(e) = 2(n-\varphi_2(e)) = 2(\varphi_1(e)-n)$)，我们仍然有

$$\varphi_0(A^+_{v,D_0}) = \varphi_0(A^-_{v,D_0}),$$

即因为 D_0 是 G 对应于 φ_0 的一个定向，并且因为 φ_0 满足

$$0 < m \leqslant \varphi_1(e) - n = \varphi_0(e) = \frac{1}{2}(\varphi_1(e)-\varphi_2(e)) \leqslant \frac{1}{2}(2n-0) = n\ ,$$

故 φ_0 是 G 中一个处处不为零的流，即 φ_0 是 G 中的一个 $[m,n]$- 流. 命题 8.58 证毕.

一种不同类型的处处不为零的流在 [BOUC83b] 中被研究. 假设对一个图 G，给定两个映射

$$\psi : E^*(G) \to \{+1,-1\} \quad 和 \quad \varphi : E(G) \to \mathbb{Z}\ ,$$

ψ 称为 $E^*(G)$ 的元素的一个**记号**或**双向**. 具有记号 ψ 的图 G 称为一个**双向图**. 设

$$A^+_{v,\psi} := \{e(v) \in E^*_v \mid \psi(e(v)) = +1\}\ ,$$

类似地，定义 $A^-_{v,\psi}$，并且如果对每个 $v \in V(G)$ (我们令 $\varphi(e(v)) = \varphi(e)$)，

$$\varphi(A^+_{v,\psi}) = \varphi(A^-_{v,\psi})\ ,$$

称 (φ,ψ) 是一个**双向流**.

用 (处处不为零的) k- 流的定义，类似地，定义双向 (处处不为零的) k- 流. 注意一个记号能够解释为半边 $e(v)(v \in V(G))$ 的一个定向，因此，若 $\psi(e(v)) = 1$，用 $a_e(v) \in (A^*_v)^+$ 代替 $e(v)$，若 $\psi(e(v)) = -1$，用 $a_e(v) \in (A^*_v)^-$ 代替 $e(v)$. 特

别地，如果用 $\operatorname{sgn}(e) := -\psi(e(x))\psi(e(y))$ 定义的**边** $e = xy$ **的符号** 满足对每个 $e \in E(G)$，$\operatorname{sgn}(e) = +1$，则上面的解释对应于定义 G 的一个定向，并且双向流 (φ, ψ) 变成 G 的对应定向中的一个流.

在 [BOUC83b] 中已经注意到在一个具有记号 ψ 的图 G 中，尽管 G 本身是无桥的，可以存在一条边 e，使对 G 的每一个双定向流 (φ, ψ) 有 $\varphi(e) = 0$ (注意有桥的图没有处处不为零的流，而至少有一条边的无桥图有处处不为零的 6- 流). 这种类型的一条边称为**符号图的地峡边**，并且它一定要与 G 的桥区别开来 (在鲍奇特的记号中桥 = 地峡边). 事实上，下面的结论成立 [BOUC83b, 2.4 引理].

引理 8.59 如果 G 是双向的，并且对每个 $e \in E(G) - \{f\}$，$\operatorname{sgn}(e) = +1$，同时 $\operatorname{sgn}(f) = -1$，则 f 是一个符号图的地峡边.

证明 回顾上面只有正号边的记号的解释，我们变换 G 为一个只有正号边的图. 为了做到这一点，设 G_1 和 G_2 是 $G - f$ 的同构副本，记 $f = xy$ (可能 $x = y$)，并且令

$$H := G_1 \cup G_2 \cup \{x_1x_2, y_1y_2\}\ ,$$

其中 x_i 和 y_i 分别是 G_i 对应于 x 和 y 的顶点，$i = 1, 2$. 记 $f_1 = x_1x_2$，$f_2 = y_1y_2$，并且设 $e_i' \in E^*(G_i)$ 表示对应于 $e' \in E^*(G-f)$ 的半边. 定义 $\psi_H : E^*(H) \to \{+1, -1\}$，对于 $i = 1, 2$，使得

$$\psi_H(e_i') = (-1)^{i-1}\psi(e')\ ,$$

$$\psi_H(f_1(x_i)) = (-1)^{i-1}\psi(f(x))\ ,$$

$$\psi_H(f_2(y_i)) = (-1)^{i-1}\psi(f(y))\ .$$

这样对每个 $e \in E(H)$，$\operatorname{sgn}(e) = +1$，并且 H 有一个定向 D，使如果 $\psi_H(e(v)) = +1$，则 $a_e(v) \in (A_v^*)^+$; 如果 $\psi_H(e(v)) = -1$，则 $a_e(v) \in (A_v^*)^-$，其中 $e \in E_v \subseteq E(H)$. 然而，或者 $S = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$，或者 $S = \{(x_2, x_1), (y_2, y_1)\}$ 是 D 的一个弧割. 因此，假定 G 中存在一个处处不零的双向流 (φ, ψ)，能把这个流转化为 H 中的一个双向的处处不为零的流 (φ_H, ψ_H)，这只需要定义

$$\varphi_H(e_i) = \varphi(e), \quad e \in E(G),\ i = 1, 2\ .$$

然而，这等价于说，H 有一个处处不为零的流，即 φ_H，其中 D 是 H 对应于 φ_H 的一个定向①.

然而，对 $X = V(G_1)$，$Y = V(G_2) = V(H) - V(G_1)$，我们有

① $\varphi(e) < 0$ 对某个 $e = uw \in E(G)$ 可以成立的事实无关紧要. 因为如果我们用 $-\psi(e(u)), -\psi(e(w))$ 代替 $\psi(e(u)), \psi(e(w))$，并且用 $-\varphi(e)$ 代替 $\varphi(e)$，引理的假设仍然成立，并且我们仍有一个处处不为零的双向流.

$$\varphi_H(A^+(X,Y)) \cdot \varphi_H(A^-(X,Y)) = 0 ,$$

即 $\varphi_H(A^+(X,Y)) \neq \varphi_H(A^-(X,Y))$，这与 φ_H 是 H 的一个流的假设矛盾. 因此，G 没有处处不为零的双向流. 引理得证.

另一方面，如果 G 没有符号图的地峡边，那么处处不为零的双定向流的存在性是有保证的. 这从 [BOUC83b, 4.3 定理] 可得，我们叙述它而不给予证明.

定理 8.60　如果 G 是一个没有符号图的地峡边的双向图，则 G 有一个处处不为零的双向 216- 流.

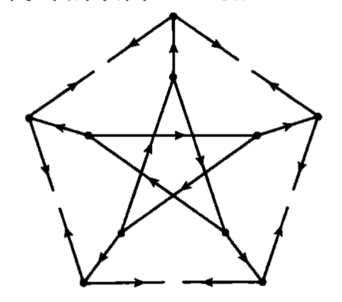


图 8.10　彼特森图的一个双向有处处不为零的 6- 流，但没有这样的 5- 流. 如果对应边的符号是正的，记号 ψ 分别用半弧和弧表示

事实上，鲍奇特猜想 216 可改为 6，通过图 8.10 [=BOUC83b, 图 2] 中所显示的具有双向的 P_5 没有双向的处处不为零的 5- 流这一事实，说明在鲍奇特猜想中值 6 是最好的可能. 我们注意到福格特 (J.L. Fouquet) 在 [FOUQ84b] 中用 103 替换 216 改进了定理 8.60. 对于多种图类，他得到了甚至更好的上界. 而兹卡 (O. Zýka) 近来证明了 216 可以用 30 替换，[ZÝKA88a]，而克海拉帝 (A. Khelladi) 证明了鲍奇特猜想对某类 3- 连通图是成立的，他还证明在某些附加的结构假设下，216 可以用 18 替换 [KHEL87a, 89a].

最后通过讨论两篇文章结束本节. 首先 [BANG80a] 讨论了特殊类型的正整数流，记 $q = q_G$.

定义 8.61　a) 如果一个流 $\varphi : E(G) \to \mathbb{N}$ 是一个内射，即当 $e \neq f$ 时有 $\varphi(e) \neq \varphi(f)$，则称流 φ 为一个**有向标数**. 如果 $1 \leqslant \varphi(e) \leqslant q$，$e \in E(G)$，则称一个有向标数 φ 为一个**守恒流**. 如果一个守恒流有一个 G 的对应的欧拉定向，则称它是**欧拉守恒的**. 相应地，如果一个图有 (欧拉) 守恒流，我们说它是一个 (欧拉) 守恒图.

b) 如果存在一个内射 $\varphi_V : V(G) \to \{0, \cdots, q\}$，使得对每个 $e = xy \in E(G)$，用 $\varphi_g(e) = |\varphi_V(x) - \varphi_V(y)|$ 定义的 $\varphi_g : E(G) \to \{1, \cdots, q\}$ 是一个双射，则称图 G 是**优美的**. φ_g 称为 G 的一个**优美标号**.

优美图是 20 世纪 70 年代以来所研究的一个重要课题，而守恒图似乎引起的注意较少 ([BANG80a] 的一个拓扑应用见 [WHIA80a]. 注意一个优美图总是简单图，而这不适用于守恒图.

讨论守恒图的起点是 [BANG80a, 定理 1.1][①].

① 在这篇文章中，作者事先假设了 G 是连通的，一方面，这个假设实际上不是必要的；另一方面，它也不失去一般性.

定理 8.62 对于一个连通图 G，下面的结论等价:

1) G 是 3- 边连通的;

2) G 有一个有向标数.

证明概要 因为一个有桥的图无论如何没有处处不为零的 k- 流，因此，$\lambda(G) \geqslant 2$. 然而，如果 $S=\{e,f\}$ 是 G 的一个边割，则对 G 的每个流 φ 有 $\varphi(e)=\varphi(f)$，因此，$\lambda(G)>2$ 是存在一个有向标数的必要条件. 考虑 G 的一个强连通定向 (见引理 3.22)，则对每个 $e,f \in E(G)$，存在一个圈 $C \subset D$，使得虽然 $\{a_e,a_f\} \cap A(C) \neq \varnothing$ 仍有 $\{a_e,a_f\} \not\subset A(C)$ (这从 $\lambda(G)>2$ 可得). 用 D 中含 a 的圈数给 D 的每条弧 a 标号，得到 D 的一个流 φ_0. 如果 $\varphi_0(a_1)=\varphi_0(a_2)$，$a_1,a_2 \in A(D)$，则找到一个圈 C，使得 $a_1 \in A(C)$，$a_2 \notin A(C)$. 如果 $a \notin A(C)$，定义 $\varphi_1(a)=\varphi_0(a)$; 否则，定义 $\varphi_1(a)=\varphi_0(a)+\max\{\varphi_0(b) \mid b \in A(D)\}$. φ_1 是 D 的一个流并且 $\varphi_1(a_1) \neq \varphi_1(a_2)$. 继续这个程序，直到某个 $k \geqslant 0$，对 D 的任一对不同的弧 a_1,a_2 有 $\varphi_k(a_1) \neq \varphi_k(a_2)$ 成立.

正如在流的一般情况，定理 8.62 导出了求

$$\mu(G,\varphi_d) := \min_{\varphi_d} \max_{e \in E(G)} \varphi_d(e)$$

的问题，其中 φ_d 是 3- 边连通图 G 的任意一个有向标数. 看起来这个问题在一般情况下还没有被研究. 寻找守恒图等价于确定 $\mu(G,\varphi_d)=q_G$ 的图 G. 引文中的两个主要结果综合在下面的定理中 (见 [BANG80a, 定理 1.6, 定理 1.7, 定理 3.2]).

定理 8.63 对于任意整数 $m \geqslant 2$，$n \geqslant 2$，如果 $G=K_{2n+1}$ 或 $G=K_{2n}$，或 $G=K_{2m,2n}$，则 G 是守恒图.

与定理 8.63 对照，我们有下面关于优美图的结果 [KOTZ78b]①.

定理 8.63a 设 G 是一个有 $c(G)$ 个分支的简单 d- 正则图，它的所有分支都是完全图. G 是优美的当且仅当 $G \in \{K_1,K_2,K_3,K_4\}$.

定理 8.63 的证明根据下面的观察和特殊边标号: ① 如果 G 是一个守恒图和一个欧拉守恒图的边不相交的并，那么它也是守恒的; ② 如果 G 可分解为两个哈密顿圈 H_1 和 H_2，那么它是守恒的 (从 $v_0 \in V(G)$ 开始，用 $1,3,\cdots,2p_G-1$ 按升序标 H_1 的边，并且在 H_2 中用 $2,4,\cdots,2p_G$ 按降序标 H_2 的边，其中 $v_0,\cdots,v_{p_G-1}$ 是 H_1 中的顶点的序); ③ 如果 p_G 是奇的，并且 G 有一个哈密顿圈分解 H_1,H_2,H_3，那么 G 是守恒的 (从 v_0 开始，用 $3,9,15,\cdots,3p_G,6,12,\cdots,3(p_G-1)$ 标 H_3 的边，并且按降序用模 3 等于 1 的整数标 $H_i(i=1,2)$ 的边，若 $i=1$，则从 v_0 开始用 $3p_G-2$ 标号; 若 $i=2$，则从 $v_{(p_G-1)/2}$ 开始用 $3p_G-1$ 标号，并且其中 G 的顶点在 H_3 中按次序 $v_0,v_1,\cdots,v_{p_G-1}$ 出现); ④ K_{2n+1} 是边不相交的哈密顿圈的并 (见定

① 科特齐格和特乔 (I. Turgeon) 用 β- 值代替“优美标号”，而 β- 值是罗莎 (A. Rosa) 最初研究优美图时提出来的.

理 3.50)；⑤ $K_{4,4}, K_{4,6}, K_{6,6}$ 是欧拉守恒的；⑥ $K_{2m,2n}(m, n \geqslant 2)$ 能够被分解成子图 $H \in \{K_{4,4}, H_{4,6}, H_{6,6}\}$；⑦ 轮 W_m 是守恒的. 根据①~⑦和下面的定理 8.64 不难得到定理 8.63 的一个确切的证明. 我们留下它作为一个练习. 注意证明 K_{2n} 是守恒的要用到⑦: 因为 K_{2n} 是 $(K_{2n-1} - H_1)$ 和 W_{2n} 的边不交的并，其中 H_1 是 K_{2n-1} 分解为 $n-1$ 个哈密顿圈中的一个元素. W_m 是守恒的事实从平面图的一个更一般的结果可得到.

定理 8.64([BANG80a, 定理 3.1])　对于任意平面图 G，如果 G 是优美的，则它的对偶 $G^* := D(G)$ 是守恒的.

证明　考虑将 G 和 G^* 用这样一种方法嵌入在平面上，使元素 $v_F \in V(G^*)$ 位于 G 的对应面 F 上，并且 $v_F v_{F'} \in E(G^*)$ 与对应的边 $e_{F,F'} \in \mathrm{bd}(F) \cap \mathrm{bd}(F') \subseteq G$ 相交.

定义 $\varphi_c : E(G^*) \to \{1, \cdots, q\}$，使得

$$\varphi_c(v_F v_{F'}) = \varphi_g(e_{F,F'}) ,$$

其中 φ_g 是 G 的优美标号，具有基础标号 $\varphi_V : V(G) \to \{0, \cdots, q\}$.

现在给 G^* 定向，如果 $\varphi_V(y) > \varphi_V(x)$，用 $(v_F, v_{F'})$ 代替 $v_F v_{F'}$，其中 $e_{v_F, v_{F'}} = xy$，并且假定当人们从 v_F 到 $v_{F'}$ 时，y 在 $v_F v_{F'}$ 的右边. 用 D^* 表示这样得到的 G^* 的定向. 为了完成证明，只要对每个 $v \in V(G^*) = V(D^*)$，$\mathrm{diff}_{\varphi_c}(v) = 0$ 就足够了，其中 φ_c 用明显的方法定义在 $A(D^*)$ 上.

考虑沿着 $\mathrm{bd}(F)$ 的最短闭途径，其中 F 是 G 的对应于任意但固定的 $v \in V(G^*)$ 的面. 记 W 为一个顶点序列，

$$W = w_1, w_2, \cdots, w_{k+1} ,$$

其中 $w_{k+1} = w_1$，则我们有

$$\sum_{i=1}^{k} (\varphi_V(w_{i+1}) - \varphi_V(w_i)) = 0 = \sum_{i=1}^{k} \varphi_g(w_{i+1 w_i}) \cdot \sigma_{i+1,i} ,$$

其中

$$\sigma_{i+1,i} = \begin{cases} +1, & \varphi_V(w_{i+1}) > \varphi_V(w_i), \\ -1, & \varphi_V(w_{i+1}) < \varphi_V(w_i). \end{cases}$$

这样由定义

$$\mathrm{diff}_{\varphi_c}(v) = \varphi_c(A_v^+) - \varphi_c(A_v^-) = \left| \sum_{\sigma_{i+1,i}=1} \varphi_g(w_{i+1} w_i) - \sum_{\sigma_{i+1,i}=-1} \varphi_g(w_{i+1,i}) \right| = 0 .$$

定理证毕.

因为 W_m 是自对偶的和优美的，因此，W_m 是守恒的 ([FRUC79a], [HOED78a]).

我们注意对 $e = xy \in E(G)$ 用 $\varphi'(e) = \varphi_V(y) - \varphi_V(x)$ 给出的边标号 $\varphi' : E(G) \to \mathbb{Z}$ 定义了 G 中对应于由 φ_V 确定的位势的一个张力. 这样，在平面图的情况下，张力和流之间的对偶性看起来对应于优美图和守恒图之间的一个对偶性. 然而，[BANG80a] 的作者引用了一个守恒、自对偶，但不是优美图的例子. 此外，他们还确定了不守恒的一些图类. 然而，如果 G 是由一个圈加上一条弦所构成的图，则它是优美的 [DELO80a]. 最后，连通欧拉图 G 是优美的仅当 $q_G \equiv 0 \pmod 4$ 或 $q_G \equiv 3 \pmod 4$[GOLO72a]. [BODE76a, BODE77a] 中证明了这个条件，在两个仅有一个公共顶点的圈组成的图中也是充分的. 在本书的参考文献中还可以找到关于优美图及有关专题的另外一些参考书目. 为了将它们与所列的文献区别开来，把它们用星号标出.

没有偶顶点的图 G 的 1- 因子和 G 中某些闭覆盖途径之间的对应在 [KALU77a] 中已建立了. 如果一个图能记为 $E(H) = \{xy\} \cup E_x \cup E_y (x \neq y)$，则称 H 为一个**双星**，并且称 xy 为 H 的**轴**. 注意一个双星可以有环、重边甚至三角形. 一个双星图 $H \subset G$，如果 $d_H(x) = \frac{1}{2}(d_G(x)+1)$，$d_H(y) = \frac{1}{2}(d_G(y)+1)$，其中 xy 是 H 的轴，则称 H 为**二分的**. 下面的定理成立 ([KALU77a, Satz 1] 中允许重边是不正确的，这能通过加倍一个 6- 边形的一个 1- 因子的边看出).

定理 8.65 设 G 是一个没有偶顶点的简单图，G 有 1- 因子当且仅当它能分解成二分双星. 这些双星的轴构成一个 1- 因子, 并且这样一个分解中有一个 1- 因子的边是这些双星的轴①.

定理 8.65 的证明依赖于下面的事实.

1) 对于 G 的任一个 1- 因子 F，$G-F$ 是欧拉的. 考虑 $G-F$ 的一个欧拉定向 D，并且对 $xy \in F$，定义 $H_{xy} := \{xy\} \cup E_x^+ \cup E_y^+$，其中 $E_z^+ = \{uz \in E(G) \mid (z,u) \in A_z^+ \subset A(D)\} (z \in \{x,y\})$，得到了所需要的分解.

2) 在分解成的二分双星中，没有两个轴是相邻的.

然而，考虑 1)，我们能导出下面的结果 (见 [KALU77a, Satz 2'] 和命题 8.66 后面的讨论). 它的证明很容易通过应用分裂引理导出，因此，证明略去.

命题 8.66 设 G 是一个连通图，$\delta(G) > 1$，并且设 $E_0 \subseteq E(G)$，使得对每个 $xy \in E_0$ 有 $d_G(x) = d_G(y)$，则 E_0 是一个 1- 因子当且仅当 G 有一个闭覆盖途径 W (偶长)，使得 E_0 的边和 $E_1 := E(G) - E_0$ 的边在 W 中交错出现，并且 W 经过每个 $e \in E_1$ 恰好一次，同时经过每个 $f \in E_0$ 恰好 $\frac{1}{2}d_G(f) - 1$ 次 (注意由假设，对 $f \in E_0$，$d_G(f) \equiv 0 \pmod 2$).

① 分解一个图为双星这个问题的一个变种在 [DEAN88a] 中已讨论. 定理 8.65 的一个特殊情况在 [JAEG83d] 中被证明了.

然而，即使对每个 $xy \in E_0$，$d_G(x) = d_G(y) = 1 \pmod 2$，$W$ 经过某 $f \in E_0$ 在一个方向比另一个方向更多是完全可能的 (只要考虑两个顶点的 3- 正则无环图即可)，即 W 可能不是其边标号 φ 满足 $\varphi: E(G) \to \{0,1\}$ 的值–真途径.

在定义 E_0 的 $2s_p$ - 边 (即 W 恰好用 $2s_p$ 次的边) 中的不准确性引出了使 [KALU77a, Satz 2′:(1)] 是错误的一个解释.

它声称一个有闭覆盖途径 W (偶长) 的无环图，若 W 交错用 $E_0 \subset E(G)$ 和 $E_1 := E(G) - E_0$ 的边，并且用 E_1 的每条边一次，用 $f \in E_0$ 的边 $2s_f(s_f \in \mathbb{N})$ 次，则这个图有 E_0 作为 1- 因子 (s_f 可变化). 首先从卡鲁兹 (Kaluza) 的论证易见 G 没有偶顶点. 但是图 8.11 中，9- 正则图的讨论说明了甚至在这种情况下，Satz 2':(1) 仍然不成立. 然而，如果假定对 $f = xy \in E_0$，数 $2s_f$ 满足方程 $2s_f = d_G(x) - 1 = d_G(y) - 1 = \frac{1}{2}d_G(f) - 1$ (见命题 8.66)①，则 Satz 2':(1) 在任意情况下能够成立. 事实上，这似乎已被指出 (见 [KALU77a, Satz 2]).

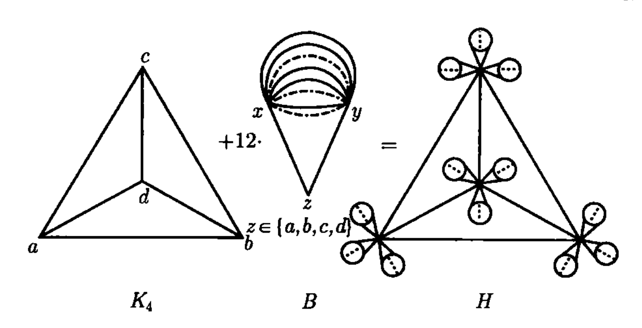


图 8.11 用正式方法记 $H = K_4 + 12B$ 为 9- 正则图 H，其中在每个 $z \in \{a,b,c,d\} = V(K_4)$ 上附上 B 的三个副本，$E_0 \subset E(H)$ 是由 $E(K_4)$ 和形如 xy 的 36 条边组成，其中从 B 的每个副本取三条边. H 有一个闭覆盖途径 W 用每一条 $e \in E_1 := E(H) - E_0$ 恰好一次，用每个 $f \in E_0$ 恰好两次，并且使 E_0 的边和 E_1 的边在 W 中交替出现

把证明存在具有图 8.11 的文字说明中所描述性质的 W 作为一个练习. 注意甚至能够得到 W，使除了 K_4 的 1- 因子 L 外，E_0 的所有元素只用一个方向，我们断定 H 含有一个 6- 正则子图 $H_1 := (K_4 - L) + 8 \cdot (B - 3 \cdot \{xy\})$，其中恰好有两条形如 xy 的边属于 $E(H) - E_0$，而且第 3 条属于 E_0. 这样 $E_0^1 := E(H_1) \cap E_0$ 由 $4 + 2 \cdot 8 = 20$ 条边组成. H_1 有一个处处不为零的 3- 流 φ_1，使得若 $e \in E_0^1$，则 $\varphi_1(e) = 2$; 否则，$\varphi_1(e) = 1$，即 H_1 有一个值–真途径 W_1 在同一个方向用每条边 $e \in E_0^1$ 恰好两次并且在另一个方向不用，同时用每条边 $e \in E(H_1) - E_0^1$ 恰好一次

① 在这种情况 (由 Satz 2':(1) 的证明建议) 下立即有 E_0 是覆盖 $V(G)$ 的独立边集，即 E_0 是一个 1- 因子.

(即 W_1 有如同卡鲁兹称它为的"单向性质"). 然而 H_1 不是二部图，因此，它是 [KALU77a, Satz 3] 的一个反例，除非 G 没有偶顶点.

然而，如果考虑在简单连通 3- 正则 2- 部图 G 中的一个处处不为零的 3- 流 (见定理 8.21)，并且如果 $p_G \equiv 0 \pmod 6$，$p_G = 2k > 14$，能构造一个具有处处不为零的 3- 流的非 2- 部的 9- 正则图 H. 我们给出构造法的一个粗略描述. 首先，因为 $d_B(x) = k - 3$ 且 $k \geqslant 8$，G 的 2- 部补图 B 有一个哈密顿圈 C (见推论 3.76). 根据 C 中顶点在圈上的次序用 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_k, b_k$ 表示 C 的顶点，并且等同 G 中三个两两不邻接的顶点 $a_{3i+1}, b_{3i+1}, a_{3i+2}$. 对 G 中两两不相邻接的顶点 $b_{3i+2}, a_{3(i+1)}, b_{3(i+1)} (0 \leqslant i \leqslant \frac{1}{3}k - 1)$ 做同样的事情 (因为 $2k = p_G \equiv 0 \pmod 6$，故 $\frac{1}{3}k \in \mathbb{N}$). 这样所得到的 H 是 9- 正则无环图，并且在 H 中 φ 导出一个处处不为零的 3- 流 φ_H (为了得到对应于 φ_H 的 D_H，在 G 对应于 φ 的定向 D 中执行同样的等同程序). 相应地，G 中由 φ 导出的值–真途径 W 对应于 H 中由 φ 导出的值–真途径 W_H. 可是 H 不是二部图. 这直接从下面的事实导出 (也见定理 3.47)：$G_{\{a_1,b_1,a_2\}}$ 不是二部的，这是因为

(i) G 是 2- 连通的[①]，这样 G 有一个含 a_1 和 b_1 的圈;

(ii) a_1, b_1, a_2 是独立顶点蕴涵 C 中连接 a_1 和 b_1，但不含 a_2 的路对应于 $G_{\{a_1,b_1,a_2\}}$ 中的奇圈;

(iii) 等同非二部图中的独立顶点得到一个非二部图;

(iv) 从 G 构造 H 可解释为执行一系列的收缩，在每一步对应的三个顶点是独立的，这样 H 无环，但可以有重边.

于是 H 是 9- 正则的、非二部的、无环的，并且有一个处处不为零的 3- 流. 这样 H 是 [KALU77a, Satz3] 的一个反例[②]. 不过如果人们像 Satz 2':(1) 的情况一样解释数 $2s_f$，那么这个 Satz 3 仍然有效.

8.3 中国邮递员问题

至此，我们已经研究了图中满足某些条件的闭覆盖途径 W，如

a) W 在每一个方向用每条边恰好一次 (双有向双迹);

b) W 总在同一方向用每条边 (处处不为零的流，值–真途径).

但是，如果我们的目标是如何尽可能快地通过整个图 (有向图、混合图) 又会如何? 即给出一个连通图 G，找 G 的一个有最小长度的闭覆盖途径 W. 事实上，

① G 是 3- 正则 2- 部图蕴涵它是可 1- 因子化的，这样它不能有桥.

② 然而，我们注意那篇文章的 Satz 2 仍然有效，尽管它的有效性不再能从 Satz 2' 导出，除非 ……(见上面).

这是**中国邮递员问题** (CPP) 的原始描述 (见 [GUAN62a]). 这样的一条途径 W 称为一条**邮递员环游** (PT). 研究这个问题的思想产在 20 世纪 50 年代末，当时管梅谷 (Guan Meigu) (以前翻译也译为 Kwan Mei-Ko) 研究了下面的问题:“*一个邮递员回到邮局之前必须走遍分配给他的所有区域. 这个问题是找一条对邮递员来说最短距离的途径*”(引自[GUAN62a, §1]).

由于中国邮递员问题这个名字，在世界范围内，管梅谷的同事都称他为“中国邮递员”. 事实上，CPP 已成为今天运筹学中著名的课题之一，因此，我们将分别用图、有向图、混合图的术语讨论 CPP.

8.3.1　关于图上的中国邮递员问题

显然，因为连通图 G 有一条闭覆盖途径用每条边恰好两次 (推论 5.8 和推论 5.9)，故 CPP 不是一存在性问题，而是一个关于这个邮递员环游的那些闭覆盖途径的刻画问题，和用一个尽可能有效的方法寻找一条 PT 的算法问题.

尽管 CPP 最初的描述只用于没有标号的图，但现在我们将考虑带有价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的图 G，$c(e)$ 可看成边 $e = xy$ 的“长度”或沿着 e 从 x 到 y 所需的时间，或者沿着 e 从 x 到 y 开车所需的费用 …… 对 $H \subseteq G$ 和 G 中的边序列 $W = e_1, e_2, \cdots, e_r$，定义

$$c(H) := \sum_{e \in E(H)} c(e), \quad c(W) := \sum_{i=1}^{r} c(e_i)\ .$$

这样(一般地) CPP就是要求 G 中的一条闭覆盖途径 W，使得 $c(W)$ 最小，并且在这一条件下，若 $c(e) = 0$，则 $\lambda_W(e) \leqslant 2$，并且每个满足 $c(K) = 0$ 的圈 K 至少含一条在 W 中恰好出现一次的边 e (CPP) (第二个条件考虑到 $c(e) = 0$ 的情况).

在这种情况下，我们也称邮递员环游为 PT 或 PT(G). 下面的结果原则上在 [GUAN62a, §3，§4] 和 [GOOM73a, 定理 2] 中已经证明了 (在那里总假定对每个 $e \in E(G)$ 有 $c(e) = 1$).

定理 8.67　在具有价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{v\}$ 的 (连通) 图中一条闭覆盖途径 W 是一条邮递员环游当且仅当 W 满足下面条件:

1) 对每个 $e \in E(G)$ 有 $1 \leqslant \lambda_W(e) \leqslant 2$;

2) 对每个圈 $C \subseteq G$ 有 $c(H \cap C) \leqslant \dfrac{1}{2}c(C)$，其中 $H = \langle \{e \in E(G) \mid \lambda_W(e) = 2\} \rangle$;

3) 若 $C \subseteq G$ 是满足 $e(C) = 0$ 的圈，则 $C \cap H \neq C$.

证明　必要性. 假设 W 是一个 PT，对每条边 $e = xy \in E(G)$，恰好增加 $\lambda_W(e) - 1$ 条连接 x 和 y 的边将 G 变为 G 的一个母图 G^+. 因此，W 变换为 G^+ 的一条欧拉迹 T^+，即 G^+ 是欧拉的. 通过对增加的 $\lambda_W(e) - 1$ 条边中的每一条指定同样的值 $c(e)$，这样就将价格函数扩充到 $E(G^+)$，因此，

$$c(G^+) = c(T^+) = c(W) \ .$$

如果对任意的 $e = xy \in E(G)$ 有 $\lambda_W(e) > 2$，则在 G^+ 中从 $\lambda_W(e) - 1$ 条增加的边中删去两条得到一个连通的欧拉图 H^+，我们有 $G \subseteq H^+ \subset G^+$. 对 H^+ 的每一条欧拉迹 T，我们有

$$c(H^+) = c(T) \leqslant c(T^+) = c(W) \ . \tag{1}$$

因为 T 对应于 G 中的一条闭途径 W' 满足 $c(W') = c(T)$，并且 W 是一个 PT，(1) 中等式必定成立，故 $c(e) = 0$. 然而，这及 $\lambda_W(e) > 2$ 与 CPP 的第二部分陈述矛盾. 因此，对每个 $e \in E(G)$，$\lambda_W(e) \leqslant 2$，即 W 满足条件 1). 又因为 W 是一个 PT，由定义知，如果 $C \subseteq G$ 是一个满足 $c(C) = 0$ 的圈，则 $C \subseteq H$ 是不可能的，即 W 满足条件 3).

现在假设对 $H = \langle\{e \in E(G) \mid \lambda_W(e) = 2\}\rangle$ 和某个圈 $C \subseteq G$ 有

$$c(H \cap C) > c(C - H \cap C) \ . \tag{2}$$

如上构造 G^+ 并且定义 H_1，使得

$$E(H_1) := (E(H) - E(H \cap C)) \cup (E(C) - E(H \cap C)) \tag{3}$$

(注意 $e \in E(C) - E(H \cap C)$ 蕴涵 $\lambda_W(e) = 1$). 从 G 通过对 $E(H_1)$ 的每个元素引进一条附加的边，这样就构造出 $G_1^+ \supseteq G$. G_1^+ 是连通的，并且由 (3)，它也是欧拉的. 用上面的方法扩充价格函数 c 到 $E(G_1^+)$. G_1^+ 有一条对应于 G 的闭覆盖途径 W_1 的欧拉迹 T_1，并且

$$c(G_1^+) = c(T_1) = c(W_1) = c(W) - c(H \cap C) + c(C - H \cap C) \ .$$

因此，由 (2) 得出

$$c(W_1) < c(W) \ ,$$

这与 W 是一个 PT 矛盾. 于是我们必有

$$2c(H \cap C) \leqslant c(C - H \cap C) + c(H \cap C) = c(C) \ ,$$

即对每个圈 $C \subseteq G$ 有

$$c(H \cap C) \leqslant \frac{1}{2} c(C) \ ,$$

也就是说，W 也满足条件 2).

充分性. 设 W 是任意固定的 PT，而 W' 是 G 中满足定理三个条件的一条闭覆盖途径，我们需要证明 $c(W)=c(W')$. 考虑 H 和对应定义的 H'，从这些图的定义及 W 和 W' 是闭覆盖途径可得

$$d_H(v)\equiv d_{H'}(v)\equiv d_G(v)\ (\mathrm{mod}\ 2),\quad v\in V(G)\ . \tag{4}$$

这样，$H_0=(H\cup H')-(H\cap H')$ 是欧拉的. 由定理 4.1，H_0 有一个圈分解 S_0 (可能 $S_0=\varnothing$). 注意

$$c(W)=c(G)+c(H)=c(G)+c(H\cap H')+\sum_{C\in S_0}c(H\cap C)\ ,$$

$$c(W')=c(G)+c(H')=c(G)+c(H\cap H')+\sum_{C\in S_0}c(H'\cap C)\ .$$

从 W 是一个 PT 的事实得出

$$c(W)-c(W')=\sum_{C\in S_0}(c(H\cap C)-c(H'\cap C))\leqslant 0\ . \tag{5}$$

现在假定 $c(W)\neq c(W')$，从而 (5) 是严格的不等式，即对某个 $C_0\in S_0$ 有

$$c(H\cap C_0)<c(H'\cap C_0)\ . \tag{6}$$

然而，由 H_0 的定义，

$$c(C_0)=c(H\cap C_0)+c(H'\cap C_0)\ . \tag{7}$$

这样从 (6) 和 (7) 我们得到

$$\frac{1}{2}c(C_0)<c(H'\cap C_0),$$

即 W' 对 $C_0\in S_0$ 破坏了条件 2)，这个矛盾就证明了 $c(W)=c(W')$，进而条件 3) 保证满足 $c(K)=0$ 的圈 K 含某一个 e，使得 $\lambda_{W'}(e)=1$，即 W' 是一个 PT. 定理证毕.

虽然定理 8.67 用简单的方式刻画了邮递员环游问题，但是从算法的观点它是不实用的. 这是因为原则上需要用定理中的条件 2) 和 3) 检查 G 的所有圈. 管梅谷自己也意识到这个问题，并证明了当对 G 的闭覆盖途径 W 检查条件 2) 和 3) 时，只检查无弦的圈就足够了 [GUAN62b] (当然，首先必须检查 W 是否满足定理 8.67 的条件 1)). 但是即使限制到只检查无弦的圈，仍然不是解 CPP 问题的好的算法.

尽管刚才叙述了定理 8.67 的一些缺点，但是定理 8.67 已经含有产生这样一个好算法所需要的条件. 为此，对 G 中的邮递员环游 W，让我们考虑定理条件 2) 中所定义的图

$$H=\langle\{e\in E(G)\mid \lambda_W(e)=2\}\rangle$$

和从 G 通过加倍 $E(H)$ 的元素所得的图 G^+. 因为 G^+ 是欧拉的，我们有

$$d_H(v) \equiv d_G(v) \pmod 2, \quad v \in V(G) \tag{4'}$$

(见定理 8.67 证明中的 (4)，并且对 $v \notin V(H)$，定义 $d_H(v) = 0$)，进而因为定理 8.67 中条件 2) 和 3)，H 是无圈的，并且由上面的同余式，H 的奇顶点是 G 的奇顶点. 设这些顶点为 $v_1, \cdots, v_{2k}$. 应用推论 8.47 到 H 的每个分支，我们得到 H 中 k 条边不交的路 $P_1, \cdots, P_k$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_1(P_i) = \{v_1, \cdots, v_{2k}\} .$$

另一方面，像这样应用推论 8.47 不需要知道 H 以找 k 条路 $P_1, \cdots, P_k$，并且如果有这样的 k 条路，则从 G 通过加倍这些路上的边所得图 G_1^+ 是一个满足定理 8.67 的条件 (1) 的连通欧拉图 (但是可能不满足条件 2) 和 3)). 然而，如果知道 H，因为 G^+ 是欧拉的和 W 是一个 PT，从而必有 H 能写为 $H = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$.

推广找 $P_1, \cdots, P_k$ 的这个思想，使得

$$V_{\text{odd}}(G) := \{v \in V(G) \mid d(v) \equiv 1 \pmod 2\} = \bigcup_{i=1}^{k} V_1(P_i) ,$$

我们考虑 $V_{\text{odd}}(G)$ 的任一个分成 k 个 2- 子集的划分 $\Pi_2(V_{\text{odd}})$，并且用 $\mathcal{P}_2(V_{\text{odd}})$ 表示所有这些划分的集合. 对固定的 $\Pi_2 \in \mathcal{P}_2(V_{\text{odd}})$ 和任意的 $\{v_{i_1}, v_{i_2}\} \in \Pi_2$，设 P_{i_1,i_2} 是在 G 中连接 v_{i_1} 和 v_{i_2} 的"最短"路 (用价格函数的术语)，并且记

$$c_{i_1,i_2} = c(P_{i_1,i_2}) .$$

记

$$c(\Pi_2) = \sum_{\{v_{i_1}, v_{i_2}\} \in \Pi_2} c_{i_1,i_2} .$$

用这个记号，我们导出 CPP 解的另一个刻画 (也见 [GOOM73a, 定理 1]，它考虑 $c(e) = 1$，$e \in E(G)$ 的情况).

定理 8.68 *对于具有价格函数 $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ 的连通图 G，求CPP的解的问题等价于求 $\Pi_2^0 \in \mathcal{P}_2(V_{\text{odd}})$，使得*

$$c(\Pi_2^0) = \min\{c(\Pi_2) \mid \Pi_2 \in \mathcal{P}_2(V_{\text{odd}})\} ,$$

即若 W 是 G 的一个 PT，则

$$c(W) = c(G) + c(\Pi_2^0) .$$

定理 8.68 的证明能很容易地从前面的讨论导出，因此，留下作为一个练习. 然而我们注意对应于 Π_2^0 中元素的 k 条路是边不交的，这可由 $c(e) > 0(e \in E(G))$ 及 $c(\Pi_2^0)$ 的极小性得到. 我们也注意 [GOOM73a] 中包含了各种类型的具有特殊价格函数 $c: E(G) \to \{1\}$ 的图的 CPP 的解. 然而，如果定理 8.68 中的价格函数用 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 定义，则 Π_2^0 可能不对应于邮递员环游. 可是通过去掉某些有 $c(e) = 0$ 的边 e，对应于 Π_2^0 的这 k 条路就能变换为对应于 $\Pi_2^1 \in \mathcal{P}_2(V_{\text{odd}})$ 的 k 条边不交的路，使得 $c(\Pi_2^1) = c(\Pi_2^0)$.

最初一看，定理 8.68 似乎不是一个比定理 8.67 本质上更好的邮递员问题的刻画. 因为，一个简单的组合论证说明对 $k \geqslant 4$ 有

$$|\mathcal{P}_2(V_{\text{odd}})| = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1 \geqslant 3^k$$

(练习 8.19)，即如果 G 没有偶顶点，并且 $p := p_G \geqslant 8$，则

$$|\mathcal{P}_2(V(G))| \geqslant 3^{\frac{p}{2}} > (1.7)^p,$$

即在确定 $c(\Pi_2^0)$ 时所考虑的划分数原则上指数地增长①. 不管怎样，定理 8.67 和定理 8.68 能产生下述 PT 的下界和上界 (练习 8.20，也见 [HEDE68a, 命题 5,6] 和 [GOOM73a, 推论 1a,6b]).

推论 8.69　对连通图 G 中的任意邮递员环游 W 和任意价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+$ 有

$$c(G) \leqslant c(W) \leqslant 2c(G)\ ,$$

下界被达到当且仅当 G 是欧拉的，上界被达到当且仅当 G 是一个树.

对于 $c \equiv 1$ 的情况，上界能够在 [WATT79a, KESE87a] 中找到. 可是定理 8.68 指出了正确的方向. 用定理 6.68 之前讨论中所引进的记号，我们可以得到下面的法则.

定理 8.70　设 G 是一个有价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+$ 的连通非欧拉图，并且设 c^* 是 K_{2k} 的价格函数，使得

$$c^*(v_iv_j) = c_{i,j}, \quad v_i, v_j \in V_{\text{odd}}(G) = V(K_{2k})\ . \tag{$\circ$}$$

对 $E_0 \subseteq E(K_{2k})$，定义 $c^*(E_0) = \sum_{e \in E_0} c^*(e)$. G 的一条闭覆盖途径 W 是一个 PT 当且仅当

$$c(W) = c(G) + \min\{c^*(L) \mid L \text{ 是 } K_{2k} \text{ 的一个 1- 因子}\}\ .$$

① 在用动态规划的一个不同的方法中，贝尔曼 (Bellman) 遇到一个为了确定邮递员环游 W 和 $c(W)$ 所需要步数的类似的问题.

定理 8.70 的证明可以从下面的观察得出：划分 $\Pi_2 \in \mathcal{P}_2(V_{\text{odd}})$ 和 K_{2k} 的 1- 因子 L 之间有 1-1 对应性，并且由 $c(\Pi_2)$ 和 c^* 的定义有 $c(\Pi_2) = c^*(L)$.

这样上面的讨论说明了中国邮递员问题可以变换为下面的等价算法形式 (CPP′)，它比原来的叙述 (CPP) 更明显，并且它的思想作为解 (CPP) 的可能方法之一包含在 [EDMO73a] 中 (也见 [CHRI75a, p205]).

1) **Input**：给定具有价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的连通图 G，设 $V_{\text{odd}}(G) = \{v_1, \cdots, v_{2k}\}(k \geqslant 1)$ 表示 G 的奇顶点集合 (见推论 8.69).

2) **SPP** (最短路问题)：决定 $c_{i,j} = \min c(P_{i,j})(1 \leqslant i < j \leqslant 2k)$，其中 $P_{i,j}$ 是 G 中连接 $v_i, v_j \in V_{\text{odd}}(G)$ 的一条任意的路. 只保存一个 $P^*_{i,j}$ 满足 $c_{i,j} = c(P^*_{i,j})(1 \leqslant i < j \leqslant 2k)$.

3) **MMP** (最小权完美匹配问题)：对于 K_{2k} 有 $V(K_{2k}) = V_{\text{odd}}(G)$，并且对满足 $c^*(v_iv_j) = c_{i,j}$ 的 $c^*: E(K_{2k}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，求一个 1- 因子 $L \subseteq E(K_{2k})$，使得 $c^*(L)$ 是极小的.

4) **EUL** (欧拉环游问题)：对每个 $v_iv_j \in L$，在 G 中加倍 $P^*_{i,j}$ 的边①，得到一个连通欧拉图 G^+. 构造 G^+ 的任一条欧拉迹 T^+，并且描述对应于 T^+ 的 G 的一条闭覆盖途径 W. W 是一个 PT.

变换 (CPP) 为 (CPP′) 的思想已经基本上含在注记 [EDMO65b] 中，并且在 [GOOM73a, p27] 中被重述了 (但是只对 $c: E(G) \to \{1\}$ 的情况). 至于基于 (CPP′) 的算法的复杂性，我们注意下面的事实.

SPP. 在 2) 中所述的**最短路问题**能用多项式时间解决. 因为如果应用 Dijkstra 算法，对于一个固定的 $v_i \in V_{\text{odd}}(G)$，我们至多用 $O(p^2)$ 时间不仅得到所有的 $c_{i,j}$ 值，而且也得到对应的路 $P^*_{i,j}(1 \leqslant j \leqslant 2h,\ j \neq i)$ (见 [BOND76a, p17~19]). 这样 SPP 能够至多用 $2kO(p^2) \leqslant O(p^3)$ 时间求解. 这样，建立有价格函数 c^* 的 K_{2k} 和列出上述这些路 $P^*_{i,j}$ 可在多项式时间 $S(p)$ 内完成.

MMP 最小权完美匹配问题 (即在 K_{2k} 中找一个具有最小价格 $c^*(L)$ 的 1- 因子 L) 至多 $O(p^3)$ 时间可解 (定理 3.88c)). 第一个证明 MMP 能用多项式时间可解的人是埃德蒙斯 (J. Edmonds)[EDMO65a] ②，同时，[PAPA82a, 定理 11.3] 含有一个明显的和简明的“赋权匹配算法”，它可以直接求出具有最小 $c^*(L)$ 的 1- 因子 L.

---

① 如我们在上面所注意到的，这 k 条路是两两不相交的，或者至少能通过消去 $c(e) = 0$ 的边 e 变换为这样的路. 不失一般性，同理，我们可以假定这个边消去程序使得 $\langle\{e \in \sum_{v_iv_j \in L} E(P^*_{i,j}) \mid c(e) = 0\}\rangle$ 无圈.

② 实际上，埃德蒙斯在他的文章中没有明显地给出复杂性的研究，而且埃德蒙斯的算法是求最大价格的 1- 因子 L. 可是这不是实际的障碍. 因为如果我们用 $\hat{c}(v_i, v_j) = c(G) - c_{i,j} \geqslant 0$ 定义一个新的价格函数 $\hat{c}$，则我们有 $\hat{c}(L) = k \cdot c(G) - c^*(L)$ 对任意的 1- 因子 $L \subseteq E(K_{2k})$ 成立. 简而言之，找具有最大 $\hat{c}(L)$ 的 L 等价于找具有最小 $c^*(L)$ 的 L.

然而，我们注意到这个算法的发展是基于 [EDMO65a]. 在任何情况下，MMP 是多项式时间 $M(p)$ 可解的 (也见 [LOVÁ86a, 定理 9.21 和 p376])①.

EUL. 因为对应于 L 中元素的路 $P^*_{i,j}$ 能够在上面所列的所有 $P^*_{i,j}$ 中用多项式时间找到，所以 G^+ 能用多项式时间由 G 的构造出来. 我们将在算法一章中见到，G^+ 中的一条欧拉迹 T^+ 能用多项式时间 $E_2(p)$ 找到，其中 T^+ 能用多项式时间 $E_3(p)$ 变换成 W，W 是 G 的一个 PT. 这样，欧拉环游问题能用多项式时间 $E(p) = E_1(p) + E_2(p) + E_3(p)$ 求解.

综合这些讨论，我们可以说中国邮递员问题是用多项式时间 $C(p)$ 可解，其中

$$C(p) = S(p) + M(p) + E(p)\ .$$

事实上，埃德蒙斯和约翰逊 (E.L. Johnson) 在他们的著名论文 [EDMO73a] 中，把中国邮递员问题描述为一个整数规划问题 (**ILP**). 他们从具有价格函数 $c : E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的无环连通图 G 出发，对每条边 $e \in E(G)$ 联系一个变量 x_e，原问题 (CPP) 能表示为下面等价的形式：

$$\begin{cases} \text{求} & x_e \in \{0,1\},\ e \in E(G), \\ \text{使得} & \displaystyle\sum_{e \in E(G)} c(e)x_e\ \text{最小}, \\ \text{满足} & \displaystyle\sum_{e \in E_v} (1 + x_e) \equiv 0 \pmod 2,\ v \in V(G)\ . \end{cases} \qquad (\text{CPP}'')$$

(CPP″) 和 (CPP) 的等价性从下面的事实可得，G 的任意一条邮递员环游 W 对应于满足

$$H = \langle \{e \in E(G) \mid x_e = 1\} \rangle$$

和

$$c(H) = \sum_{e \in E(G)} c(e)x_e = \sum_{e \in E(H)} c(e)x_e$$

的 (CPP″) 解 (其中 H 是用定理 8.67 条件 2) 中的 W 定义的子图)，并且反之亦然 (也注意 $c(W) = c(G) + c(H)$)，进而在 (CPP″) 中的 p 个同余式等价于说从 G 通过加倍 H 的边得到的图 G^+ 是欧拉的②.

① 表示 CPP′ 的同样公式能在 [SERD74a] 中找到. 这篇文章也含有上面概述的**SPP**的讨论. 可是注意 1- 因子是个二部图，通过找一个 $K_{k,k}$ 的最小权 1- 因子的 $O(k^3)$ 算法 (这个算法归于迪尼兹 (E.A. Diniz) 和克伦罗德 (N.A. Kronrod))，赛德加科瓦 (A.I. Serdjukov) 将**MMP**化为求解 K_{2k} 的 $\binom{2k-1}{k-1}$ 个子图 $K_{k,k}$ 的匹配问题. 显然，这个算法是不够的. 可是这篇文章中既没有提到管的工作，也没有提到埃得蒙斯的工作.

② 在 [EDMO73a] 中，x_e 仅需是非负整数，因为作者们后来注意到，如果 $x_e > 1$，则 $c(e) = 0$，并且用 $x_e - 2$ 代替 x_e 也将产生如在那篇文章中所述的 (CPP) 的一个解. 又如，定理 8.67 中所定义的 H 的无圈性对从 (CPP″) 的一个解中导出的 H 可能不成立. 但是如果需要，它能通过消去满足 $c(K) = 0$ 的圈 K 得到.

为了将 (CPP″) 化为如在 [EDMO70a] 中所述的一般匹配问题的一个特殊情况，埃德蒙斯和约翰逊变换 (CPP″) 为另一个等价的形式：从 G 的关联矩阵 $B=[b_{i,j}]$ 开始，设 $d_i \in \{0,1\}$ 是由 $d(v_i)=\sum\limits_{j=1}^{q} b_{i,j} \equiv d_i \pmod 2$ 定义的，并且分别附加变量 w_i 和 x_j 到顶点 v_i 和边 e_j，$1 \leqslant i \leqslant p$，$1 \leqslant j \leqslant q$，使得

$$\begin{cases} (1) \quad w_i \in \mathbb{Z},\ x_j \in \mathbb{Z}, \\ (2) \quad w_i \geqslant 0,\ x_j \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q, \\ (3) \quad \sum\limits_{j=1}^{q} b_{ij}x_j - 2w_i = d_i,\ 1 \leqslant i \leqslant p, \\ (4) \quad z=\sum\limits_{j=1}^{q} c(e_j)x_j \text{ 最小 }. \end{cases} \qquad (\text{CPP}''')$$

为了看出 (CPP″) 的解对应于 (CPP‴) 的解 $x_j \in \{0,1\}$，并且反之也成立，只要注意到

$$\sum_{e_j \in E_{v_i}} (1+x_j) = d(v_i) + \sum_{e_j \in E_{v_i}} x_j = d(v_j) + \sum_{j=1}^{q} b_{ij}x_j,$$

即

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij}x_j \equiv d(v_i) \equiv d_i \pmod 2 \text{ 当且仅当 } \sum_{e_j \in E_{v_i}} (1+x_j) \equiv 0 \pmod 2 .$$

另一方面，(CPP‴) 的任意解能化到 (CPP″) 满足 $x_j \in \{0,1\}$ 的一个解 (看前面的脚注).

我们注意到 [EDMO70a] 给出了解 (CPP‴) 所需步数的一个明显的多项式上界.

在 (CPP‴) 中，限制条件 (1)(解 $w_i, x_j (1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q)$ 必须是整数) 能用作者所谓的“开花不等式”代替. (CPP‴) 的修改的版本是描述“开花算法”的出发点，它是一个匹配算法并且允许人们通过加倍“匹配边”产生一个欧拉图 G^+ ①. 像以前一样，G^+ 的任一条欧拉迹对应于 G 的一个 PT. 更详细的讨论见 [EDMO73a] 和关于算法的一章，那里我们也简单地讨论了那篇文章中所描述的**端点配对算法**和**下个节点算法**. 我们注意开花算法的修改版本能在 [HECK76a] 中找到. 不幸的是，这两篇文章都没有明显地讨论开花算法的复杂性②. 关于匹配算法的详细讨论

① 开花算法的第一个版本出现在 [EDMO65a] 中，它也是 [EDMO65c] 的起点. 然而，[EDMO65c] 只覆盖了 $c: E(G) \to \{1\}$ 的情况. 根据 [LOVÁ86a, 表 9.1.1]，这个开花算法执行时间基本上是 $O(p^4)$. 这个事实已经在 [EVEN75a] 中被注意到了，其中作者设计了求一个图的最大匹配的 $O(p^{2,5})$ 算法，他们算法的出发点是 [EDMO65c] 及随后由几个作者改进了的开花算法.

② 维奇斯 (S.A. Viches)，[VICH83a]，从计算机绘图中的一个问题出发 (极小绘图时间)，并且转化它到 (CPP′)，改进了开花算法，从而得到一个用 $O(p^3)$ 时间找 (CPP′) 解的方法. 维奇斯算法的另一个特性是它大大减少了在执行算法时所需要储存的规模.

见 [LOVÁ86a, 第 9 章], 但 [LAWL76a] 中也含有具有执行时间为 $O(p^3)$ 的开花算法的修改版本. 我们还引用 [BARA88d] 作为改进 (CPP) 的 ILP“方面”的一个近来的例子.

CPP 的一些应用和推广

CPP 和解它的方法 (上面的讨论的) 在日常生活以及其他数学问题中有许多应用. 事实上, 管梅谷开始建立 CPP 问题时, 他自己并没有预见到它的重要程度和广泛的应用①.

8.3.1.1.1　应用

尽管 CPP 的模型基于理想的假设, 即邮递员在每一个区域 (在对应于图中的一条边) 都必须至少投递一个邮件, 有一些实际问题, 它们自动地要求通过对街道的每条边至少一次. 下面一些关于这样的实际问题的例子引自 [CHRI75a].

a) *垃圾收集, 送牛奶*. 正如 PT 的情况一样, 人们在这些情况下还面临着一些限制的条件, 如车辆容量 (和 (或) 邮递员所能携带的信和包裹的重量) 和工作日的长短的情况, 这些没有明确地在 (CPP)~(CPP‴) 中阐述. 可是当考虑的图“不太大”时, 这些限制就隐含地被考虑了, 即这些限制通过服务于城市某个区域的邮递员数目, 或者在某个区域收集垃圾 (送奶) 用的垃圾车 (奶车) 的数目反映出来②.

b) *街道清扫, 冬季在路上撒砂子, 清扫办公室和走廊*. 在前面两种情况下, 我们面对如 a) 中相同的限制 (用来在街上撒水的车的最大容量或载砂车的最大负荷量), 而这种技术上限制通常在清扫办公室等建筑的情况不会发生 (这里本质的因素是清扫人员所允许的工作负荷).

c) *读(气, 水, 电)表*. 在上面的一些应用中 (如垃圾的收集、街道的清扫、送牛奶) 仅对图考虑 CPP 也许不能充分地反映现实. 因为如果一个卡车 (马车) 对相当宽的街道住户服务, 卡车分别对路两边的住户 (即两个方向的每个方向) 服务看起来更合适. 这就提出了有向或混合邮递员问题. 我们注意到列波林 (T.M. Liebling) 已经对瑞士苏黎士城的街道清扫问题作过彻底的研究 [LIEB70a], 不幸的是, 那时他没有用多项式时间匹配算法.

一般来说, 只要人们在一个街道网络的每一段分派或收集某些物品, 并且如果人们只有一种运输方式可用: 一辆自行车、一辆卡车或只有邮递员的脚, 那么就可以应用 CPP. 然而, 加伟南 (P. Järvinen) 已经研究了用两种方法投递报纸问题, 即私人车辆或邮局. 在这种情况下, 我们有与两种运输方法相联系的两种类型的单位

① 1987 年 7 月, 在中国济南他家中的一个简短的谈话期间所说.

② 垃圾通常一星期收集一次的事实可以通过对联系于一个卡车的 5 个图求解 CPP 反映出来. 又在一定时间内投递到住户的邮件数量或从住户收集的垃圾的数量可能增加. 这些变化可能需要重新定义寻求 CPP 解的图或引进更大的垃圾车.

价格：用车运输为 $c_1 > 0$，按邮件投递为 $c_2 > 0$. 当然，单位价格 c_1 与里程有关，单位价格 c_2 与邮递报纸有关. 用 d_{ij} 表示边 $x_ix_j \in E(G)$ 的"长度"，并且用 f_{ij} 表示邮寄到 $x_ix_j \in E(G)$ 的数目. 加伟南得到了问题的下述模型：*在一个简单连通图 G 中找一条闭途径 W，使得*

$$z_W = c_1 \sum_{x_ix_j \in E(W)} d_{ij} + c_2 \sum_{x_ix_j \in E(G)-E(W)} f_{ij}$$

最小([JÄRV73a]).

d) **最大权圈装箱问题**(MCPP) 是在具有非负价格函数 c 的图 G 中，寻求一组边不交的圈 $S = \{C_1, \cdots, C_r\}$，使得

$$c(S) := \sum_{i=1}^{r} c(C_i) \text{ 最大}$$

[GUAN84b]. (CPP) 和 MCPP 事实上是等价的.

定理 8.71([GUAN84b, 定理 1]) 设 $S = \{C_1, \cdots, C_r\}$ 是具有价格函数 $c := E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的连通图 G 的边不交的圈集，则下面的结论等价：

1) S 是 MCPP 的一个解；

2) $c(S) + 2c(H) = c(W)$，其中 $H := \left\langle E(G) - \bigcup_{i=1}^{r} E(C_i) \right\rangle$ 并且 W 是 G 的一个 PT.

证明 事实上，如果 G^+ 是从 G 通过过加倍子图 $H \subseteq G$ 的边所得的欧拉图，则 $G - H$ 是欧拉的，这是因为 $G - H = G^+ - \bigcup_{e \in E(H)} C_2(e)$，其中 $C_2(e)$ 是加倍 $e \in E(H)$ 的边得到的 G^+ 的二边形. 这样对 $G - H$ 的任意圈分解 S，我们有

$$c(G) = c(S) + c(H) = c(G - H) + c(H),$$

并且

$$c(G^+) = c(G) + c(H) = c(S) + 2c(H),$$

即 $c(H)$ 是最小的当且仅当 $c(S)$ 是最大的 (1).

此外，对于用边仅一次或两次的任意闭覆盖途径 W，我们有

$$c(W) = c(G) + c(H_W) ,$$

其中 $H_W = \langle \{e \in E(G) \mid \lambda_W(e) = 2\} \rangle$ (见定理 8.67 的证明).

也就是说，W 是一个 PT (或者通过消去有 $c(K) = 0$ 的圈 $K \subset H_W$ 能变换为一个 PT) 当且仅当 $c(H_W)$ 是最小的 (2). 把 $H = H_W$ 时的 (1) 和 (2) 和关于 $c(G^+)$ 及 $c(W)$ 的诸等式结合起来，我们就得到定理的有效性.

我们注意到定理 8.71 的证明也说明了对于图 G，MCPP 的一个解能够用多项式时间找到. 因为我们能够用多项式时间找到 G 中的一个 PT W，因而 $G-H_W$ 也能用多项式时间找到. 我们将看到，$G-H_W$ 的圈分解 S 也可以在多项式时间找到，并按定理 8.71，S 是 G 的最大权圈装箱. 最后，我们注意到定理 8.71 蕴涵推论 8.69.

另一方面，我们已经能够注意到，如果我们考虑 G 的圈覆盖 S (这样需要 G 是无桥的)，并且求这样一个 S，使得 $c(S)$ 最小，则 CPP 和这个**最小圈权圈覆盖问题**(MCCP) 之间不存在如同定理 8.71 所表示的 CPP 和 MCPP 之间那样的简单的等价关系. 在相容圈分解部分，我们将证明 CPP 的 MCCP 在平面情况是等价，而对于非平面情况一般不成立.

关于 CPP 应用于寻找艾赛 (Ising) 旋转瓶的基本状态和集成电路设计见 [BARA 88b,88c].

8.3.1.1.2 t- 连接，t- 割和多物流

遵循赛宝 (A. Sebö)[SEBÖ84a,85a,86a]，我们引入下面的概念. 本节我们假定 G 是连通的.

定义 8.72 对一个图 G，定义 $t: V(G) \to \mathbb{Z}$ 和 $t(X) := \sum_{x\in X} t(x)$，其中 $X \subseteq V(G)$. 假设 $t(V(G)) \equiv 0 \pmod 2$，如果对每个 $v \in V(G)$ 有 $d_{\langle F\rangle}(v) \equiv t(v) \pmod 2$ 成立，则 $F \subseteq E(G)$ 称为 G 的一个 ***t*-连接**. 对 $X \subseteq V(G)$，如果 $t(X) \equiv 1 \pmod 2$，则 $E(X, V(G)-X)$ 为 G 的一个 ***t*-割**. (注意因为 $t(V(G)) \equiv 0 \pmod 2$，则对每个 $Y \subseteq V(G)$，$t(Y) \equiv t(V(G)-Y) \pmod 2$).

我们注意这些概念等价于在 [SEYM81b,KORA82a,LOVÁ86a] 中定义的 T- 连接和 T- 割. 在那里，选 $T \subseteq V(G)$，使得 $|T| \equiv 0 \pmod 2$，这就意味着在定义 8.72 中，

$$T = \{v \in V(G) \mid t(v) \equiv 1 \pmod 2\} .$$

这就蕴涵着对任意 t- 连接 F 有

$$V_{\text{odd}}(\langle F\rangle) = T ,$$

对任意的 $X \subseteq V(G)$ 有

$$t(X) \equiv |X \cap T| \equiv |(V(G)-X) \cap T| \pmod 2 .$$

我们选赛宝的 t- 连接和 t- 割的定义是为了便于应用.

特别地，如果 t 满足

$$t(v) \equiv d(v) \pmod 2, \quad v \in V(G) ,$$

则有上面的 T 满足

$$T = V_{\text{odd}}(G),$$

进而对这样的 t 我们已经研究了 t- 连接，即满足定理 8.67 中条件 2)，并且用来产生欧拉图 G^+ 的子图 $H \subseteq G$ (见定理 8.67 证明后面的讨论中的 (4′)). 最后，对于这些 t，t- 割恰好是奇 (边) 割. 这从下面的事实可得对任意的 $X \subseteq V(G)$，$|X \cap V_{\text{odd}}(G)| \equiv |E(X, V(G) - X)| \pmod 2$. 另一方面，(CPP′) 的重要步骤，(CPP) 的算法形式是 SPP 和 MMP，并且那里我们只是为了实用的目的考虑 $V_{\text{odd}}(G)$，而不考虑 $V(G)$ 的任意偶子集 T. 按定义 8.72 的语言和它后面的等价形式，对 $T = V_{\text{odd}}(G)$，我们找一个具有最小 $c(H)$ 的 t- 连接 H：这等价于找 K_{2k} 中的一个 1- 因子 L，其中 $V(K_{2k}) = T$，使得 $c^*(L)$ 最小. 这样，即使在与 G 联系的非负价格函数 c 的一般情况，求一个有最小 $c(F)$ 的 t- 连接 F 的问题在多项式时间也是可解的.

然而，此后的讨论我们假定 G 有价格函数 $c \equiv 1$. 对固定的满足 $t(V(G)) \equiv 0 \pmod 2$ 的 $t : V(G) \to \mathbb{Z}$，我们定义

$$\tau(G,t) = \min\{|F| \mid F \text{ 是 } G \text{ 的一个 } t\text{ - 连接}\}\ ,$$

$$\nu(G,t) = \max\{|\mathcal{E}_S| \mid \mathcal{E}_S \text{ 是 } G \text{ 的不相交的 } t\text{ - 割集合}\}\ ,$$

进而对 $x, y \in V(G)$，$x \neq y$，定义

$$t_{x,y}(v) = \begin{cases} t(v), & v \in V(G) - \{x,y\}, \\ t(v)+1, & v \in \{x,y\}\ . \end{cases}$$

用这个记号，在下面的结果中，我们将总结最小 t- 连接的一些性质 [SEBÖ85a].

引理 8.73 设 F 和 F' 分别是 G 的 t- 连接和 t'- 连接，则下面结论成立：

a) $|F| = \tau(G,t)$ 当且仅当对每个圈 $C \subseteq G$，$|F \cap E(C)| \leqslant |E(C) - F|$;

b) 如果 $|F| = \tau(G,t)$ 且 $|F'| = \tau(G,t')$，则对每个圈 $C \subseteq \langle F \cup F' - F \cap F' \rangle$，$|F \cap E(C)| = |F' \cap E(C)|$.

因为引理 8.73 的证明能定理 8.67 的证明导出，故把它留作练习.

引理 8.74 设 F 是 G 的一个最小 t- 连接，$p_G > 1$，并且设 $x, y \in V(G)$，$x \neq y$ 是任选的，则存在 G 的一个最小 $t_{x,y}$- 连接 F_1 和一条连接 x 和 y 的路 $P(x,y)$，使得 $F = F_1 \cup E(P(x,y)) - F_1 \cap E(P(x,y))$.

证明 由定义 8.72 和 $t_{x,y}$ 的定义，对任意的 t- 连接 F 和 $t_{x,y}$- 连接 F'，

$$d_{\langle F \rangle}(v) + d_{\langle F' \rangle}(v) \equiv 0 \pmod 2, \quad x \neq v \neq y\ ,$$

并且

$$d_{\langle F \rangle}(z) + d_{\langle F' \rangle}(z) \equiv 1 \pmod 2, \quad z \in \{x,y\}\ .$$

这样对 $H := \langle F \cup F' - F \cap F' \rangle$,

$$d_H(v) \equiv 1 \pmod 2 \text{ 当且仅当 } v \in \{x, y\} . \tag{1}$$

这样我们可记

$$H = P(x,y) \cup \bigcup_{i=1}^{m} C_i , \quad E(P(x,y)) \cap E\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) = \varnothing , \tag{2}$$

其中 $P(x,y)$ 是 H 中从 x 到 y 的任意路，并且 $S = \{C_1, \cdots, C_m\}$ 是欧拉图 $H - E(P(x,y))$ 的任意圈分解 (见 (1)). 当然，$S = \varnothing$ 是可能的.

又假设选择 F 和 F'，使得

$$|F| = \tau(G,t), \quad |F'| = \tau(G, t_{x,y}) .$$

考虑上面的 $S = \{C_1, \cdots, C_m\}$，并且设

$$F^{(0)} := F', \quad F^{(i)} = (F^{(i-1)} \cup E(C_i)) - (F^{(i-1)} \cap E(C_i)), \ i = 1, \cdots, m .$$

由定义，$F^{(i)} (i = 1, \cdots, m)$ 是一个 $t_{x,y}$- 连接. 从 $F^{(i)}$ 的定义和 (2) 的第一部分可得

$$F^{(i-1)} \cap E(C_i) = F' \cap E(C_i) , \tag{3}$$

$$F^{(i)} = (F^{(i-1)} - (F' \cap E(C_i))) \cup (F \cap E(G_i)) . \tag{4}$$

(4) 和引理 8.73b) 导出

$$|F^{(i)}| = |F^{(i-1)}| = \tau(G, t_{x,y}), \quad i = 1, \cdots, m,$$

进而由 H 和 $F^{(i)}$ 的定义以及 (2) 的第二部分导出

$$F' \cap E(P(x,y)) = F^{(i)} \cap E(P(x,y)), \quad i = 1, \cdots, m, \tag{5}$$

$$F^{(m)} \cap E(S) = F \cap E(S) . \tag{6}$$

因为

$$F = (F \cap F') \cup (F \cap E(S)) \cup (F \cap E(P(x,y))) ,$$

并且

$$F^{(m)} = (F \cap F') \cup (F^{(m)} \cap E(S)) \cup (F^{(m)} \cap E(P(x,y))) ,$$

我们从 (5) 和 (6) 得到

$$F^{(m)} \cup E(P(x,y)) - F^{(m)} \cap E(P(x,y)) = F ,$$

即 $F_1 := F^{(m)}$ 是所需要的一个 $t_{x,y}$- 连接.

引理 8.75 考虑 G 的一个最小 t- 连接 F，其中对一个 $v \in V(G)$，$t(v) \not\equiv 0 \pmod 2$，并且选 $x, y \in V(G)$，$x \neq y$，使得 $\tau(G, t_{x,y})$ 尽可能小，则 $d_{\langle F \rangle}(x) = d_{\langle F \rangle}(y) = 1$.

证明 由引理 8.74，存在 G 的一个最小 $t_{x,y}$- 连接 F_1 和一条路 $P(x,y)(x \neq y)$，使得 $F = F_1 \cup E(P(x,y)) - F_1 \cap E(P(x,y))$. 因为 $t(v) \not\equiv 0 \pmod 2$，则存在一条路 $Q(v,w) \subseteq \langle F \rangle$，使得 $t(v) \equiv t(w) \equiv 1 \pmod 2$. 因此，$F - E(Q(v,m))$ 是一个 $t_{v,w}$-连接，即 $\tau(G, t_{v,w}) < \tau(G,t)$. 于是在引理的陈述中，$x, y$ 的选择蕴涵

$$\tau(G, t_{x,y}) < \tau(G,t) \ . \tag{*}$$

我们断言

$$d_{\langle F_1 \rangle}(x) = d_{\langle F_1 \rangle}(y) = 0 \text{ 必须成立;} \tag{**}$$

否则，不失一般性，假设 $d_{\langle F_1 \rangle}(x) > 0$，我们有某个 $e \in F_1 \cap E_x$ 连接，如 x 和 z. 但是这样 $t_{x,y}$ 的定义蕴涵着当 $z \neq y$ 时 $F_1 - \{e\}$ 是一个 $t_{x,y}$ 连接. 在这种情况下，我们有 $\tau(G, t_{z,y}) < \tau(G, t_{x,y})$，这与 x 和 y 的选择矛盾.

假定对 $e \in F_1 \cap E_x$ 的所有可能的选择有 $z = y$，并且对称的，对所有可能的 $e' \in F_1 \cap E_y$ (e' 连接 y 和 z')，$z' = x$，那么由 F_1 的最小性得出 $\langle F_1 \cap E_x \rangle$ 是一条路 $P_1 \simeq K_2$，并且因此是 $\langle F_1 \rangle$ 的一个分支 (见引理 8.73a)). 如果 $P_1 = P(x,y)$，我们得到与 (*) 矛盾; 否则，对每个 $v \in V(G)$ 有 $t(v) \equiv 0 \pmod 2$，这与假设矛盾. 因此，$C = P_1 \cup P(x,y)$ 是一个圈. 我们有 $F \cap F_1 \supset E(P_1)$，并且

$$E(C) = E(P_1) \cup (E(P(x,y)) \cap F_1) \cup (E(P(x,y)) \cap F) \ .$$

另一方面，由这个等式和引理 8.73 的 a) 导出

$$|F_1 \cap E(C)| = |F_1 \cap E(P(x,y))| + 1 \leqslant |E(C) - F_1| = |F \cap E(P(x,y))| \ ,$$

$$|F \cap E(C)| = |F \cap E(P(x,y))| + 1 \leqslant |E(C) - F| = |F_1 \cap E(P(x,y))| \ .$$

结合这些不等式，我们得到

$$|E(C)| + 1 \leqslant |E(C)| - 1 \ ,$$

这个不等式显然不成立，这就证明了 (**). 从 F 和 F_1 之间的关系得出结论 $P = P(x,y)$，

$$d_{\langle F \rangle}(x) = d_P(x) = d_{\langle F \rangle}(y) = d_P(y) = 1 \ .$$

这就证明了引理.

借助于这些引理，我们能够给出赛宝关于西蒙的一个重要结果的一个简短的证明，[SEYM81b，SEBÖ85a].

定理 8.76　如果 G 是一个二部图，则 $\tau(G,t)=\nu(G,t)$.

证明　如果对每个 $v\in V(G)$，$t(v)\equiv 0 \pmod 2$，则 $F=\varnothing$ 是 G 的仅有的一个极小 t- 连接，并且 $\mathcal{E}_S=\varnothing$ 是仅有的不相交的 t- 割. 因此，在这种情况下，$\tau(G,t)=\nu(G,t)=0$，故假设对某个 $v\in V(G)$，$t(v)\not\equiv 0 \pmod 2$，设 $F\neq\varnothing$ 是一个最小 $t-$ 连接，并且选 $x,y\in V(G)(x\neq y)$，使得 $\tau(G,t_{x,y})$ 尽可能小. 由引理 8.75，

$$d_{\langle F\rangle}(x)=d_{\langle F\rangle}(y)=1\ . \tag{1}$$

设 $\hat{G}$ 是从 $G-x$ 通过收缩 $N(x)\subset V(G)$ 为一个点所得的图. 由构造法，$\hat{G}$ 是连通二部图.

设 $\hat{t}:V(\hat{G})\to\mathbb{Z}$ 定义如下：

$$\hat{t}(v)=\begin{cases} t(v), & v\in V(G)-N^*(x),\\ \displaystyle\sum_{w\in N^*(x)} t(w), & \{v\}=V(\hat{G})-V(G)\ . \end{cases}$$

从 $\hat{t}$ 的定义得 $\hat{t}(\hat{G})\equiv 0 \pmod 2$. 定义 $\hat{F}=F-E_x$，并且注意 (1) 和 F 的选择蕴涵

$$|\hat{F}|=|F|-1=\tau(G,t)-1\ . \tag{2}$$

又 $\hat{t}$ 和 $\hat{F}$ 的定义及 F 是 G 的一个 t- 连接可推出 $\hat{F}$ 是 $\hat{G}$ 的一个 $\hat{t}$- 连接. 这样 $|\hat{F}|\geqslant\tau(\hat{G},\hat{t})$.

如果 $|\hat{F}|>\tau(\hat{G},\hat{t})$，则由引理 8.73a) 和 $\hat{G}$ 是二部图蕴涵 $\hat{G}$ 含一个圈 $\hat{K}$，使得

$$|E(\hat{K})\cap\hat{F}|\geqslant|E(\hat{K})-\hat{F}|+2\ . \tag{3}$$

因为 F 是 G 的最小 t- 连接及 (3)，$z\in V(\hat{K})$ 必须成立，其中 $z\in V(\hat{G})-V(G)$，那么 $E(\hat{K})=E(P(w_1,w_2))$，其中 $P(w_1,w_2)$ 是 G 中连接 $w_1,w_2\in N(x)$ 的一条路，并且 $w_1\neq w_2$. 因此，存在 $w_1x,w_2x\in E_x$，使得 $K:=\langle E(\hat{K})\cup\{w_1x,w_2x\}\rangle$ 是 G 的一个圈. 由引理 8.73a)，我们有

$$|E(K)\cap F|\leqslant|E(K)-F|\ . \tag{4}$$

可是由 $K,\hat{K},F,\hat{F}$ 的定义，

$$|E(K)\cap F|\geqslant|E(\hat{K})\cap\hat{F}|,\quad |E(K)-F|\leqslant|E(\hat{K})-\hat{F}|+2\ . \tag{5}$$

这样在 (3),(4) 和 (5) 中都有等式成立，这就蕴涵着 $w_1x,w_2x\notin F$. 但是 $|E(K)\cap F|=|E(K)-F|$ 分类 $F_1:=(F\cup E(K))-(F\cap E(K))$ 为 G 的一个最小 t- 连接. 因此，由 $d_{\langle F\rangle}(x)=1$ 得 $\{w_1x,w_2x\}\cup F\cap E_x\subseteq F_1$，即 $d_{\langle F_1\rangle}(x)=3$. 另一方面，$t$ 和 F_1 的定

义以及 x, y 的选择允许应用引理 8.75，这蕴涵 $d_{\langle F_1 \rangle}(x) = 1$，显然，与 $d_{\langle F_1 \rangle}(x) = 3$ 矛盾. 这个矛盾蕴涵 $|\hat{F}| > \tau(\hat{G}, \hat{t})$ 不成立.

现在已经证明 $|\hat{F}| = \tau(\hat{G}, \hat{t})$，并且注意 E_x 是一个满足 $E_x \cap E(\hat{G}) = \varnothing$ 的 t-割，我们考虑 $\hat{G}$ 的一个满足

$$|\hat{\mathcal{E}}_S| = \nu(\hat{G}, \hat{t})$$

的不相交的 $\hat{t}$- 割的集合 $\hat{\mathcal{E}}_S$. 从 $\hat{G}$ 和 $\hat{t}$ 的定义得出，每个 $E_S \in \hat{\mathcal{E}}_S$ 是一个 t- 割. 这样 $\mathcal{E}_S \in \hat{\mathcal{E}}_S \cup \{E_x\}$ 是 G 的不相交 t- 割集合，它蕴涵着

$$\nu(\hat{G}, \hat{t}) + 1 \leqslant \nu(G, t) \ . \tag{6}$$

现在我们对 $\tau(G, t)$ 用归纳法. 一开始已经说明若 $\tau(G, t) = 0$，定理成立，并且对 $\hat{F} = \tau(\hat{G}, \hat{t})$ 应用归纳法，我们从 (2),(6) 和 $\hat{F}$ 的定义得到

$$\nu(\hat{G}, \hat{t}) = \tau(\hat{G}, \hat{t}) = |F| - 1 = \tau(G, t) - 1 \leqslant \nu(G, t) - 1 \ ,$$

即

$$\tau(G, t) \leqslant \nu(G, t) \ . \tag{7}$$

另一方面，t- 连接 F 和 t- 割 $E(X, V(G) - X)$ 的定义蕴涵 $|F \cap E(X, V(G) - X)| \equiv 1 \pmod 2$. 因此，$G$ 不能有多于 $|F|$ 个不相交的 t- 割，即 $\nu(G, t) \leqslant \tau(G, t)$. 由此和 (7) 完成定理 8.76 的证明.

如西蒙注意到的，如果 G 不是二部图，则定理 8.76 的结论不再有效. 只要取 $G = K_4$ 和 $t(v) = 1$，$v \in V(K_4)$ 即可. 满足这个定理结论的图的刻画尚未找到，可是杰拉德 (A.M.S. Gerards) 最近建立了一个 $\tau(G, t) = \nu(G, t)$ 的充分条件，从而推广了定理 8.76，他用两种类型的禁用同胚子图描述了这个充分条件 (见 [GERA88b, 定理 1.1]).

事实上，西蒙得到了他的结果作为从 [EDMO70a,73a] (但这些没有明显地叙述) 中提出一个结果的推广. 这个结果第一次在 [LOVÁ75a] 中被证明了 (见下面推论 8.78). 为了简短地叙述这一结果，引进下面的概念.

定义 8.77 对于一个图 G，设 t 如定义 8.72 中所定义. G 的 t- 割的 **k-装箱**是 G 的 t- 割的一个集族 $\mathcal{E}_{S,k}$ (允许重复)，使得 G 的每条边属于 $\mathcal{E}_{S,k}$ 中至多 k 个元素 (不必不同). 记

$$\nu_k(G, t) := \max\{|\mathcal{E}_{S,k}| \mid \mathcal{E}_{S,k} \text{ 是 } G \text{ 的 } t\text{ - 割的 } t\text{ - 装箱}\},$$

并且注意 $\nu_1(G, t) = \nu(G, t)$.

推论 8.78 对任意图 G 有 $\nu_2(G, t) = 2\tau(G, t)$.

证明　考虑一个二部图 $S(G)$，并且扩充 t 到 $t': V(S(G)) \to \mathbb{Z}$，使得

$$t'(v) \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{当且仅当} t(v) \equiv 1 \pmod 2 .$$

由 t' 的定义，存在 G 的 t- 连接 F 和 $S(G)$ 的 t'- 连接 F' 之间的一个 1-1 对应，其中 $F' = E(S(\langle F \rangle))$. 因此，$|F| = \tau(G,t)$ 当且仅当 $|E(S(\langle F \rangle))| = \tau(S(G),t')$. 另一方面，对 G 的每个 t- 割 E_0，存在 $2^{|E_0|}$ 个 $S(G)$ 的对应于 E_0 的 t'- 割 E_0'. 因为如果 $s_e \in V(S(G)) - V(G)$ 是对应于 $e \in E(G)$ 的一个细分顶点，那么这样一个 E_0' 能够通过对每个 $e \in E_0$ 恰好取一个 $f \in E_{s_e} \subseteq E(S(G))$ 得到. 可是对这些 E_0' 的每一个，存在另一个，如 E_0''，使得

$$E_0' \cup E_0'' = \bigcup_{e \in E_0} E_{s_e} \quad \text{且} \quad E_0' \cap E_0'' = \varnothing . \tag{1}$$

相反地，t' 的定义蕴涵对 $S(G)$ 的每个 t'- 割，$E_0' = E(X, V(S(G)) - X)$ 有

$$E_0' \not\supset E_{s_e}，\text{否则}，N(s_e) \subset X \text{ 或 } N(s_e) \subset V(S(G)) - X . \tag{2}$$

因此，我们得出结论：E_0' 用唯一的方法定义了 G 的一个 t- 割 E_0. 综合这些讨论并应用定理 8.76，对 G 的一个最小 t- 连接 F 得到

$$2\tau(G,t) = 2|F| = |E(S(\langle F \rangle))| = \tau(S(G),t') = \nu(S(G),t') \leqslant \nu_2(G,t) \tag{3}$$

(这个不等式从 (1) 和 (2) 可得).

此外，如果 $\mathcal{E}_{S,2}$ 是 G 的一个 2- 装箱，则上面从 E_0 到 E_0' 的构造和 (2) 蕴涵 $\mathcal{E}_{S,2}$ 能够变化为 $S(G)$ 的一个 1- 装箱，即

$$\nu_2(G,t) \leqslant \nu(S(G),t') . \tag{4}$$

这样由 (3) 和 (4) 得到了推论.

注意如果我们定义 $t(v) = d(v)$，则从推论 8.78 得到，“未赋权” CPP (即 $c \equiv 1$) 的解用 $q_G + \frac{m}{2}$ 给出，其中 m 是 G 的奇割 2- 装箱的最大规模 [LOVÁ86a, 推论 6.5.11].

推论 8.78 可以推广如下：

推论 8.79([SEYM81c,(2.5)])　设 G 和 t 同前所给，并设 $w: E(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$，使得对 G 的每个圈 $w(C) := \sum_{e \in E(C)} w(e) \equiv 0 \pmod 2$. 设 F 是一个具有最小 $w(F) := \sum_{f \in F} w(f)$ 的 t- 连接，则存在 $w(F)$ 个 t- 割，使得每个 $e \in E(G)$ 属于它们中的至多 $w(e)$ 个 t- 割.

用 $w(e)$ 个顶点细分每条边 $e \in E(G)$，用类似于推论 8.78 的证明方法可证推论 8.79 (练习 8.22). 如果 $w \equiv 1$，推论 8.79 可化到定理 8.76. 如果在推论 8.79 中删去关于 $w(C)$ 的奇偶性的条件，则得到一个"赋权"结果，这个结果与推论 8.79 的关系类似于推论 8.78 与定理 8.76 的关系 (见 [LOVÁ86a, 定理 6.5.20]).

顺便注意在 [SEBÖ84a,86a, FRAN84a] 中探讨的 t- 连接和 t- 割的处理方式产生了求解 CPP 的算法，它不再需要 [EDMO73a] 中发展的匹配理论，也见 [LOVÁ86a, p245-247]，进而本节中下面的某些专题也在 [GRÖT85a, 8.5,8.6] 中论述了.

然而，如果把引理 8.73a) 和定理 8.76 结合起来，我们就得到了下面的结论，它就打开了研究平面图的**多种物流问题** (MFP) 的大门 (对 MFP 的系统阐述见下面).

推论 8.80([SEYM81b,(5.1)]) 考虑 $F \subseteq E(G)$，其中 G 是一个二部图. 下面结论等价:

1) 对每个 $f \in F$，存在 G 的一个边割 $E_{S,f} \supset \{f\}$，使得如果 $f \neq g$，则 $E_{S,f} \cap E_{S,g} = \varnothing$，其中 $f, g \in F$.

2) 对每个圈 $C \subseteq G$ 有 $|E(C) \cap F| \leqslant |E(C) - F|$①.

证明 用定义 $t: V(G) \to \mathbb{Z}$，使得 $t(v) = d_{\langle F \rangle}(v)$，我们有 F 为一个 t- 连接.

如果 2) 成立. 由引理 8.73a) 知，$|F| = \tau(G,t)$. 因为 G 是二部图，由定理 8.76，我们有 $|F| = \tau(G,t) = \nu(G,t)$，即 G 有 $|F|$ 个两两不相交的 t- 割，其中的每一个与 F 相交 (见定理 8.76 证明中的最后一段). 这就蕴涵着 1) 的有效性.

如果 1) 成立，我们有 $|F \cap E_{S,f}| \equiv 1 \pmod 2 (f \in F)$. 这样对每个 $f \in F$ 有 E_{S_f} 为 G 的一个 t- 割. 这样 $\mathcal{E}_S := \{E_{S,f} \mid f \in F\}$ 是 G 的两两不相交的 t- 割的集合. 因此，

$$\tau(G,t) \leqslant |F| \leqslant \nu(G,t) \ . \qquad (*)$$

可是因为 G 是二部图，应用定理 8.76 导出 $(*)$ 中等式成立. 这样 F 是 G 的一个极小 t 连接，由引理 8.73a)，这就蕴涵着 2) 的有效性. 推论得证.

现在，如果我们假设 G 是可平面的，则 G 的圈 (或极小边割) 和 $D(G)$ 的极小边割 (或圈) 之间存在 1-1 对应，其中 $D(G)$ 是 G 的任意平面嵌入的对偶 (注意这样一个 1-1 对应的存在性不依赖于任意实际嵌入)，而且 G 是一个二部图当且仅当 $D(G)$ 是欧拉的. 这样在可平面的情况下，我们能用下面的等价形式来表述推论 8.80[SEYM81b,(5.2)].

推论 8.81 考虑 $F \subseteq E(G)$，其中 G 是可平面欧拉图. 下面的结论等价.

1) G 含两两边不交的圈 $C_f \supset \{f\} (f \in F)$;

① 事实上，如果在 2) 中用"欧拉子图"代替术语"圈"，与 1) 的等价性仍然成立 (因为人们同时考虑一个边不相交的圈集)；西蒙最初用那种方法叙述了他的结果 (这就更直接地导出了下面的推论 8.81).

2) 对每个 (极小) 边割 $E_0 \subseteq E(G)$ 有 $|E_0 \cap F| \leqslant |E_0 - F|$①.

西蒙还用例子说明了“可平面的”和“欧拉的”假设都不能被省去.

遵循 [KORA82a,SEBÖ???] 我们用下面的方法阐述 MFP②: 对一个图 G, $F \subseteq E(G)$ 和 $\varphi : E(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, 是否存在一个圈集 $S = \{C_1, \cdots, C_k\}$ 和一个函数 $\psi : S \to \mathbb{R}^+$, 使得

a) 对每个 $C \in S$ 有 $|E(C) \cap F| = 1$;

b) 对任意的 $e \in E(G)$ 有 $\sum\limits_{e \in C_i \in S} \psi(C_i) \leqslant \varphi(e)$; 如果 $e \in F$, 则等式成立?

存在 MFP 的解的一个必要条件表示在下面的引理中.

引理 8.82 设 G, F 和 φ 如 MFP 中所述. MFP 的一个解 (即满足 a) 和 b) 的一组圈) 存在，仅当对 G 的每个边割 E_σ 有 $\varphi(E_\sigma \cap F) \leqslant \varphi(E_\sigma - F)$.

证明 对包含 $f \in F \cap E_\sigma$ 的每个圈 $C \in S$，至少存在 $E_\sigma - F$ 的一条边，它也含在 C 中 (见 MFP 中的 a)). 这和 b) 的第二部分一起保证了对 b) 中和的每一项，如果 $e \in F$，C_i 在 $\varphi(E_\sigma - F)$ 中也被计数了. 因此，

$$\varphi(E_\varphi \cap F) = \sum_{f \in F \cap E_\sigma} \left(\sum_{\substack{c_i \in S \\ f \in E(C_i)}} \psi(C_i) \right) \leqslant \varphi(E_\sigma - F) .$$

这就证明了引理.

现在假设 G 是可平面的. 假设 $F \subseteq E(G)$，并且给定 $\varphi : E(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$，我们通过首先删去 $\varphi(e) = 0$ 的边 e，然后用 $2\varphi(g)$ 条连接 x_g 和 y_g 的边代替每一条其他的边 $g = x_g y_g$ 来构造 G_φ^+. 由构造，G_φ^+ 是欧拉的，并且 $F \subseteq E(G)$ 对应于一个含有连接 x_f 和 y_f 的所有边及对应于任意 $f = x_f y_f \in F$ 的一个集 $F_\varphi \subseteq E(G_\varphi^+)$，进而 $|F_\varphi| = 2\varphi(F)$，并且类似地，$G$ 的每个边割 E_σ 对应于 G_φ^+ 的一个恰好有 $|E_0| = 2\varphi(E_\sigma)$ 个元素的边割 E_0. 另一方面，G_φ^+ 的每个边割 E_0 对应于 G 的一个边割 E_σ.

如果 G, F 和 φ 满足引理 8.82 中的不等式，则对每个边割 $E_0 \in E(G_\varphi^+)$ 有

$$|E_0 \cap F_\varphi| = 2\varphi(E_\sigma \cap F) \leqslant 2\varphi(E_\sigma - F) = |E_0 - F_\varphi| .$$

由推论 8.81，对每个 $f \in F_\varphi$，G_φ^+ 含一个圈 $C_f \supset \{f\}$，使得 $S_\varphi := \{C_f \mid f \in F_\varphi\}$ 是一个两两边不交的圈集. S_φ 对应于 G 的一个圈集 S. 可是从 G_φ^+ 的构造得出，S_φ 的不同圈可能对应于 S 的同一圈. 设 $\pi : S_\varphi \to S$ 表示这个对应性. 对 $C \in S$，我们定义

$$\psi(C) := \frac{1}{2}|\pi^{-1}(C)| \tag{+}$$

① 如果对极小边割不等式成立，则对任意边割它也成立，并且反之亦然 (也见前面的脚注).

② 我们注意这里定义的 MFP 等价于 [SEYM81b] 中所提出的 MFP. 事实上，西蒙定义 MFP，使得 φ 只是一个非负实值函数，但是他注意到考虑 φ 是整数的情况就足够了.

(我们称这个 ψ 为 $\frac{1}{2}$- 整值的).

然而，从 G_φ^+, S_φ 和 S 的定义知，S 满足 MFP 的性质 a). 由 S_φ 和 S 的定义，以及 π 的定义和 (+) 知，性质 b) 成立. 特别地，如果 $f = x_f y_f \in F$，则 S_φ 的包含连接 x_f 和 y_f 的一条边及对应于 f 的每一条边的这 $2\varphi(f)$ 个圈满足

$$\sum_{f\in C\in S} \psi(C) = \frac{1}{2} \sum_{f\in C\in S} |\pi^{-1}(C)| = \frac{1}{2} \cdot 2\varphi(f) = \varphi(f)\ .$$

综上所述，我们得到下面的结果 [SEYM78a,81b].

定理 8.83 对一个可平面图 G，设给定 $F \subseteq E(G)$ 和 $\varphi : E(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. MFP 的解 S 存在当且仅当对 G 的每个边割 E_σ 有

$$\varphi(E_\sigma \cap F) \leqslant \varphi(E_\sigma - F),$$

进而能选取 S，使得 φ 是 $\frac{1}{2}$- 整值的.

当然，因为必须构造一个欧拉图 G_φ^+，所以 ψ 一般不能选为整值的. 然而，如果除定理 8.83 的假设外，φ 满足 $\sum_{e\in E_v} \varphi(e) \equiv 0 \pmod 2$，则 MFP 有一个解 S，使得 ψ 是整值的 (在这种情况要得到一个欧拉图 G_φ^+，用 $\varphi(e)$ 条边代替每条边 $e \in E(G)$ 就足够了). 另一方面，西蒙猜想：一般地，如果 MFP 有解，那么能找到一个解 S，使得 ψ 是 $\frac{1}{2}$- 整值的. 这个猜想由定理 8.83 及其在不含收缩到 K_5 的子图的图上的推广所支持 (见 [SEYM81b,81c]，其中在后一篇文章中，对各类型的拟阵研究了 MFP). 可是，在 [HASS84a, 图 6(a)] 中提出了对于这个猜想的一个反例.

虽然引理 8.82 中的不等式对于 MFP 解的存在性一般是不充分的，但是对于没有提到的某些特殊情况，它是一个充分条件，如 (也见 [SEYM81b, KORA82a])

1) $|F| = 1$ (在这种情况下，我们得到**最大流最小割定理**，见定理 8.85 或 [FORD62a]);

2) $|F| = 2$ (这就产生了**胡的 2- 物流定理**，它的一个简短的证明能在 [SEYM79a] 中找到)①;

3) $\langle E(G) - F\rangle$ 有一个平面嵌入，使得 F 的开边在 $\langle E(G) - F\rangle$ 的无界面上 [OKAM81a] (这里也能找到 S，使得 ψ 是 $\frac{1}{2}$- 整值的).

事实上，一般的 MFP 可多项式求解，这是因为如果 $F \subseteq E(G)$ 有给定的规模 k，则 MFP 能够重述为一个有多项式个和与 G 的边联系的约束和变量的线性规划问题 (西蒙向我指出的). 在 3) 中所描述的平面图的情况，解 MFP 的一个好的算法已在 [HASS84a, MATS85a] 中发展了. 不久，后面文章的作者找到了一个对于另一

① 对偶结果已在 [SEYM78a] 中证明了，胡的结果的一个加强能在 [ROTH66b] 中找到.

类可平面图 G 解 MFP 的一个好的算法 [MATS86a]，它的执行时间是 $O(n^{5/2}\log n)$. 通过化 G 的 MFP 到对偶 $D(G)$ 的 CPP，能够得到一个执行时间为 $O(n^{3/2}\log n)$ 的算法 [BARA87a]. 最近，赛宝给出了一个平面的 MFP 的多项式算法 (即 G 是可平面的)，其中 $|F|$ 以一个固定的整数 k 为界 [SEBÖ89b]. 另一方面，整MFP 是一个 NP- 完全问题 [EVEN76a] (整是指 ψ 的范围)①.

对于其他分别有关于 CPP 和 t- 连接的问题，有兴趣的读者可参见 [JOHN87a].

8.3.1.1.3　哈密顿途径，旅行推销员以及与中国邮递员的关系

我们的出发点还是具有价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的连通图. 回忆 G 中一个 $V(G)$- 覆盖途径是包含 G 的每个顶点的闭途径 W，又 G 的哈密顿圈和闭覆盖途径是 $V(G)$- 覆盖途径的特殊情况. 正如人们在 CPP 的情况要找一条具有最小 $c(W)$ 的闭覆盖途径 W 一样，**哈密顿途径问题** (HWP) 是*要求一条具有最小 $c(W')$ 的闭 $V(G)$- 覆盖途径 W'，这样的 W' 称为一条哈密顿途径*. 由图 8.12 可见，G 可能没有哈密顿圈是 G 的 HWP 的解. 另一方面，如果 G 是哈密顿的，并且 c 是一个常数，那么 G 的任意哈密顿圈是 G 的 HWP 的一个解，并且反之亦然. 然而，像我们下面所看到的，一般地，G 中的 HWP 恰是 **旅行推销员问题** (TSP) 的特殊情况. 对于 TSP，我们给定 p 个"城市" $v_1, \cdots, v_p, (p \geqslant 3)$ 和 v_i 到 v_j 之间的"距离" $d_{i,j} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant p,\ i \neq j)$，$d_{i,j} = d_{j,i}$. 这个问题是

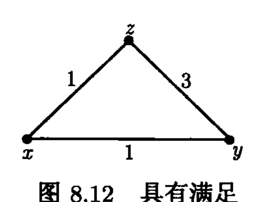


图 8.12　具有满足 $c(xy) = c(xz) = 1$，$c(yz) = 3$ 的价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{N}$ 的 K_3. 对唯一的哈密顿圈 H，有 $c(H) = 5$，而对 K_3 的唯一的 HWP 解 W 有 $c(W) = 4$

$$\text{极小化函数}\quad z_\pi = \sum_{i=1}^{p} d_{\pi(i),\pi(i+1)} \qquad \text{(TSP)}$$

(令 $p+1=1$)，其中 π 是整数 $1, \cdots, p$ 的任意置换 (见 [PAPA82a, p4; GARE79a, P211]). 但是这等价于考虑具有价格函数 $c^*: E(K_p) \to \mathbb{R}$ 的完全图 K_p，其中 $c^*(v_i, v_j) = d_{i,j}$，并且

找一个哈密顿圈 $H \subseteq K_p$，使得 $c^*(H)$ 最小. (TSP′)

然而，图 8.12 说明了解 (TSP′) 不等价于解 K_p 中的 HWP. 对于 HWP 和 (TSP′) 之间的这个差别理论上的理由在于 c^* 和 c 的定义.

定义 8.84　我们说一个价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 满足**三角不等式**，如果

$$c(x,y) \leqslant c(x,z) + c(z,y)$$

① 在 2- 物流的情况下，整 MFP 对某些特殊的图已在 [ROTH66a] 中被解决了，进而在 [FRAN85a] 中说明了整 MFP 对于每个奇顶点属于外面边界的平面图能用多项式时间解. 对于整 3- 物流问题的解见 [OKAM83a].

对每组 $x, y, x \in V(G)$ 成立，其中 $c(u,v) := \min\{c(P(u,v))\}$，最小取遍所有的路 $P(u,v) \subseteq G$，其中 G (不失一般性) 是连通的.

图 8.12 中 K_3 的价格函数不满足三角不等式；这就是为什么 (TSP′) 和 HWP 在这种情况下不是等价问题的原因. 另一方面，因为图 G 的每个哈密顿圈是 G 中的一个 $V(G)$- 覆盖途径，我们得到 (TSP′) 每个解 H 和 HWP 的每个解 W (在 K_p 中) 满足对任意非负价格函数 c，

$$c(H) \geqslant c(W) \tag{$*$}$$

(即不管 c 是否满足三角不等式).

命题 8.85 如果价格函数 $c: E(K_p) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 满足三角不等式，(TSP′) 的每一个解是 K_p 中关于 c 的一个 HWP 解.

证明 考虑 HWP 的一个解 W，假设 W 不是 K_p 的哈密顿圈，则我们能记 W 为一个边的序列：

$$W = \cdots, uv, vw, \cdots, xv, vy, \cdots,$$

其中 u, v, w, x, y 不必都不相同.

由三角不等式和 W 的选择，我们用 xy 代替 W 中的 xv 和 vy 段得到的 $V(G)$- 覆盖途径 W'，即

$$W' = \cdots, uv, vw, \cdots, xy, \cdots,$$

满足 $c(W') = c(W)$，即 W' 也是 HWP 的一个解. W' 比 W 含较少的边. 这样，如果必要，重复这个简化步骤，我们最终得到一个 $V(G)$- 覆盖途径 $W^{(i)}$ 满足 $c(W^{(i)}) = c(W)$，并且包含 K_p 的同一顶点不多于一次，即 $W^{(i)}$ 是一个哈密顿圈，它既是 HWP 的解也是 (TSP′) 的解 (见上面的 $(*)$). 因此，我们得到 (TSP′) 的每一个解是 HWP 的一个解. 这就结束了证明.

这样，我们对任意连通图 G 和任意价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 考虑 HWP. 类似于把 (CPP) 变换为 (CPP′) 中所做的 (见定理 8.70 后面的讨论)，我们定义 K_p 的顶点集 $V(K_p) = V(G) := \{v_i \mid i = 1, \cdots, p\}$ 和价格函数 c^*，

$$c^*(v_j v_i) = c_{i,j}, \quad \text{其中 } c_{i,j} = \min_{P(v_i, v_j)} c(P(v_i, v_j)) .$$

从 c^* 的意义得这个价格函数满足三角不等式. 由命题 8.85 和它的证明知，(TSP′) 的每个解在价格函数 c^* 下也是 K_p 的 HWP 的一个解，并且 K_p 的 HWP 的每个解能够变换为具有相同价格函数 c^* 的 K_p 中 (TSP′) 的一个解. 注意如果 $G = K_p$，并且如果 c 不满足三角不等式，那么 c^* 的定义相当于 K_p 某些边“降低价格”(注意 TSP 的这一性质蕴涵 G 可不失一般性地假定是简单的).

至于分别具有价格函数 c 和 c^* 的 G 中 HWP 的任意一个解 W 和 K_p 中 (TSP′) 的解，我们注意因为 $G \subseteq K_p$ 和 W 的选择，能把 W 看成 K_p 中的 $V(K_p)$-覆盖途径；$c|_{E(W)} = c^*|_{E(W)}$ 从必要性可得. 否则, 由 c^* 的定义，我们将有 $c(x_e y_e) > c^*(x_e y_e)$ 对某个 $e = x_e y_e \in E(W)$ 成立，这推出存在一条路 $P(x_e, y_e) \subseteq G$，使得 $c(P(x_e, y_e)) = c^*(x_e y_e)$；在 W 中用路 $P(x_e, y_e)$ 代替边 e 将得到一条 $V(G)$- 覆盖途径 W' 满足 $c(W') < c(W)$，矛盾.

我们断言 W 也是 K_p 中 HWP 的一个解, 因为具有价格函数 c^* 的 K_p 中 HWP 的任意解 W^* 对应于 G 中一条 $V(G)$- 覆盖途径 W_0，

$$W_0 := \sum_{j=1}^{m} P(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \ ,$$

其中 $m = \ell(W^*)$，并且对 $j = 1, \cdots, m$，

$$c(P(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})) = c^*(v_{i_j} v_{i_{j+1}}), \quad v_{i_j} v_{i_{j+1}} \in E(W^*)$$

(令 $m+1=1$). 由上所述及 W^* 的选择和 W_0 的构造，从而有

$$c(W) \leqslant c(W_0) = c^*(W^*) \leqslant c^*(W) \ .$$

这和 $c|_{E(W)} = c^*|_{E(W)}$ 一起蕴涵上面断言的有效性，进而可得具有价格函数 c^* 的 K_p 中 HWP 的任意解对应于 (由上面 W_0 的定义) 具有价格函数 c 的 G 中 HWP 的一个解.

综合命题 8.85 和其后的这些讨论，我们得到下述结果：

定理 8.86 设 G 是具有价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的连通图，并且设有具有价格函数 c^* 的 K_p 如上面所定义，$p = p_G$，则 G 中HWP的每个解 W 对应于 K_p 中 (TSP′) 的一个解 H，反之亦然，并且关于对应的价格函数 c 和 c^* 有 $c(W) = c^*(H)$.

换言之，解具有价格函数 c 的 G 中哈密顿途径问题，多项式地等价于解具有对应的价格函数 c^* 的 $K_p \supset G$ 中旅行推销员问题，$p = p_G$. 这个等价的详细情况能从 (CPP′) 的讨论 (见 SPP 和 EUL) 和上面 W_0 的构造得出. 因此，留下作为一个练习. 这样我们得到解中国邮递员问题和解旅行推销员问题 (分别地哈密顿途径问题) 之间的重要区别在于在 K_{2k} 中找一个 1- 因子 L，使得 $c^*(L)$ 最小和在 K_p 中找一个哈密顿圈 H，使得 $c^*(H)$ 最小之间的区别，其中 $2k = |V_{\text{odd}}(G)|$，并且 $p = p_G$. 然而，即使当 $c: E(K_p) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 时，(TSP) 也是 NP- 完全问题 (见 [GARE79a, P211])①.

① 通常 TSP 用这样的方法阐述：是否存在 H，使得 $c^*(H) \leqslant a$? 其中 a 是给定的 (正) 整数. 然而，这对上面的讨论没有任何影响.

然而，如果人们对找到 CPP 和 HWP 之间的结构区别更感兴趣，那么代替变换 HWP 为 (TSP′)，可寻求类似于关于邮递员环游的定理 8.67 的哈密顿途径的刻画. 事实上，定理 8.67 本身表达了这两个问题间的区别.

命题 8.87([GOOM74a, 引理 5a,6a]) 如果 W 是 G 的哈密顿途径，则 W 满足定理 8.67 的条件 1)~3)，同时满足这些条件的 $V(G)$- 覆盖途径不必是哈密顿途径.

命题 8.87 第一部分的证明能够从定理 8.67 的证明中提出，只要注意到 W 在 G 的连通支撑子图 $\langle E(W)\rangle$ 的母图中导出的欧拉迹即可 (写出详细过程作为一个练习). 第二部分证明从图 8.12 的例子可得，其中取 $W := x, xy, y, yz, z, zx, x$.

换言之，求解 G 的 HWP 相当于找 G 的一个连通的支撑子图 G'，并且双倍 G' 的某些边而得到一个欧拉图 $(G')^+$，使得 $c((G')^+)$ 是极小的. 这和命题 8.87 一起产生了哈密顿途径长度的下述界 (也见 [GOOM74a]，它只考虑了 $c \equiv 1$ 的情况):

推论 8.88 设 G 是具有价格函数 $c: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的连通图. 如果 W 是一条哈密顿途径，并且 W' 是 G 的一条邮递员环游，则 $c(W) \leqslant c(W') \leqslant 2c(G)$.

此外，因为在 G 的支撑树 B 中的一条双迹是一条 $V(G)$- 覆盖途径，并且因为确定具有极小 $c(B)$ 的 B 能够用多项式时间得到 (见定理 3.88b) 或 [PAPA82a, 定理 12.2])，我们得到 $c(B) \leqslant c(W) \leqslant 2c(B)$. 这些是 HWP 解的可用多项式时间确定的比较好的界.

我们注意对 $c \equiv 1$ 的情况，对一些特殊图类，如平面三角割分 [ASAN80a]、满足某些次条件的图 [BERO75c] 和直径为 d 的 n- 连通图 [GOOM74a]，已有更好的上界①. 进而，在后一篇文章中描述了一个程序，用它可把 G^+ 变换为对应于 G 的一条哈密顿途径的欧拉图 $(G')^+$，其中 G^+ 是 G 对应于一个给定的 PT 的欧拉母图.

关于将 TSP 描述为一个 ILP，可参见文献 [PAPA82a, p308]，进而对 TSP 的全面论述感兴趣的读者可参见文献 [LAWL85a]、20 世纪 60 年代后期到 80 年代初期，关于 TSP 研究的论述在 [PARK83a] 中给出. 最近对最多 1000 个顶点的图求解 TSP 的例子，见 [GRÖT88a].

8.3.2 有向邮递员问题

这里，出发点是强连通有向图 D 和价格函数 $c: A(D) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. **有向邮递员问题** (DPP) 是 (如在 CPP 的情况) 在 D 中找一条闭覆盖途径 W，使得 $c(W)$ 最小，并且满足 $c(K) = 0$ 的每一个圈 K 至少含在 W 中恰好出现一次的一条弧 (DPP). 称这样的 W 为一条**有向邮递员环游** (DPT).

---

① G 的直径用符号 diam(G) 表示，定义为 $\text{diam}(G) := \max\limits_{x,y \in V(G)} d(x,y)$，其中 $d(x,y)$ 是 G 中 x 和 y 之间的距离.

类似于无向图的情况，在 D 中构造这样的 W 需要加倍 D 的弧，以便得到一个欧拉有向图 D^+，使得 $c(D^+-D)$ 最小且 D^+-D 无圈. 又 D^+ 中的一条欧拉迹对应于 D 的一个 DPT. 与无向图的情况相反，严格类似于定理 8.67 的结果一般不成立. 因为如果 $|\mathrm{od}(v)-\mathrm{id}(v)|>2\min\{\mathrm{od}(v),\mathrm{id}(v)\}$ 对某个 $v\in V(D)$ 成立，则至少对一个 $a\in A_v$，D^+ 的构造产生 $\lambda_W(a)>2$. 为了建立类似于定理 8.67 的 DPT 的一个刻画，我们需要关于有向图的一个辅助结果. 为此，考虑一个有向图 D 和 $K\subset A(D)$，并且用 G_K 表示 $\langle K\rangle$ 的底图.

引理 8.89　设有向图 D 被记为两个弧不交的子有向图 D_r 和 D_b 的并，不失一般性，$V(D_r)=V(D_b)=V(D)$. 假设

$$\mathrm{diff}_{D_r}(v)=\mathrm{diff}_{D_b}(v),\quad v\in V(D) \tag{DIFF}$$

则或者 $A(D)=\varnothing$，或者 $A(D)$ 能分解成非空类 $K_i(1\leqslant i\leqslant m)$，使得

1) 对于 $i=1,\cdots,m$，G_{K_i} 是一个圈;

2) $D_{r,i}:=\langle A(D_r)\cap K_i\rangle\cup V(D)$ 和 $D_{b,i}:=\langle A(D_b)\cap K_i\rangle\cup V(D)$ 满足(DIFF)，$i=1,\cdots,m$ (用 $D_{r,i}$ 代替 D_r，并用 $D_{b,i}$ 代替 D_b).

证明　首先，对每个 $v\in V(D)$ 有 $d(v)\equiv 0 \pmod 2$; 这从 $A(D_r)\cap A(D_b)=\varnothing$ 和 (DIFF) 可得. 因此，我们得到若 $A(D)\neq\varnothing$，则 $A(D)$ 有一个分解 $S=\{K_1,\cdots,K_m;m\geqslant 1\}$，它的元素也满足 2). 为了看到存在这样的 S，它的元素也满足 2)，考虑任意使得 $d(v)=\Delta(D)$ 的 $v\in V(D)$.

如果 $\Delta(D)=2$，则对每个 C_i，$K_i=A(C_i)$ 是所需要的，其中 C_i 是 D 的弱连通分支. 因此，$S=\{K_i\mid C_i$ 是 D 的弱连通分支 $\}$ 是 $A(D)$ 的所需要的划分. 注意如果给 G_{K_i} 一个定向，并且在 $\langle K_i\rangle$ 中遵循着这个定向考虑一条途径 W，则

W 从 x 到 y(从 y 到 x) 通过 $(x,y)\in A(D_{r,i})$ 当且仅当 W 从 v 到 u(从 u 到 v) 通过每个 $(u,v)\in A(D_{b,i})$.　　(D)

因为 S 的元素满足 2)，上述结论可从 S 的元素满足 (DIFF) 得出.

考虑 $\Delta(D)>2$ 的情况. 为了应用(D)和(DIFF)，我们用 k_v 个 2- 次顶点如下代替 $d(v)=2k_v>2$ 的每个顶点 v: 首先分裂开弧对 $a^-,a^+\in A_v$，其中 $a^-\in A_v^-$，$a^+\in A_v^+$，并且 $\{a^-,a^+\}\subset A(D_r)$ 或 $\{a^-,a^+\}\subset A(D_b)$，直到这样的弧对不再可能. 然后分裂开弧对 $a_r,a_b\in A_v$，其中 $a_r\in A(D_r)$ 且 $a_b\in A(D_b)$. 从(DIFF)得到或者 $\{a_r,a_b\}\subset A_v^+$，或者 $\{a_r,a_b\}\subset A_v^-$. 在任何情况下，结束时的有向图 D' 满足 $\Delta(D')=2$，并且由构造，D' 也满足(DIFF).

由证明的第一部分，$A(D')$ 有一个分解 S'，它的元素是 D' 的弱连通分支的弧集，并且满足 1) 和 2)，因此，满足(D). 于是或者 S' 对应于 $A(D)$ 的一个分解 S，使得 S 的每个元素满足 1) 和 2)，或者对某个 $K'\in S'$ 和某个 $v\in V(D)$ 有

$|K' \cap A_v| > 2$. 在后一种情况下，我们可记

$$K' = K'_i \cup K'_j, \quad K'_i \cap K'_j = \varnothing ,$$

使得 $\{v_i, v_j\} = V(\langle K'_i \rangle_{D'}) \cap (\langle K'_j \rangle_{D'})$，其中 v_i, v_j 是 k_v 个对应于 $v \in V(D)$ 的 2- 次顶点中的两点. 因此，通过等同 v_i 和 v_j，我们从 D' 得到 D''. D'' 也满足(DIFF)，并且由 (D)

$$S'' := (S' - \{K'\}) \cup \{K'_i, K'_j\}$$

是 $A(D'')$ 满足 1) 和 2) 的一个分解 (至于对 D_r，$D_b \subseteq D$，我们假定它们与 D, D' 一起被变换了 ……). 现在我们用 D'' 和 S'' 代替 D' 和 S' 如上论证 …… 经过 $j \leqslant \sum\limits_{v \in V(D)} k_v$ 步后，我们最后得到满足 1) 和 2) 的 $A(D^{(j)})$ 的一个分解 $S^{(j)}$，它对应于 $A(D)$ 的一个所需要的分解 S，可能有 $D^{(j)} = D$. 引理得证.

我们作下面的注解，其证明留作练习.

a) 如果 S 是满足引理 8.89 的 1) 和 2) 的 $A(D)$ 的一个分解，则 D_r 和 D_b 满足 (DIFF).

b) 如果 D 是弱连通的，则 (DIFF) 是 D 中存在一条闭覆盖弧序列 T_D 的充分必要条件，其中 T_D 对应于底图 G_D 的一条欧拉迹 T，使得 T_D 从 x 到 y 通过每个 $(x, y) \in A(D_r)$，同时从 v 到 u 通过每个 $(u, v) \in A(D_b)$. 这样 T_D 可看成欧拉迹和反有向欧拉迹之间的概念 (见定义 6.20).

c) 引理 8.89 和 a),b) 一起推广了定理 4.8. 因为如果 $A(D_b) = \varnothing$，则由 (DIFF) 导出 $\mathrm{id}_D(v) = \mathrm{od}_D(v)$.

现在我们能够用类似于定理 8.67 的方法刻画 DPT. 回忆 $\lambda_W(a)$ 表示 $a \in A(D)$ 在途径 W 中出现的次数.

定理 8.90　对于具有价格函数 $c: A(D) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的强连通有向图 D，设 W 是 D 的一条闭覆盖途径，并且设 $D_0 := \langle \{a \in A(D) \mid \lambda_W(a) > 1\} \rangle$. W 是一个 DPT 当且仅当它有下面的性质:

1) D_0 是无圈的;

2) 对每个使得 G_K 是一个圈的 $K \in A(D)$ 有

$$c(D_{r,K}) \leqslant \frac{1}{2} c(K) ,$$

其中支撑 $D_{r,K} \subseteq \langle K \cap A(D_0) \rangle \cup V(D)$ 和 $D_{b,K} \subseteq \langle K - A(D_{r,K}) \rangle \cup V(D)$ 满足引理 8.89 的条件 (DIFF).

证明　假设 W 是一个 DPT. 类似于定理 8.67 的证明，通过加倍 D 的弧，构造欧拉有向图 $D^+ \supseteq D$，使得 W 对应于 D^+ 的一条欧拉迹 T^+，并且扩充 c 到 $A(D^+)$.

假设 D_0 含圈 C. $D_1^+ := D^+ - A(C)$ 含 D 的一个同构象且是欧拉的，D_1^+ 的一条欧拉迹 T_1^+ 对应于 D 的一条闭覆盖途径 W_1. 因为 W 是一个 DPT，我们必有

$$c(W) = c(T^+) = c(D^+) = c(D_1^+) = c(T_1^+) = c(W_1),$$

并且有 $c(C) = 0$. 这与 (DPP) 的要求矛盾，从而 1) 成立.

为了看出 2) 也成立，我们考虑对应的弧集 $K \subset A(D)$，并设 D^+ 如上所述，通过在 D^+ 中对每个 $a \in A(D_{r,K})$ 删去对应于 a 的一条弧且对每个 $a' \in A(D_b, k)$ 增加一条额外的平行弧形成 D_2^+，从而如果 $K, D_{r,K}, D_{b,K}$ 分别满足 (DIFF)，则 D_2^+ 是欧拉的. 因为这个条件意味着在从 D^+ 到 D_2^+ 的变换中，在任意顶点，入次和出次都增加 1 或减少 1，或保持不变，并且 D^+ 是欧拉的. 变换 D_2^+ 的一条欧拉迹 T_2^+ 为 D 的一条闭覆盖途径 W_2，从 W 的选择和 W_2 的构造得

$$c(W_2) = c(W) - c(D_{r,K}) + c(K - A(D_{r,K})) \geqslant c(W) \ .$$

这蕴涵

$$2c(D_{r,K}) \leqslant c(K) \ ,$$

即 2) 也成立.

类似于定理 8.67 的证明，现在考虑一个为 DPT 的 W 和满足 1) 和 2) 的一条闭覆盖途径 W_1；设 D^+ 和 D_1^+ 分别是对应于 W 和 W_1 的 D 的欧拉母有向图. 对每个 $v \in V(D) = V(D^+ - A(D)) = V(D_1^+ - A(D))$，我们有

$$\operatorname{diff}_{D^+ - A(D)}(v) = \operatorname{diff}_{D_1^+ - A(D)}(v) = -\operatorname{diff}_D(v) \ . \tag{1}$$

定义

$$D_r := D^+ - A(D), \quad D_b := D_1^+ - A(D) \ ,$$

并且把 D_r 和 D_b 看成弧不交的有向图，定义

$$\bar{D} := D_r \cup D_b \ .$$

由定义和 (1) 知，$\bar{D}, D_r, D_b$ 满足引理 8.89 的假设. 这样如果 $A(\bar{D}) = \varnothing$，则 $c(W) = c(W_1)$ 且 W_1 也是一个 DPT. 假设 $A(\bar{D}) \neq \varnothing$，设 S 是如同引理 8.89 的 1) 和 2) 所描述的 $A(\bar{D})$ 的一个分解，并且考虑任意的 $K_i \in S$ 和在引理 8.89 中所定义的 $D_{r,i}, D_{b,i}$，进而设 $D_0 = \langle \{a \in A(D) \mid \lambda_W(a) > 1\} \rangle$，$D_0^1 = \langle \{a \in A(D) \mid \lambda_{W_1}(a) > 1\} \rangle$. 在 D 中考虑对应于 K_i 的弧集 K. 如果 $|K| = 1$，则 $K \subset A(D_0) \cap A(D_0^1)$，并且

$$c(D_{r,K}) = c(D_{b,K}) = \frac{1}{2}c(K_i) \ , \tag{2}$$

其中 $D_{r,K}$ 对应于 $D_{r,i}$，$D_{b,k}$ 对应于 $D_{b,i}$.

如果 $|K|>1$，则 G_K 是一个圈，并且由定义有

$$A(D_{r,K}) \subseteq K \cap A(D_0), \quad A(D_{b,K}) \subseteq K \cap A(D_0^1)\,, \tag{3}$$

其中 $D_{r,K}$ 对应于 $D_{r,i}$，$D_{b,k}$ 对应于 $D_{b,i}$.

注意对某个 $K_i \in S$ 某些 $a \in D_0 \cap D_0^1 \cap K$ 可能被计算在 $A(D_{r,i})$ 中，但不计算在 $A(D_{b,i})$，反之亦然. 这从 $\bar{D}$ 和 S 的定义可得. 可是因为 $D_{r,K}$ 和 $D_{b,K}$ 满足 (DIFF)，从而 $D_{r,k}$ 和 $D_{b,k}$ 也满足 (DIFF). 同理，我们可以同样地设 $D_{r,K}$ ($D_{b,K}$) 对应于 $D_{b,i}$ ($D_{r,i}$)，这样得到

$$A(D_{r,K}) \subseteq K \cap A(D_0^1), \quad A(D_{b,K}) \subseteq K \cap A(D_0)\,. \tag{4}$$

已经证明了 DPT W 满足 1) 和 2)，并且由假设知，W_1 有这些性质，所以从 (3) 和 (4)，我们得到

$$c(K) \geqslant c(D_{r,K}) + c(D_{b,K}) = c(K_i) = c(K),$$

即 $D_{r,K}$ 和 $D_{b,K}$ 在 G_K 是圈的情况也满足 (2). 对 S 的每一个元素证明了 (2)，我们从

$$A(D_r) \cup A(D_b) = \bigcup_{K_i \in S} K_i$$

(其中这些并是弧不交的) 得到

$$c(D_r) = c(D_b).$$

因此，

$$c(W) = c(D) + c(D_r) = c(D) + c(D_b) = c(W_1),$$

即 W_1 是一个 DPT (注意 D_0^1 的无圈性自动保证了 (DPP) 第二部分的有效性). 这就结束了定理的证明. 我们注意到定理 8.90 曾在 [FLEI90b] 中发表过，进而 $A(D)$-覆盖途径的某些类型曾在 [BOGN87a] 中研究过.

可是，如同把 (CPP) 化为 (CPP$''$) 相同的方法，可以把 (DPP) 化为 ILP，即 (见 [EDMO73a,KOHK74a])，

$$\begin{cases} \text{求} x_a \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ a \in A(D), \\ \text{使得} \displaystyle\sum_{a \in A(D)} c(a) x_a \text{ 极小}, \\ \text{约束条件为} \displaystyle\sum_{a \in A_v^+} x_a - \sum_{a \in A_v^-} x_a = \mathrm{id}(v) - \mathrm{od}(v) \\ \text{且} \displaystyle\sum_{a \in A(D)} x_a \text{ 极小}. \end{cases} \tag{DPP$'$}$$

注意第二个约束保证只要 $c(a) = 0$，x_a 不会变得不必要得大. 因此，也保证了 $H = \langle\{a \in A(D) \mid x_a > 0\}\rangle$ 是无圈的. 话虽这样说，但这个约束还是不起决定性影响. 这个约束在 [EDMO73a] 中不出现是因为作者没有额外要求 DPT 要含尽可能少的弧 (也见 [KOHK74a, 引理]). 这样，如果这个约束被省去，上面定义的 H 可能含圈，相继消去这些圈的弧集而得到 D 的一个适当的不含圈的子有向图是一个多项式问题. 记住这一点，我们将 (DPP′) 作为运输问题的特殊情况 (见 [BERG62a,p207] 和 p.III.72)，其中弧有无限容量且源和汇被消去.

然而，用类似于 (CPP′) 的方法 DPP 可以处理为匹配问题. 这种方法背后的思想能由命题 8.26 的证明中提炼出来，并且类似于从 (CPP) 到定理 8.68 和定理 8.70 的转换.

从命题 8.26 的证明我们知道，如果对某个 $v \in V(D)$ 有 $\mathrm{diff}(v) > 0$，则存在 $w \in V(D)$，使得 $\mathrm{diff}(w) < 0$ 和路 $P(w,v) \subseteq D$ (因为 D 是强连通的)，使得从 D 通过加倍 $P(w,v)$ 的弧新得的 D_1 满足

$$\sum(D_1) := \sum_{v\in V(D_1)} |\mathrm{diff}(v)| < \sum(D) := \sum_{v\in V(D)} |\mathrm{diff}(v)|,$$

即我们能够通过相继加倍某些路上的弧构造欧拉有向图 D^+；这就保证了 (DPP′) 的一个解. 可是因为一般这些路不可能选择为弧不交的 (见引理 8.89 前面的讨论)，因此，要确定辅助图中一个匹配的边所对应的路时，当与定理 8.70 和 (或) (CPP′) 中 K_{2k} 的定义比较时，就要求修改这个图的定义. 为此目的，对每个满足 $\mathrm{diff}_D(v) \neq 0$ 的顶点 $v \in V(D)$，使之与 $\delta_v := |\mathrm{diff}_D(v)|$ 个顶点 $v_1, \cdots, v_{\delta_v}$ 关联. 这样得到两个顶点集合

$$V^+ := \bigcup_{\substack{v\in V(D)\\ \mathrm{diff}_D(v)>0}} \{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \delta_v\}, \quad V^- := \bigcup_{\substack{v\in V(D)\\ \mathrm{diff}_D(v)<0}} \{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \delta_v\}.$$

因为

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{v\in V(D)} \mathrm{diff}_D(v) &= \sum_{v\in V(D)} \mathrm{od}(v) - \sum_{v\in V(D)} \mathrm{id}(v) \\ &= \sum_{\substack{v\in V(D)\\ \mathrm{diff}_D(v)>0}} \mathrm{diff}_D(v) + \sum_{\substack{v\in V(D)\\ \mathrm{diff}_D(v)<0}} \mathrm{diff}_D(v), \end{aligned}$$

从而 $|V^+| = |V^-|$. 记 $m := |V^+|$.

现在考虑 $K_{m,m}$，它有 $V(K_{m,m}) = V^+ \cup V^-$，并且有价格函数 $c^* : E(K_{m,m}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，这里由 c 导出 c^* 的方法类似于图的情况，即

$$c^*(v_i w_j) = \min\{c(P(w,v))\},$$

其中

$$v_i \in V^+, \quad w_j \in V^-, \quad 1 \leqslant i \leqslant \delta_v,\ 1 \leqslant j \leqslant \delta_w\ ,$$

并且极小取遍所有从 w 到 v 的 (有向) 路，$\text{diff}(w) < 0$，$\text{diff}(v) > 0$.

我们的下一个结果基本上与 [KOHK74a, 引理和定理] 相同.

定理 8.91 设 D 是具有价格函数 $c: A(D) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的强连通有向图，并且设 $K_{m,m}$ 具有上述定义的价格函数 c^*. 设 D^+ 是从 D 加倍 D 的某些弧所得到的欧拉有向图，使得 $H := D^+ - A(D)$ 无圈，则下面的结论等价 (c 扩充到 $A(D^+)$，也见定理 8.70 和其后的一段).

1) $c(H)$ 是极小的;

2) $A(H)$ 可分解为 m 条路 $P_1, \cdots, P_m$，它们对应于 $K_{m,m}$ 的一个使得 $c^*(L)$ 极小的 1- 因子 L.

证明 因为 D^+ 是欧拉的，在任意情况下，我们都有

$$\text{diff}_D(v) = -\text{diff}_H(v), \quad v \in V(D) = V(H), \tag{1}$$

并且 H 是无圈的. 从 H 通过用下面的方法分裂 H 的顶点构造一个有向图 H^*.

a) 无论何时只要 $\text{diff}_H(v) = 0$，就将 v 分裂成 $\text{id}_H(v) = \text{od}_H(v)$ 个 2 次顶点 v_i，而每一个 v_i 有 $\text{id}(v_i) = \text{od}(v_i) = 1 (i = 1, \cdots, \text{od}_H(v))$.

b) 如果 $\text{diff}_H(v) > 0$，就将 v 分裂为 δ_v 个一次顶点 v_i 和 $(\text{od}_H(v) - \delta_v)$ 个如 a) 所描述的 2 次顶点，其中一次点 $v_i (i = 1, 2, \cdots, \delta_v)$ 是 H^* 的源，而 $\delta_v = |\text{diff}_H(v)|$.

c) 如果 $\text{diff}_H(v) < 0$，类似地，产生 H^* 的 δ_v 个汇和 $(\text{id}_H(v)) - \delta_v)$ 个 a) 中所描述的 2 次顶点.

由构造及 H 是无圈的，则 H^* 的每一个 (弱连通) 分支是非平凡的路或一个孤立顶点，即 H^* 有路分解 $S_P := \{P_1, \cdots, P_n\}$，因为 H 是无圈的，它恰好也是 H 的一个路分解，进而由 H^* 的构造，每个 $P_j (j = 1, \cdots, n)$ 连接某个满足 $\text{diff}_H(x) > 0$ 的 x 和某个满足 $\text{diff}_H(y) < 0$ 的 y. 每一个这样的 x (y) 恰好是 S_P 中 δ_x (δ_y) 条路的起 (终) 点. 由此并因为

$$\sum_{\text{diff}_H(x) > 0} \delta_x = \sum_{\text{diff}_H(y) < 0} \delta_y\ ,$$

我们利用 (1) 和 m 的定义，就得到等式

$$m = n, \tag{2}$$

进而 S_P 中元素的结构允许 S_P 与 $K_{m,m}$ 的整个 1- 因子的族 L 相联系. 因此，如果 $P_{i_1}, \cdots, P_{i_{\delta_v}} \in S_P$，它们都以 v 作为起 (终) 点，则可以任意地将它们与一些关联 $v_1, \cdots, v_{\delta_v} \in V^-$ (V^+) 的边相联系，唯一的限制是如果 P_{ik} 有 w 作为它的终

(起) 点，并且已经与 $e \in E_{v_r}$ 相联系，$\{r,k\} \subseteq \{1,\cdots,\delta_v\}$，则 $e \in \bigcup_{s=1}^{\delta_w} E_{w_s}$ 也必须成立，其中 $w_1,\cdots,w_{\delta_w} \in V^+$ (V^-). 然而，如果 $P_{ik} \in S_P$ 已经与 $e \in L$ 联系，则 $c(P_{i_k}) > c^*(e)$ 可能成立. 在任何情况下，由 c^* 的定义，$c(P_{i_k}) < c^*(e)$ 是不可能的，因此，我们得到

$$c(H) \geqslant c^*(L) \tag{3}$$

对 $K_{m,m}$ 的与 H 的任意路分解 S_p 联系的任意 1- 因子 L 成立.

反之，如果 L 是 $K_{m,m}$ 的任意 1- 因子，并且如果对每个 $a \in A(D)$ 增加 $\lambda_a - 1$ 条平行弧，其中 λ_a 是含 a 并且对应于 L 中边的路的数目，则所导出的有向图 D^+ 是欧拉的. 这恰好从 $K_{m,m}$ 的构造，c^* 的定义及 L 是 $K_{m,m}$ 的 1- 因子可得，进而 D^+ 的构造保证了 $H := D^+ - A(D)$ 的一个路分解 S_p，使得 S_p 的元素与 L 的元素 1-1 对应. 这样我们也有

$$c(H) = c^*(L)\ . \tag{4}$$

现在由 (3) 和 (4) 立刻推出 1) 和 2) 的等价性，这就证明了定理.

定理 8.91 和它的证明直接导出了在强连通有向图 D 中一条闭覆盖途径是一个 DPT 的判别准则，它类似于定理 8.70. 但是上面的证明也导出了类似于 (CPP′) 的 DPP 的算法描述，并且它揭示了 (见 (CPP′) 后面的讨论) 求解 DPP 多项式等价于找一个 1- 因子 $L \subseteq K_{m,m}$，使得 $c^*(L)$ 最小 [KOHK74a, PAPA76a]，并且对一个 DPT W 有

$$c(W) = c(D) + c^*(L) = c(D) + c(H) \tag{*}$$

$(H := D^+ - A(D)$ 且 $c(H)$ 最小). 找这种类型的 L 的一种方法是将这个问题表述为线性规划问题的**指派问题** (AP). 叙述如下: *指派 m 个人 v_i 做 m 件工作 w_i，使每个人恰好做一件工作，并且每件工作恰好一个人去做，人 v_i 做工作 w_j 的费用是 $c^*(v_iw_j) \geqslant 0 (1 \leqslant i,j \leqslant m)$. 寻找这样一个指派方案，使得完成这 m 件工作所需的总费用极小*. 与上面 $K_{m,m}$ 中的 1- 因子问题的等价性是明显的，AP 可以重叙为如下的线性规划问题:

对 $1 \leqslant i,j \leqslant m$，给定 $c_{i,j} \geqslant 0$，求 $x_{i,j} \geqslant 0$，

$$\begin{cases} \text{使得} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} c_{i,j}x_{i,j} \ \text{最小}, \\ \text{约束条件为} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = 1 \ \text{和} \ \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = 1 \end{cases} \tag{AP}$$

(如见 [KOHK74a, 注记; FORD62a,p111; PAPA82a,p248; SYSL83a,p74])①. 事实

① 在 [KOHK74a] 的主要部分中，作者化 (AP) 到一个最小价格最大流问题.

上, (AP) 能用 $O(m^3)$ 次运算求解. [PAPA82a, 定理 11.1](对于 (AP) 的多项式时间可解性的更早说明见 [KOHK74a, PAPA76a]).

有趣的是, 上面的等式 (*), 即通过加倍 D 的某些弧找一个欧拉的 D^+, 对 $H = D^+ - A(D)$, 使得 $c(H)$ 最小, 已经在 [VIZI69a, 定理 2] 中讨论过了, 但只对 $c \equiv 1$ 的情况. 在同一篇文章中证明了如果对每个 $v \in V(D)$, $\mathrm{od}(v) = m$, 则一个 DPT 至多含 $P_D + (m-1)\binom{P_D+1}{2}$ 条弧[1], 而在任意有向图中一个 DPT 至多含 $[\binom{P_D+1}{2}^2]$ 条弧 (定理 3 和定理 4). 也证明了对应的最小圈覆盖问题与 DPT 有同样"长度"(定理 1); 对于具有任意价格函数 c 的有向图将证明这是真的 (注意与图的情况的区别). 这些结果中的大多数已推广到连接不同顶点 $a, b \in V(D)$ 的极小开覆盖途径 [GRUN73a]. 在每一种情况下, D 是强连通的.

8.3.3 混合邮递员问题

类似于 CPP 和 DPP 的情况, 对于**混合邮递员问题** (MPP), 人们考虑一个具有价格函数 $c: E(H) \cup A(H) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的混合图 H, 并且试图找 H *的一条闭覆盖途径* W, *使得* $c(W)$ *最小, 并且* W *含尽可能少的边和弧*(MPP). 称这样的 W 为一个**混合邮递员环游**(MPT).

在 DPP 的情况下, 如果 H 仅是弱连通的, 则对 H, MPP 可能没有解. 然而, 从下面的结果知, 检查 H 的 MPP 是否有解在算法上是容易的 (也见 [EDMO73a]).

命题 8.92 对于混合图 H, 下面的结论等价:

1) 对 H 的 MPP 有解;

2) 从 H 通过用弧 (x, y) 和 (y, x) 代替每个 $xy \in E(H)$ 得到的有向图 D_H 是强连通的;

3) 对每个非空 $X \subset V(H)$, 如果 $e(X) = 0$, 则 $a^+(X) \neq 0 \neq a^-(X)$.

证明 设 W 是 H 的 MPP 的一个解. W 导出 D_H 中闭的 $V(D(H))$- 覆盖途径 W_D. 因为由定义 $V(D_H) = V(H)$, 这一点足以保证 D_H 是强连通的. 因此, 1) 蕴涵着 2). 注意 W_D 不必覆盖 D_H 的所有弧.

对某个 $X \subset V(H)$, $X \neq \varnothing$, 假设 $e(X) = 0$, 并且不失一般性, 假设 $a^+(X) = 0$. 因为 $V(D_H) = V(H)$ 和 $e(X) = 0$, 这样对于 D_H, $a^+(x) = 0$. 因此, 在 D_H 中, 不存在从任意 $x \in X$ 到任意的 $y \in V(D_H) - X$ 的路. 因为 $X \neq \varnothing \neq V(D_H) - X$, 从而 D_H 不是强连通的. 因此, 我们得出 2) 蕴涵 3).

如果 H 满足 3), 则在 2) 中定义的 D_H 是强连通的; 否则, 存在 $x, y \in V(H) = V(D_H)$, 使得在 D_H 中不存在从 x 到 y 的路, 并且 X (从 x 有路可达的顶点集) 满足 $\varnothing \neq X \neq V(H)$, 并且在 D_H 中 $a^+(X) = 0$. 由 D_H 的构造得在 H 中已有

---

[1] 注意这种类型的 D 能够解释为在具有 m 个字母的输入字母表的 P_D 个状态上一架自动机的下次状态函数.

$e(X) = 0 = a^+(X)$，矛盾. 这样 D_H 是强连通有向图，导出 D_H 有一条闭覆盖途径，它导出了 H 中的一条闭覆盖途径. 因为 c 是非负的，所以 H 有一条使得 $c(W)$ 最小的闭覆盖途径 W，即对 H 存在一个 MPP 的解. 这样 3) 蕴涵 1). 命题 8.92 结论成立.

在以下的讨论中，令 D_H 如命题 8.92 结论 2) 中所定义，进而假定 D_H 的价格函数 c_D 从 H 的价格函数 c 用下面的方法得到:

若 $a \in A(H)$, 则 $c_D(a) = c(a)$;

若 $xy \in E(H)$, 则 $c_D((x,y)) = c_D((y,x)) = c(xy)$.

这样 c_D 非负且有定义域 $A(D_H)$.

推论 8.93 设 H 是混合图，D_H 是强连通的，并且设 c 和 c_D 分别是它们的价格函数. 设 W_H 和 W_D 分别是 H 的MPP 和 D_H 的DPP的解，则 $c(W_H) \leqslant c_D(W_D)$.

证明 从假设和命题 8.92 得 W_H 和 W_D 存在. W_D 是 D_H 的一条闭覆盖途径，并且导出 H 中的一条闭覆盖途径 W_0，使得 $c(W_0) = c_D(W_D)$. 由 MPT 的定义，$c(W_H) \leqslant c(W_0) = c_D(W_D)$，这就证明了推论.

我们注意对一个有价格函数 c 的混合图 H，MPP 的一个解 W 不仅使对某个 $a \in A(H)$ 可能有 $\lambda_W(a) > 2$，而且对某个 $e \in E(H)$ 也可能有 $\lambda_W(e) > 2$. 然而下面的结论是正确的 [MINI79a, 引理 1].

引理 8.94 如果一个 MPT W 在两个方向用 $e \in E(H)$，则它恰用一次.

证明 通过加倍弧和用弧 (x,y) 和 (或)(y,x) 代替边 xy，并且也加倍这些新弧，能将 H 变换为一个有向图 D^+，使得 W 对应于 D^+ 的一条欧拉迹 T^+，并且 $c^+(T^+) = c(W)$，其中 c^+ 的定义类似于 c_D 的定义 (推论 8.93 前面的一段). 现在如果 $\lambda_W(xy) > 2$，并且对应于 xy 的形如 (x,y)，(y,x) 的弧属于 $A(D^+)$，从 $A(D^+)$ 中消去一条弧 (x,y) 和一条弧 (y,x) 产生一个弱连通欧拉有向图 $D_1^+ \subset D^+$. 于是 D_1^+ 的一条欧拉迹 T_1^+ 对应于 H 的一条闭覆盖途径 W_1. 因此，我们得到 $c(W_1) = c(W)$，并且因为 W 是 H 的 MPP 的一个解，因此，$c(xy) = 0$. 然而，同理，因为 W_1 比 W 含较少的边和弧，我们得到矛盾，这样被 W 用多于两次的边只在一个方向被用. 引理 8.94 得证.

如在引理的证明中所看到的，一般不能得出结论 $\lambda_W(e) \leqslant 2$ 的理由在于下面的事实: 一条边 e 的定向可能隐含地由 H 的结构或至少由 W 是一个 MPT 决定的.

从推论 8.93 和引理 8.94 知，如果在 H 中通过的边的价格比通过的弧的价格小，并且如果 $|E(H)|$ 小，则在 D_H 中导出的 DPT W_H 产生 MPP 的一个相当好的近似解. 因为一般地，如果 W_H 是 H 中的一个 MPT，并且 W_D 在对应的 D_H 中是一个 DPT，并且如果用 W_H' (W_D') 表示 H (D_H) 中对应 W_D (W_H) 的闭途径，则我们得到下面的不等式:

$$c(W_H) \leqslant c(W'_H) = c_D(W_D)$$
$$\leqslant c_D(W'_D) + 2\sum c(e) = c(W_H) + 2\sum c(e) \ , \qquad (\circ)$$

其中和取遍所有被 W_H 仅在一个方向用过的边 $e \in E(H)$，并且不等式的右端表示 D_H 中某条闭覆盖途径的长度. 注意一般地，W'_D 不是 D_H 中的一条闭覆盖途径. 然而，通过把 ($\circ$) 中和式考虑的边对应的二边形连接起来，它就能扩充为这样一条闭覆盖途径，进而 W_D 可用多项式时间找到. 这一点是很有意义的. 这是因为已经证明了即使 H 是平面的，对所有的 $v \in V(H)$，$d(v) \leqslant 3$ 且 $c \equiv 1$，MPP 是 NP- 完全的 [PAPA76a, 定理 1 和 2]. 另一方面，同一篇文章含有一个多项式时间算法，对于一给定的混合图 H，构造了一个最小可能的满足 $V(H^+) = V(H)$，$E(H^+) = E(H)$ 的欧拉混合图 $H^+ \supseteq H$.

在任何情况下，混合图 H 中的任意一条闭覆盖途径 W 对应于满足下面条件的一个欧拉有向图 D^+ 中的一条欧拉迹 T^+：

$$\begin{cases} V(D^+) = V(H),\ A(D^+) \supseteq A(H), \\ (u,v) \notin A(D_H) \to (u,v) \notin A(D^+), \\ |(A(D^+) - A(H)) \cap A(D^+)_x \cap A(D^+)_y| \geqslant |E(H) \cap E_x \cap E_y| \ , \end{cases} \qquad (\mathrm{D}^+)$$

即 D^+ 中每个 $xy \in E(H)$ 用 (x,y) 和 (或) (y,x) 表示. 又 $x=y$ 是可能的 ($A(D^+)_z$ 表示在 D^+ 中与 z 关联的弧集，而 E_z 表示在 H 中与 z 关联的边集)，进而任意满足(D^+)的 D^+ 中的欧拉迹对应于 H 中的一条闭覆盖途径. 可是如果 D_H 是强连通的，寻找满足 (D^+) 的欧拉有向图 D^+ 不需要知道 H 中一条闭覆盖途径 (命题 8.92). 另一方面，如果 W 是一个 MPT，它可能仅在一个方向用某边 $e \in E(H)$，因此，对于对应于 W 的 D^+ (并且满足(D^+))，我们可以有 $D_H \not\subseteq D^+$ (见推论 8.93，引理 8.94).

满足 (D^+) 的一个欧拉有向图 D^+ 称为一个 ***H*- 吸收欧拉有向图**①，并且假设 $c: E(H) \cup A(H) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 已用显然的方法扩充到 $A(D^+)$. 从这样的 D^+ 的定义得

在 H 中找一个MPT等价于确定具有最小的 $a(D^+)$ 的一个 H- 吸收欧拉有向图 D^+，并使得 $c(D^+)$ 最小 D^+. (MPP′)

在这样的 D^+ 中的一条欧拉迹对应于 H 中的一个 MPT.

引理 8.95 如果 D^+ 是对应于 H 的 MPP 的一个解的 H- 吸收有向图，则 D^+ 不含为 H- 吸收的真欧拉子图.

证明 假设存在一个 H- 吸收欧拉有向图 $D_1^+ \subset D^+$，D_1^+ 对应于 H 中的一条

① 在 [KAPP79a] 中这样的 D^+ 称为一个指派欧拉网络.

闭覆盖途径 W_1，因为 D^+ 对应 H 中的一个 MPT W，并且因为 $D_1^+ \subset D$，我们有

$$c(W_1) = c(D_1^+) \leqslant c(D^+) = c(W) \leqslant c(W_1),$$

即

$$c(W_1) = c(W)\ .$$

然而，$a(D^+ - A(D_1^+)) > 0$ 说明了 $a(D^+)$ 不是极小的，这就破坏了 (MPP′). 引理得证.

另一方面，H 中的一个 MPT W 确定了一个有向图 $D(H) := D_W \subseteq D_H$，它满足($D^+$) (用 $D(H)$ 代替 D^+) 并且含尽可能少的弧. W 对应于 D_W 中的一条闭覆盖途径 W_D. 因此，除了 $A(H)$ 以外，对每个 $e \in E(H)$，D_W 仅含一条弧或两条相反方向的弧 (见引理 8.94). 因此，W 和 W_D 对应于 D^+ 中同一条欧拉迹，并且 W_D 是 $D(H)$ 的 DPP 的一个解，它对应于 H- 吸收欧拉有向图 $D^+ \supseteq D(H)$.

相反地，对给定的 H- 吸收欧拉有向图 D^+，总能确定如上的至少一个子有向图 $D(H) \subseteq D^+$. 这从(D^+) 和 D^+ 的结构可得. 可是对于 $D(H)$ 中的一个 DPT W_D，我们可能有

$$c(W) < c_{D(H)}(W_D) < c(D^+)\ ,$$

其中 $c_{D(H)} = c_D|_{A(D(H))}$，并且 W 是 H 中的一个 MPT. 但在任何情况下，这些讨论把 (MPP) 化为求解

$$\min_{D(H)\subseteq D_H}\{\min_{W}\{c_{D(H)}(W) \mid D(H) \text{ 满足 } (\mathrm{D}^+)\}\}\ , \qquad (\mathrm{MPP}'')$$

其中 W 是 $D(H)$ 中的一条闭覆盖途径.

然而，解 (MPP″) 要求至多对 $3^{|E(H)|}$ 个有向图 $D(H)$ 解 DPP. 为了解 (MPP′)，解 (MPP) 的一个略有不同的方法在于缩小 H- 吸收欧拉有向图的范围；这在[KAPP79a]中实现了. 为了这个目的，考虑任意 H- 吸收欧拉有向图 D^+，定义 $\lambda_{D^+}(f)$ 为 D^+ 中对应于 $f \in E(H) \cup A(H)$ 的弧的数目，并且设

$$\bar{D}^+ := D_H \cap D^+ - \{a_f \in A(D_H) \mid \lambda_{D^+}(f) = 1\}, \qquad (1)$$

其中如果 $f \in A(H)$，则 $a_f = f$；否则，a_f 对应于 $f \in E(H)$. 比较 $\bar{D}^+$ 和定理 8.90 中 D_0 的定义，我们注意 $\bar{D}^+ = D$. 当且仅当 $|A(\bar{D}^+) - A(H)| = |\{e \in E(H) \mid \lambda_{D^+}(e) > 1\}|$ (其中 D^+ 的一条欧拉迹对应于导出 D_0 的 H 中的一条闭覆盖途径).

假设 $\bar{D}^+$ 有一个圈 $\bar{C}$ 使得或者 $\bar{C}$ 是 H 在某个定向的圈，或者 $\lambda_{D^+}(f) > 2$，其中 $f \in E(H)$ 在 D_H 中用 $\bar{C}$ 中两条相反方向的弧表示. 设 $D_1^+ := D^+ - A(C)$，其中 $C \subset D^+ - D_H^-$ 对应于 $\bar{C}$，并且 D_H^- 是 H 的某一个定向. 又相应地，定义 $\bar{D}_1^+$

(在 (1) 中用 D_1^+ 代替 D^+). 从 $\bar{C}$ 的选择得 D_1^+ 也是 H- 吸收欧拉有向图，并且 $c(D_1^+) \leqslant c(D^+)$. 重复这个过程，我们最终得到 H- 吸收欧拉有向图 $D_i^+ (i \geqslant 1)$，使得相应定义的 $\bar{D}_i^+$ 有性质：$\bar{D}_i^+ \cap \langle A(H) \rangle$ 是无圈的，并且 $\bar{D}_i^+ - A(H)$ 的每个圈是对应于 $e \in E(H)$ 的二边形 C_e，其中 $\lambda_{D_i^+}(e) = 2$，即 $\bar{D}_i^+$ "几乎" 满足定理 8.90 的性质 1). 在任何情况下，$c(D_i^+) \leqslant c(D^+)$.

对于第二个简化步骤，假设上面的 $\bar{D}_i^+$ 含两条弧不交的路 $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ 具有端点 $u, v \in V(H) = V(D_i^+) = V(\bar{D}_i^+)$，并且使得

$$E(Q_1) \cup A(Q_1) \neq E(Q_2) \cup A(Q_2) , \tag{2}$$

其中 Q_i 是底图为 $\bar{P}_i$ 的 H 的混合子图，$i = 1, 2$. 因为 $\bar{D}_i^+ \cap A(H)$ 是无圈的及 (2)，故 $\bar{P}_i = \bar{P}_i(u, v) (i = 1, 2)$，即不失一般性，两个 $\bar{P}_i$ 均是起点在 u 且终点在 v; 否则，$\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 \subseteq \bar{D}_i^+$ 是欧拉的，并且因此有一个圈分解 $S_{1,2}$，这个结果蕴涵着对每个圈 $C \in S_{1,2}$ 有 $C = C_e$，并且 $\lambda_{D_i^+}(e) = 2$，即 $\bar{P}_1$ 和 $\bar{P}_2$ 破坏了 (2). 下面不失一般性，假设 $c(Q_1) \leqslant c(Q_2)$，则对满足 $A(P_3) \cap A(D_i^+) = \varnothing$ 但以 Q_1 作为它的混合子图的底图的有向路 $P_3 = P_3(u, v)$ 有

$$D_{i+1}^+ := (D_i^+ - A(P_2)) \cup A(P_3)$$

是一个满足 $c(D_{i+1}^+) \leqslant c(D_i^+)$ 的 H- 吸收欧拉有向图 ($P_2 \subseteq D_i^+ - D_H^-$ 对应于 $\bar{P}_2$). 相应地，定义 $\bar{D}_{i+1}^+$，并且重复这个程序直到得到 D_k^+，使对任意一对 $u, v \in V(\bar{D}_k^+)$，D_k^+ 不含弧不交的如上定义的 $\bar{P}_1(u, v)$ 和 $\bar{P}_2(u, v)$. 这是可能的，因为从 D_i^+ 到 D_{i+1}^+ 的变换不增加允许应用第一个简化步骤的 $\bar{D}_{i+1}^+$ 的圈. 注意对 $f \notin Q_1 \cup Q_2 - Q_1 \cap Q_2$ 有 $\lambda_{D_{i+1}^+}(f) = \lambda_{D_i^+}(f)$，对 $f \in Q_1 - Q_2$ 有 $\lambda_{D_{i+1}^+}(f) = \lambda_{D_i^+}(f) + 1$，对 $f \in Q_2 - Q_1$ 有 $\lambda_{D_{i+1}^+}(f) = \lambda_{D_i^+}(f) - 1$，并且 $c(D_k^+) \leqslant c(D_i^+)$.

根据两个简化步骤，我们称 H- 吸收欧拉有向图 D^+ 为**不可约的**当且仅当 $\bar{D}^+$ 的每个圈是一个使得 $\lambda_{D^+}(e) = 2$ $(e \in E(H))$ 的二边形 C_e，并且对任意的 $u, v \in V(\bar{D}^+)$，$\bar{D}^+$ 不含弧不交的路对 $P_1(u, v), P_2(u, v)$①. 作为小结的一部分，我们得到下面的结果.

定理 8.96 对于有价格函数 $c : E(H) \cup A(H) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的混合图 H，下面的结论成立：

1) 一个 H- 吸收欧拉有向图 D^+ 是不可约的当且仅当 D^+ 有以下性质：

a) D^+ 没有欧拉真子有向图是 H- 吸收的;

b) 对于每一对有相同端点，并且分别以 $Q_1, Q_2 \subseteq H$ 为底图的弧不交的路 $P_1, P_2 \subset D^+$，存在某个 $f \in E(Q_1 \cup Q_2) \cup A(Q_1 \cup Q_2)$，使得 $\lambda_{D^+}(f) = 1$，除非 $Q_1 = Q_2$;

① 在 [KAPP79a] 中术语 "素" 用来代替 "不可约".

2) 在所有不可约的 H- 吸收欧拉有向图中，存在一个是 (MPP′) 的解.

证明　1) 设 D^+ 是不可约的 H- 吸收欧拉有向图. 考虑一个欧拉真子有向图 $D_1^+ \subset D^+$，则 $D_2^+ := D^+ - D_1^+$ 是非空欧拉有向图. 由定理 4.8 它有圈分解 $S_2 \neq \varnothing$. D_2^+ 的每个圈对应于 $\bar{D}^+$ 的一个圈；否则，对某个 $a \in A(D_2^+)$，$\lambda_{D^+}(a) = 1$. 由假设，$\bar{D}^+$ 仅有的圈是使得 $\lambda_{D^+}(e) = 2$ 的 C_e，从而或者某个 $a \in A(H)$，或者某个 $e \in E(H)$ 不能用 D_1^+ 的任意弧表示，即 D_1^+ 不是 H- 吸收的，这就蕴涵着 a) 成立.

考虑两条有 u, v 作为它们的公共端点的弧不相交的路 $P_1, P_2 \subseteq D^+$. 假设 $Q_1 \neq Q_2$，并且假设对每个 $f \in E(Q) \cup A(Q)$，$\lambda_{D^+}(f) > 1$，其中 $Q := Q_1 \cup Q_2$. 不失一般性，我们可以进一步假定 $A(P_1) \cap A_u$ 和 $A(P_2) \cup A_u$ 不对应于 $A(\bar{D}^+)$ 的相同的元素；否则，我们可以考虑用 $P_i - u (i = 1, 2)$ 代替，从而 P_i 对应于以 u, v 作为端点的一条路 $\bar{P}_i \subseteq \bar{D}^+ (i = 1, 2)$. 因为 $Q_1 \neq Q_2$，因此，$\bar{P}_1 \neq \bar{P}_2$. 不失一般性，$P_1 = P_1(u, v)$. 从 u 开始，设 $x \neq u$ 是 P_1 的第一个也属于 P_2 的顶点；可能 $x = v$. 根据 $P_2 = P_2(v, u)$ 或 $P_2 = P_2(u, v)$ 得到 P_1 和 P_2 中以 u 和 x 作为它们的公共端点的对应子路在 $\bar{D}^+$ 中定义一个圈 $C \supset \{u, x\}$ 或两条起点在 u 终点在 x 的内部不交的路. 因为 D^+ 是不可约的，第二种情况是不可能的. 同理得 $C = C_e$，即 $e \in E(Q_1 \cap Q_2)$，并且 $Q - u \subset H$ 是 $(P_1 - u) \cup (P_2 - u)$ 的混合子图的底图. 然而，$P_1 - u = P_1(x, v)$，$P_2 - u = P_2(v, x)$，重复上面的论证，我们得到 $Q_1 = Q_2 \subseteq \langle E(H) \rangle$，这与假设矛盾. 因此，$Q_1 \neq Q_2$ 蕴涵存在 $f \in E(Q) \cup A(Q)$，使得 $\lambda_{D^+}(f) = 1$.

相反地，现在假设 D^+ 不是不可约的，并且它没有 H- 吸收的欧拉真子有向图，从而如果在 D^+ 中用相反方向的弧表示 $e \in E(H)$，它们定义了一个圈 C_e，则 $\lambda_{D^+}(e) = 2$ 必成立；否则，e 将仍然在 $D_1^+ := D^+ - A(C_e)$ 中出现，即 D_1^+ 也是一个真 H- 吸收欧拉子有向图，与假设矛盾. 同理，$\bar{D}^+$ 不能含一个不同于上面的这些 C_e 的圈 $\bar{C}$，这是因为对应于 $\bar{C}$ 的 $C \subset D^+ - A(H)$，$D_1^+ := D^+ - A(C)$ 将是一个真 H- 吸收欧拉子有向图. 因此，对某些 $u, v \in V(\bar{D}^+)$，我们有弧不交的路 $\bar{P}_1(u, v), \bar{P}_2(u, v) \subset \bar{D}^+$. 它们在 D^+ 中是弧不交的，并且满足 $Q_1 \neq Q_2$，由 $\bar{P}_1(u, v), \bar{P}_2(u, v)$ 的选择和 $\bar{D}^+$ 的定义，它们也满足对每个 $f \in E(Q) \cup A(Q)$，$\lambda_{D^+}(f) > 1$. 1) 有效性可得.

2) 设 D^+ 是 (MPP′) 的一个解，并且假设 D^+ 不是不可约的. 假设存在一个 H- 吸收欧拉图 $D_1^+ \subset D^+$，则对 $D_2^+ := D^+ - D_1^+$，我们得到 $c(D_2^+) = 0$. 这与 $a(D^+)$ 的极小性矛盾. 现在从 1) 中证明的第二部分知对 $u, v \in V(D^+)$，D^+ 包含弧不交的路 $P_1 = P_1(u, v)$ 和 $P_2 = P_2(u, v)$，使得 $Q_1 \neq Q_2$，并且对每个 $f \in E(Q) \cup A(Q)$，$\lambda_{D^+}(f) > 1$. 应用第二个化简步骤到 D^+ (见从 D_i^+ 到 D_{i+1}^+ 的变换)，我们得到 $D_1^+ = (D^+ - A(P_2)) \cup A(P_3)$ 满足 $c(D_1^+) \leqslant c(D^+)$ (其中 P_3 如上所定义，并且假定 $c(P_1) \leqslant c(P_2)$). 注意 P_1 和 P_2 的选择保证了 D_1^+ 是 H- 吸收的和欧拉的. 由 D^+ 的选择，我们有 $c(D_1^+) = c(D^+)$，并且因此 $c(P_1) = c(P_2)$. 另外，我

们可以假定 $|A(P_1)| = |A(P_2)|$; 否则，因为 D^+ 是(MPP′)的一个解且 $c(P_1) = c(P_2)$，那么应用第二个化简步骤 (P_1 和 P_2 可能交换它们的作用) 导出一个 H- 吸收欧拉 $D^+_{1,1}$，使得 $c(D^+_{1,1}) = c(D^+)$，但是 $a(D^+_{1,1}) < a(D^+)$. 像我们在这个化简步骤讨论中所注意到的，如果 D^+_1 不是不可约的，那么 $\bar{D}^+_1$ 没有不同于使得 $\lambda_{D^+_1}(e) = 2$ 的圈 C_e. 因此，连续应用 m 次第二个化简步骤，最终得到不可约的 H- 吸收欧拉有向图 D^+_m，因为 D^+ 的选择，它必定满足 $c(D^+_m) = c(D^+)$. 这就证明了 2)，并且完成了定理的证明.

我们注意定理 8.96 和两个化简步骤前面的讨论，基本上是 [KAPP79a, 定义 3.1, 定理 3.1] 的内容①. 然而，注意一个含有某个 $D(H)$ 的不可约的 H- 吸收欧拉有向图 D^+ (见引理 8.95 证明的后面的一段) 不必对应于 $D(H)$ 的 DPP 的一个解. 可是比较定理 8.90 说明了如果 D^+ 对应于 $D(H)$ 的 DPP 的一个解 W，则定理 8.90 中所定义的 $D_0 \subseteq D(H)$ 和 $\bar{D}^+$ 用下面的等式相关联:

$$D_0 = \bar{D}^+ - \bigcup_{C_e \subset D(H) \cap D_H} A(C_e) , \tag{3}$$

其中 C_e 是对应于 $e \in E(H)$ 的二边形，即定理 8.90 和 (3) 构成了决定一个不可约的 H- 吸收欧拉有向图 D^+ 是否是 H 的 MPP 的一个解的一个理论工具 (见 (MPP′), (MPP″) 和它前面的不等式及定理 8.96 的 2)).

然而，在 [KAPP79a] 中用下面的方法将 MPP 化到一个 ILP. 对于一个具有强连通 D_H 的混合图 H，记

$$E(H) = \{e_1, \cdots, e_g\} ,$$

$$A(D_H) = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2q}, a_{2q+1}, \cdots, a_{2q+q_a}\} ,$$

其中 $\{a_{2q}, \cdots, a_{2q+q_a}\} = A(H)$ (并且因此 $A(H) = q_a$)，又其中 a_{2i-1} 和 a_{2i} 是对应于 $e_i \in E(H)(1 \leqslant i \leqslant q)$ 的相反方向的两条弧. 与每个 $a_j \in A(D_H)$ 联系一个变量 $x_j(1 \leqslant j \leqslant n := 2q + q_a)$，$x_j$ 表示在一个 H- 吸收欧拉有向图 D^+ 中对应 a_j 的弧的数目. 于是对 $j = 2q+1, \cdots, n$，我们有 $x_j = \lambda_{D^+}(a_j)$. 最后，记 $V(D_H) = V(H) = \{v_1, \cdots, v_p\}$. 这样我们就得到一个表示 H 的 MPP 的 ILP (对 H 和 D_H 的价格函数，我们分别令 $c = c_D$，见推论 8.93 前面的一段):

① 然而，定义 3.1 的条件 (ii) 是多余的，这是因为条件 (i) 与上面定理 8.96 性质 1)a) 是相同的. 又定理 3.1 的证明中的情况 2 有一个错：那里对于 $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \subset \bar{D}^+$，如果 $P_1 = P_1(u,v)$，$P_2 = P_2(v,x)$ $(A(\bar{P}_1) \cap A(\bar{P}_2) = \varnothing)$，则 $D^+_1 := D^+ - A(P_1 \cup P_2)$. 但是当 D^+_1 是欧拉的时，它不是 H- 吸收的当且仅当对某个 $e \in E(H)$，$C_e \subset P_1 \cup P_2$，$\lambda_{D^+}(e) = 2$，即“太多”可以删掉. 对上面的 C_e，若 e 是 H 的一个桥，这变得很显然.

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{使得} \ \sum_{j=1}^{n} c(a_j)x_j \ \text{最小}, & (1) \\
\quad \text{约束条件为} & \\
\qquad \sum_{a_j \in A_{v_k}^+} x_j - \sum_{a_j \in A_{v_k}^-} x_j = 0,\ k = 1, \cdots, p, & (2) \\
\qquad x_{2i-1} + x_{2i} \geqslant 1,\ i = 1, \cdots, q, & (3) \\
\qquad x_{2q+i} \geqslant 1,\ i = 1, \cdots, q_a, & (4) \\
\qquad x_j \geqslant 0,\ j = 1, \cdots, n, & (5) \\
\qquad x_j \ \text{为整数},\ j = 1, \cdots, n. & (6)
\end{array}
\right.
\qquad (\text{MPP}''')
$$

我们注意到关于 (MPP‴) 的下面的事实:

1) 对于 $k = 1, \cdots, p-1$，考虑次条件 (2) 就够了. 因为如果对 $p-1$ 个顶点 $\text{od}(v_k) = \text{id}(v_k)$，这个等式对第 p 个顶点必定也成立.

2) 因为我们不知道表示 $e_i \in E(H)$ 的 a_{2i-1} 和 a_{2i} 中的哪一条弧被用为在 D^+ 中对应 MPP 的某一个解，因此，我们需要约束 (3)，它与 (5) 一起说明了这两个弧中至少有一个被用. 因此，每个 $e \in E(H)$ 在 D^+ 中至少用一条弧表示，并且由 (4) 可得 $A(D^+) \supset A(H)$. 因此，我们得到出结论，每个 H- 吸收欧拉有向图 D^+ 满足 (2)~(6).

3) 特别地，定理 8.96 的 2) 肯定了某个这样的不可约的 D^+ 能在(MPP‴)的解中找到.

事实上，[KAPP79a, 定理 4.5] 断言一个 H- 吸收欧拉有向图 D^+ 是不可约的当且仅当 x_i 的值对应 (2) ~ (5) 的某个极点 $y = (y_1, \cdots, y_n)$ 的分量 y_i，使得如果的 $y_i \in \mathbb{N}$，则 $x_i = y_i$，而如果 y_i 不是整数，则 $x_i = 2y_i = 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$.

然而，早在 [EDMO73a] 中，已给出了 MPP 的一个 ILP 模型，它不同于在 [KAPP79a] 中的 (MPP‴)ILP，即在 [EDMO73a] 中，每个 $e_i \in E(H)$ 中两个定向二边形 C'_{e_i} 和 C''_{e_i} 联系，即出发点不是某个 $D(H)$，而是 D_H 与某个 $e \in E(H)$ 的 C_e 的一个额外的拷贝. 对更详细的内容，见所引的文章.

在 [BRUC81a] 中讨论了关于 MPP 的另一个方法. 出发点是基于下述事实: 如果 $\langle E(H) \rangle_H$ 和 $\langle A(H) \rangle_H$ 都是欧拉的，并且 H 是一个弱连通混合图，则 H 有一条欧拉迹，根据 $\langle E(H) \rangle_H$ 的每一个分支的一条固定的欧拉迹定向 H 的边得到一个 H- 吸收欧拉有向图 D^+，并且 D^+ 的一条欧拉迹用一个自然的方法对应于 H 中的一条欧拉迹. 因此，代替求 H- 吸收欧拉有向图，布鲁克 (P. Brucker) 的方法是求一个 (最小价格) **欧拉 H- 增广**，即定向 $E(H)$ 的某些元素和 (或) 加倍边和 (旧的或新的) 弧，使所产生的混合图 H' 是欧拉的. 一旦这一点完成了，H' 能被变换为一个混合图 H''，使得 $|E_v^*| \equiv 0 \pmod 2$，并且对每个 $v \in V(H) = V(H'')$，$a^+(\{v\}) = a^-(\{v\})$，

并且 $c(H')=c(H'')$，其中 $c: E(H)\cup A(H)\to \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 用自然的方法扩充到 $E(H')\cup A(H')$ 和 $E(H'')\cup A(H'')$. 这样，如果欧拉 H- 增广 H' 是最小价格的，则更特殊的欧拉 H- 增广 H'' 也是极小价格的，这样，H 的 MPP 的解能够通过解下面的问题近似求得：

1) 假定 D_H 是强连通的，构造一个混合图 H_1，使得 $A(H_1)\subseteq A(D_H)$，$E(H_1)\subseteq E(H)$，并且 $\langle A(H_1)\rangle_{H_1}$ 的每个弱连通分支是强连通的；

2) 对于 $\langle E(H_1)\rangle_{H_1}$ 的每个分支解 CPP；

3) 对 $\langle A(H_1)\rangle_{H_1}$ 的每个弱边连通分支解 DPP①.

解决了这三个问题后，得到混合图 H''，使得它的每一个顶点 v 满足 $|E_v^*|\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，$a^+(\{v\})=a^-(\{v\})$.

8.3.4　带风向的邮递员问题和最后注记

在研究 MPP 并将它 (间接地) 描述为一个 ILP，米尼卡 (E. Minieka) 引进了**带风向的邮递员问题** (WPP) [MINI79a]，这也在 [GUAN84a] 中被研究了. WPP 的出发点是注意到在许多实际问题中从 A 到 B 穿过一条路线与从 B 到 A 穿过同一条路线的价格可能不同. 例如，用船从维也纳 (奥地利) 运送货物到布达佩斯 (匈牙利) 比相反方向花费较少的能量和时间 (两个城市都坐落在并不是那么蓝的多瑙河畔)；或者当现代电车下山时 (这对应于负价格) 产生的电能 (反馈到动力系统). 这样 WPP 叙述如下：

设 G 为一个具有价格函数 $c_1,c_2: E(G)\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 的连通无环图，使得从 x_e 到 y_e 穿过边 $e=x_ey_e\in E(G)$ 的价格是 $c_1(e)$，而从 y_e 到 x_e 穿过边 e 的价格是 $c_2(e)$. 在 G 中求一条闭覆盖途径 $W=e_1,e_2,\cdots,e_n$，$n\geqslant q_G$，使得 $c(W):=\sum_{j=1}^{n}c(e_j)$ 最小，其中 $c(e_j)\in\{c_1(e_j),c_2(e_j)\}$ 依赖于在 W 中 e_j 被穿过的方向. (WPP)

如果我们用一个二边形 $C_e:=\langle\{(x_e,y_e),(y_e,x_e)\}\rangle$ 代替每条边 $e=x_ey_e$ (这样导出了一个对称有向图，即当它含有 a 时，也含 a^R 的有向图)，并且定义

$$c((x_e,y_e))=c_1(e),\quad c((y_e,x_e))=c_2(e)\ ,$$

我们得到下面 (WPP) 的等价的重述：*设 G 是一个连通无环图，并且设 D_G^* 是对应于 G 的对称有向图. 对每个 $e\in E(H)$，设 $C_e\subset D_G^*$ 表示对应于 e 的二边形，并且设给定价格函数 $c: A(D_G^*)\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$. 求 D_G^* 的一条闭途径 W^*，使得① 对每个 $C_e\subset D_G^*$ 有 $A(W^*)\cap A(C_e)\neq\varnothing$，并且②使得 $c(W^*)$ 最小②.* (WPP′)

① 在 [BRUC81a] 中已注意到这种思想已经导出 [FRED79a] 中的一个近似算法.

② 限制到无环图事实上没有实际关系. 如果 G 的一个环根据穿过的不同方向分配不同和价格 (在拓扑意义上)，人们可以总取"便宜"的方向，并且人们总能穿过一个环仅一次而离开.

我们称在 (WPP) ((WPP′)) 中的途径 W (W^*) 为 G (D_G^*) 中**带风向的邮递员环游** (WPT).

这样，(WPP) 变换为 (WPP′) 说明了 WPP 不是 DPP 的特殊情况，并且可以猜想解 WPP 的算法复杂性比解 DPP 更复杂. 这个猜想事实上已被验证. 在 [MINI79a, GUAN84a] 中已说明了 WPP 是 NP- 完全的，其中米尼卡将 WPP 归结到他表述 MPP 的方法，而管用类似于变换 (WPP) 到 (WPP′) 的方法变换 MPP 为 WPP①. 然而，管对于实际有关的一个特殊情况给出了多项式时间算法.

定义 8.97 对一个连通无环图 G 和对应的对称有向图 G_D^*，用 $C^+, C^- \subset G_D^*$ 表示对应于圈 $C \subseteq G$ 的两个圈. 给定价格函数 $c: A(G_D^*) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，如果对每个 $C \subseteq G$ 有 $c(C^+) = c(C^-)$，则我们说 c 是**圈平衡的**②.

在叙述和讨论管的算法之前，我们首先研究圈平衡价格函数的一些性质. 为此，假定给定一个函数 $p: V(G) \to \mathbb{R}$，并定义一个新的价格函数 $c_p: A(D_G^*) \to \mathbb{R}$，使得

$$c_p(a) = c(a) + p(v_j) - p(v_i), \quad a \in A_{v_i}^+ \cap A_{v_j}^- , \tag{CB}$$

其中 c 不必是圈平衡的.

注意 $c_p(a) < 0$ 可能对某个 $a \in A(D_G^*)$ 成立. 考虑到 (WPP) 和它变为 (WPP′) 的变换，我们也隐含地考虑 G 中几种价格函数 $c_1, c_2, c_{1,p}, c_{2,p}$.

引理 8.98 设 G, D_G^*, c, c_p 如定义 8.97 和 (CB) 中所给定. 设 W 是 G 中的任一闭 (不必是覆盖的) 途径，并且设 W^* 是 D_G^* 中对应的途径，则 $c(W) = c_p(W^*)$.

证明 由 $c(W)$ 的定义 (WPP)，在任何情况下，我们有 $c(W) = c(W^*)$. 如果必要，加倍 D_G^* 中的弧，变换 W^* 为某个 $D^+ \supseteq D_G^*$ 中的一条闭迹 T^+，由定理 4.8，$\langle A(T^+)\rangle_{D^+}$ 有一个圈分解 $S^+ = \{C_1^+, \cdots, C_k^+\}$，并且每个 C_i^+ 对应于一个圈 $C_i \subseteq D_G^* (1 \leqslant i \leqslant k)$. 注意 p 能重新解释为 D_G^* 的一个位势. 这样，由 c_p 的定义和定义 3.80，我们能记

$$c_p = c + \psi,$$

其中 ψ 是 D_G^* 中的一个张力. 因此，作为引理 3.81 的一个结果，对每个圈 $C \subseteq D_G^*$，我们有

$$c(C) = c_p(C) .$$

用自然的方法扩充 c 到 $A(D^+)$: $c(W^*) = c(T^+) = \sum_{i=1}^{k} c(C_i^+)$，于是由下面等式，我们得到引理的有效性：

$$c(W) = c(W^*) = \sum_{i=1}^{k} c(C_i) = \sum_{i=1}^{k} c_p(C_i) = c_p(W^*) .$$

① 附带说明，在 [BRUC81a] 中给出的 (WPP) 的公式表示是错误的.

② 用管的记号这意味着“G 满足条件 Q”.

下面我们选择一个特殊类型的函数 p. 设 G 是一个连通图，B 是 G 的支撑树，并且设 $D_B \subset D_G^*$ 是一个以 $v_1 \in V(G) = V(D_B)$ 为根的出树形图，又 B 作为它的底图. 归纳地定义：对 $a \in A(D_B) \cap A_{v_i}^+ \cap A_{v_j}^-$，如果已经定义了 $p_B(v_i)$，但是 $p_B(v_j)$ 还未定义，令

$$\begin{cases} p_B(v_1) = 0\ , \\ p_B(v_j) = p_B(v_i) + \dfrac{1}{2}(c(a^-) - c(a))\ , \end{cases} \tag{PB}$$

其中 $a^- \in (A(D_G^*) - A(D_B)) \cap A_{v_j}^+ \cap A_{v_i}^-$ 且 a 对应同一个 $e \in E(G)$.

引理 8.99 假设给定一个圈平衡价格函数 $c: A(D_G^*) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，其中 G 是连通无环图. 假设 p_B 和 c_{p_B} 分别由 (PB) 和 (CB) 给定，则 $c_{p_B}(a_e^1) = c_{p_B}(a_e^2)$，其中 $\{a_e^1, a_e^2\} \subseteq A(D_G^*)$ 对应任选的 $e \in E(G)$.

证明 首先对 $a \in A(D_B)$ 和 $a^- \in A(D_G^*) - A(D_B)$ 考虑 $a_e^1 = a$，$a_e^2 = a^-$，其中 B 是 G 的一个支撑树. 用 (PB) 和 (CB) 中同样的指标，对 $p_B(v_j) - p_B(v_i) = \dfrac{1}{2}(c(a^-) - c(a))$，我们有

$$\begin{aligned} c_{p_B}(a) &= c(a) + \frac{1}{2}(c(a^-) - c(a)) = \frac{1}{2}(c(a) + c(a^-)) \\ &= c(a^-) - \frac{1}{2}(c(a^-) - c(a)) = c_{p_B}(a^-). \end{aligned}$$

这样对每个 $e \in E(B)$，引理为真.

现设 $e \in E(G) - E(B)$，并且考虑对应的 $a_e^1, a_e^2 \in A(D_G^*) - A(D_B)$. $B \cup \{e\}$ 含唯一圈 C. 用 C^+ 表示 $D_B \cup D_B^R \cup \{a_e^1\} \subseteq D_G^*$ 的含 a_e^1 的唯一圈. 不失一般性，

$$A(C^+) = \{a_f^1 \in A(D_G^*) \mid f \in E(C)\} \cup \{a_e^1\},$$

并且因此圈 $C^- := (C^+)^R$ 由

$$A(C^-) = \{a_f^2 \in A(D_G^*) \mid f \in E(C)\} \cup \{a_e^2\}$$

给定. 因为对 $f \in E(B)$，$c_{p_B}(a_f^1) = c_{p_B}(a_f^2)$，并且因为 c 是圈平衡的，则从定义 8.97 和 (CB) 得 (也见引理 8.98 证明的最后部分) 对每个 $e \in E(G - B)$ 有

$$\begin{aligned} 0 &= c(C^+) - c(C^-) = c_{p_B}(C^+) - c_{p_B}(C^-) \\ &= \sum_{f \in E(B)} (c_{p_B}(a_f^1) - c_{p_B}(a_f^2)) + c_{p_B}(a_e^1) - c_{p_B}(a_e^2) \\ &= c_{p_B}(a_e^1) - c_{p_B}(a_e^2). \end{aligned}$$

这就证明了引理.

现在证明以下结果 [GUAN84a, 定理 2]：

定理 8.100　对连通无环图 G，设 $c: A(D_G^*) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 是圈平衡的价格函数. 定义价格函数 $c_0: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，使得

$$c_0(e) = \frac{1}{2}(c(a_e^1) + a(a_e^2)),$$

其中 $\{a_e^1, a_e^2\} \subseteq A(D_G^*)$ 对应于 $e \in E(G)$. 对价格函数 c_0，G 的 CPP 的每个解 W 对应于关于价格函数 c 的 D_G^* 的 (WPP′) 的一个解 W^*，反之亦然，进而 $c_0(W) = c(W^*)$.

证明　考虑 G 的支撑树 B，并设 D_B 是以 v_1 为根且以 B 为底图的出树形图. 从 c 开始，如 (PB) 中定义 $p_B: V(G) \to \mathbb{R}$，如 (CB) 中定义 $c_{p_B}: A(D_G^*) \to \mathbb{R}$. 因为 c 是圈平衡的，由引理 8.99 证明的第一部分和 c_0 的定义，对任意 $e \in E(B)$ 有

$$c_{P_B}(a_e^1) = c_{p_B}(a_e^1) = \frac{1}{2}(c(a_e^1) + c(a_e^2)) = c_0(e) \ . \tag{1}$$

为了得到对每个 $e \in E(G)$ 有 (1) 成立，考虑 $f \in E_{v_j} \cap E_{v_j} - E(B)$. 不失一般性，假设 $a_f^1 \in A_{v_j}^+ \cap A_{v_j}^-$，由 (CB) 我们有

$$c_{p_B}(a_f^1) - c(a_f^1) = p_B(v_j) - p_B(v_i) = c(a_f^2) - c_{p_B}(a_f^2) \ .$$

因为由引理 8.99 在任何情况下都有 $c_{p_B}(a_f^1) = c_{p_B}(a_f^2)$，我们得到

$$2c_{p_B}(a_f^1) = c(a_f^1) + c(a_f^2)$$

蕴涵着对每个 $e \in E(G)$ 有 (1) 成立.

现在设 W 是具有价格函数 c_0 的 G 中的一个 PT，并且设 W^* 是 D_G^* 对应于 W 的一条闭途径. 因为 W 是 G 的闭覆盖途径，则对每个 $C_e = \langle\{a_e^1, a_e^2\}\rangle \subseteq D_G^*$，$W^*$ 满足 $A(W^*) \cap A(C_e) \neq \varnothing$. 因为 $c_{p_B}(a_e^1) = c_{p_B}(a_e^2) = c_0(e)$，从 c_{p_B} 的定义和引理 8.98 得 $c_0(W) = c(W^*)$. 这样对 D_G^* 的一个 WPT W_D 有 $c(W^*) \geqslant c(W_D)$ (见 (WPP′)). 另一方面，W_D 导出 G 的一条闭覆盖途径 W_0，使得由引理 8.98 得

$$c_0(W_0) = c(W_D) \geqslant c_0(W) = c(W^*),$$

即

$$c_0(W) = c(W^*) = c(W_D) \ .$$

因此，W^* 是 D_G^* 关于 c 的一个 WPT. 然而，类似的论述也推出，如果 W^* 是 D_G^* 关于 c 的一个 WPT，则 G 中对应的闭覆盖途径 W 必定是 G 中关于 c_0 的一个 PT. 定理得证.

由定理 8.100 立刻提出了下面的算法 (见 [GUAN84a, 算法 A])，它的正确性由定理 8.100 可得.

对于圈平衡价格函数的 WPT- 算法

步骤 0 设 G 是一个连通无环图. 连同于圈–平衡价格函数 $c: A(D_G^*) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 导出价格函数 $c_1, c_2: E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

步骤 1 定义 $c_0 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$.

步骤 2 解具有价格函数 c_0 的 G 的 CPP.

步骤 3 G 中关于 c_0 的任意 PT W 是 G 中关于 c_1 和 c_2 的一个 WPT.

然而，当对实际问题时，问题的实际性质可能蕴涵 $c: A(D_G^*) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 是圈–平衡的. 在理论上，检查对每个圈 $C \subseteq G$ 是否 $c(C^+) = c(C^-)$ 是相当复杂的程序. 事实上，对每个 (唯一决定的) 圈 $C(e) \subseteq B \cup \{e\}$ 检查这个等式就够了，其中 B 是 G 的支撑且 $e \in E(G) - E(B)$，[GUAN84a, 定理 3].

在进一步研究 WPP 中，管考虑价格函数接近于圈–平衡的情况，并且从上面的算法导出另一个解 WPT 的好的近似算法 (详细内容见 [GUAN84a, 定理 4,5,6, 算法 $\bar{A}$]).

除上面讨论的外，CPP 还有其他的一些变形. 我们简要地叙述其中的两个. 这些问题中的第一个是求连通图 G 中的一条最小价格闭覆盖途径 W，使得 W 穿过 $E_{i+1} \subseteq E(G)$ 的元素之前首先穿过 $E_i \subseteq E(G)$ 的元素，其中 $\{E_i \mid i = 1, \cdots, k\}$ 是 $E(G)$ 的划分，这个问题已在 [DROR87a] 中研究了；按一般提法，它是 NP- 完全的. *乡村邮递员问题* ((RPP)) 要求 G 中的一个最小价格途径 W，其中 W 不必是覆盖途径，但要包含一个特殊的子集 $E^1 \subseteq E(G)$，这个问题也是 NP- 完全的. 如果对有向图重新阐述这个问题，RPP 仍然是 NP- 完全的 (见 [GARE79a, p213, [ND27]] 和 [CHRI86a]).

在结束对图、有向图和混合图的中国邮递员问题的讨论时，我们指出某些应用. 例如，街道清扫或牛奶推销问题还没有用有向图和混合图的术语讨论过. 部分原因是由于相关文献 (据我所知) 主要研究图，但也是由于书的主题. 至于后一点，我有意将大段篇幅用于 t- 连接和 t- 割，不仅因为它代表了 (历史地并以内容上来说) CPP 的推广，而且因为它代表了图论研究中的重要的和相当新的发展 (坦白地承认主观美学的理由也支配着我的决定).

可是不难认识到，用一个图 G 表示的两个方向的街道系统也可用一个有向图 D_G 表示，这只要用一个二边形 C_e 代替每条边 $e \in E(G)$；或者不难把表示单向或双向街道系统的混合图，化为一个有向图 D_H. 当然，在每一种个别情况，人们必须决定用图还是有向图的术语来描述问题 (这样用多项式时间解问题)，或者人们必须用混合图还研究问题 (为节省计算时间，依赖于对 MPP 的近似算法). 带风向的邮递员问题至少在某种程序上说明了实际问题和用图或有向图的术语研究它们之间的影响.

至于有向图中最大权圈装箱问题 (DMCPP) 不能期望类似于图的情况与 DPP 有密切的关系. 注意到 $D-A(D_0)$ 不必是欧拉的 (对于 D_0 的定义见定理 8.90). 然而，刘建农在他的论文中研究了 DMCPP[LIUJ87a]，并把它化为与一个有向图 D 有联系的图 G^D 的二部匹配问题 (但是有不同于定理 8.91 中化简 (DPP) 的方法). 然后他证明了 G^D 的最小权完美匹配和 D 的最大权圈装箱问题之间存在一个双射. 于是他发展了一个指派算法 (基于这个双射)，它的复杂性是 $O(q_D^3)$，进而在同一篇文章中，DMCPP 也被表述为 LP 问题. 最后，刘建农对混合图和“带风向”的图 (即根据两个可能的定向每条边联系两个价格的图) 也研究了 MCPP. 有趣的是，MCPP 的复杂性与各邮递员问题基本相同 (属于还是不属于 P? —— 还是个未解决的问题，见 [LIUJ87a, DULLXXa])①.

最后，最小权圈覆盖问题 (MCCP) 在有向图的情况变得相当平凡. 因为如果通过加倍弧从 D 产生 D^+ 并且当 D^+ 是欧拉的，则 D^+ 的任意圈分解对应 D 的一个圈覆盖 (与图的情况相反). 因为 D^+ 的圈分解能用多项式时间找到 (见第 10 章)，从而对有向图 MCCP 属于 P，并且最小圈覆盖的“价格”等于 D 中 DPT 的“价格”. 后面我们将对混合图和“带风向”的图研究 MCCP.

8.4 习　　题

练习 8.1　应用推论 8.2 证明推论 8.3.

练习 8.2　证明引理 8.5.

练习 8.3　设 G 和 W 如引理 8.5 中所给. 证明如果 W 用 G 的每条边两次或不用，则 $\langle E(W)\rangle$ 是 G 的一个分支.

练习 8.4　构造一个具有 $p_G \equiv 2 \pmod 4$ 的 3- 正则图 G 的无限族，使得 G 没有强双迹.

练习 8.5　证明推论 8.14.

练习 8.6　证明推论 8.16.

练习 8.7　证明推论 8.22 (提示：构造 $D := D_W$ 并考虑 D_+^-).

练习 8.8　对图 8.2 中的图 $K_{4,\varphi}$ 构造一个值-真圈覆盖.

练习 8.9　对于混合图重述引理 8.16~ 引理 8.18，定理 8.21 和推论 8.22.

练习 8.10　证明引理 8.38.

练习 8.11　证明如果 G 是关于塔特 5- 流猜想的一个极小反例，则它是一个 $\lambda_c(G) \geqslant 3$，$g(G) \geqslant 7$ 的弱斯纳克.

练习 8.12　证明一个图 G 有一个处处不为零的 k- 流当且仅当 G 的每一个块有一个处处不为零的 k- 流.

---

① 我关于刘先生的文章的评论是根据他文章的英文译稿，这是他根据我的需要给出的 (遵循我们在 1987 年夏于在中国济南山东师范大学的谈话)，并且对此我希望表达我的谢意.

练习 8.13 证明对 $k=2$，猜想 8.49 蕴涵猜想 8.28 (提示：考虑从 3- 边连通图 G 通过用三个平行边代替 G 的每条边得到的 9- 边连通图 H).

练习 8.14 应用定理 8.54 证明推论 8.55 和推论 8.56 (见定义 8.51 后面的一段).

练习 8.15 用定理 8.64 前面的结论 1)~7) 和这个定理证明定理 8.63.

练习 8.16 说明图 8.11 中的图 H 有一条闭覆盖途径，它具有那个图下面说明中所描述的性质. 证明在围绕图 8.11 的讨论中所描述的 6- 正则图 $H_1 \subset H$ 有一个所描述的处处不为零的 3- 流.

练习 8.17 证明定理 8.65 和命题 8.66.

练习 8.18 证明定理 8.68.

练习 8.19 证明如果 M 是 $2k$ 个整数的集合，$\mathcal{P}_2(M)$ 为 M 划分成 k 个 2- 子集的划分的集合，满足 $|\mathcal{P}_2(M)|=(2k-1)\cdot(2k-3)\cdots 3\cdot 1\geqslant 3^{k-1}$. 证明如果 $k\geqslant 4$，则 3^{k-1} 能用 3^k 代替.

练习 8.20 证明推论 8.69 (注意在构造 G^+ 的过程中，G 的每个桥必须被加倍，这是因为 G^+ 是欧拉的).

练习 8.21 通过部分地修改定理 8.67 的证明，证明引理 8.73 (提示：对价格函数 c，令 $c\equiv 1$).

练习 8.22 证明推论 8.79.

练习 8.23 设 G 是一个具有价格函数 $c: E(G)\to \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 的连通图，并设 c^* 是 K_p 对应的价格函数，$p=p_G$. 证明对 G 的 HWP 多项式等价于对于 K_p 的 (TSP′).

练习 8.24 证明命题 8.87 的第一部分.

练习 8.25 证明引理 8.89 后面的观察 a) 和 b).

第 9 章　欧拉迹及其数目

本章不仅讨论有向图和无向图的欧拉迹，也讨论混合图的欧拉迹，9.1 节将给出有向图中一个奇偶性结果，由此给出爱米秀–莱维斯基 (Amitsur-Levitzki) 定理的一个简单证明，还将给出该专题的一个变种. 在 9.2 节中，首先证明有向图的矩阵树定理，结合定理 6.33，导出了著名的拜斯特定理 —— 欧拉有向图欧拉迹数目的精确公式. 这个定理是探讨欧拉图中类似公式的基础.

为最后的目的，我们回忆一下定义 7.1 及关于区分同一个 (混合)(有向) 图的欧拉迹的各种方法的讨论.

9.1　有向图和 (混合) 图的奇偶性的结果

在本节中，首先讨论具有开的或闭的覆盖迹的有向图 D，记它的弧标号为 $a_1, \cdots, a_q (q = |A(D)|)$. 也就是说，$D$ 或 $D \cup \{(w,v)\}$ 是弱连通欧拉有向图，其中 $v, w \in V(D)$. 一般地，用 $\mathcal{T}_v(D)$ 表示起点为 v 的 D 的覆盖迹的集合. 若 D 不满足上述条件，则 $\mathcal{T}_v(D) = \varnothing$；如果 D 是欧拉的，则 v 是任意的一个固定点；如果 $D \cup \{(w,v)\}$ 是欧拉的，那么 v 就是起点. 与定义 7.1 相反，我们现在认为

如果 D 或 $D \cup \{(w,v)\}$ 的两条欧拉迹 T 和 T' 有不同的起始弧，或者 $X_T \neq X_{T'}$，则它们是不同的.　(*)

我们称**覆盖迹 T 以 v 为根**(或 v 是 T 的根)，记 T 为弧的一个序列，

$$T = a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_q} \ ,$$

我们有

$$\{i_1, \cdots, i_q\} = \{1, \cdots, q\} \ ,$$

即 T 唯一地定义确定了整数 $1, \cdots, q$ 的一个置换

$$\pi_T = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_q \end{pmatrix} .$$

换言之，如果记 π_T 为 $\{1, \cdots, q\}$ 到其自身的双射，那么我们有

$$\pi_T(j) = i_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant q \ .$$

若对某个 $T \in \mathcal{T}_v(D)$ 有 $\pi = \pi_T$，则称 $\pi \in \mathcal{S}_q$ 为**欧拉置换** (其中 $\mathcal{S}_q$ 表示 $\{1, \cdots, q\}$ 上的对称群)，由此可得

$$|\mathcal{T}_v(D)| = |\{\pi \in \mathcal{S}_q \mid \pi \text{ 是欧拉置换}\}|\ .$$

此式及 (*) 和 π_T 的定义引出等价的定义:

以 v 为根的 D 的两条欧拉迹是不同的当且仅当它们对应的欧拉置换是不同的. (**)

然而, 描述一个置换还有其他一些方法, 最常见的是把 π 记为不交 (置换) 循环的积. 从 π 的这种表示出发, π 可以记为 (不必不交的) 对换 (长度为 2 的循环) 的积. 就我们的目的而言, 下述事实是重要的: *不管 π 如何表示为对换的积, 表示式中对换的个数总是奇数或总是偶数.* 相应地, 称 π 是**奇置换或偶置换** (关于前述概念和基本结果见 [HERS64a, p67]). 如果 π 是偶置换, 则定义 $\mathrm{sgn}(\pi) = +1$; 否则, $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$.

因此, 对上述覆盖迹 T 定义

$$\mathrm{sgn}(T) := \mathrm{sgn}(\pi_T)\ ,$$

并且若 π_T 是偶 (奇) 置换, 则称 T 是偶 (奇) 的. 我们用 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D)$ ($\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)$) 表示 $\mathcal{T}_v(D)$ 中相应的偶 (奇) 元素.

注 9.1 a) 事实上, 若 D 是欧拉的, $T \in \mathcal{T}(D)$ 是偶的还是奇的, 不只是由 T 的根选择确定, 而且与 D 的弧的标号也有关, 即给定 D 的弧标号, 对于 $T, T' \in (D)$ 且 $X_T = X_{T'}$, 其中 T 和 T' 的根分别为 v 和 v', 而 $v \neq v'$, 那么 $\mathrm{sgn}(\pi_T) \neq \mathrm{sgn}(\pi_{T'})$ 可能成立. 例如, D 是有向六边形, 其顶点的循环次序为 $v_1, \cdots, v_6$, 而 $a_i \in A(D)$ 是 $v_i (1 \leqslant i \leqslant 6)$ 的出弧, 并且若 T 和 T' 的根分别为 v_1 和 v_4, 那么 $\pi_T = \varepsilon$, 而 $\pi_{T'} = (1\,4)(2\,5)(3\,6)$ (ε 表示恒等置换), 即 π_T 是偶置换, 而 $\pi_{T'}$ 是奇置换.

类似地, 如果把上述有向六边形 D 的弧的标号旋转, 使得 a_{i+3} 是 $v_i (1 \leqslant i \leqslant 6)$ 的出弧 (下标取模 6, 而用 6 代替 0), 此时记这个六边形为 D', 那么根为 v_1 的 $T' \in \mathcal{T}(D')$ 是奇的欧拉迹. 但是, 对于固定的 v 讨论 $\mathcal{T}_v(D)$ 且只置换弧的标号得到 $D' \simeq D$, 那么或者

$$\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D) = \mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D'), \quad \mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D) = \mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D'),$$

或者

$$\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D) = \mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D'), \quad \mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D) = \mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D')$$

(注意 $\mathcal{T}_v(D) = \mathcal{T}_v(D')$).

如果 $T \in \mathcal{T}_v(D)$, $T' \in \mathcal{T}_v(D')$ 具有相同的起始弧, 并满足 $X_T = X_{T'}$, 那么对应的置换 π_T 和 $\pi_{T'}$ 有关系 $\pi_{T'} = \lambda\pi_T$, 其中 λ 是 D 和 D' 弧的标号之间关系的一个置换. 上述讨论对 $D \cup \{(w, v)\}$ 是欧拉的情形也适用.

b) 即使 $D, D \cup \{(w, v)\}$ 的两条欧拉迹 T 和 T' 起始于同一顶点, 并且弧的标号不变, 仍可能有 $\pi_T \neq \pi_{T'}$, 甚至即使 $X_T = X_{T'}$ 可能有 $\mathrm{sgn}(T) \neq \mathrm{sgn}(T')$. 这种

情况可由关于区分欧拉迹的叙述 (∗) 推出，特别地，可由图 9.1 的考虑看出. 但如果根 v 是 2 次顶点，那么对 D 的每一条欧拉迹，其起始弧是相同的. 这就意味着 $\pi_T = \pi_{T'}$ 当且仅当 $X_T = X_{T'}$. 因此，在这种情况下有 $\mathcal{T}_v(D) = \mathcal{T}(D)$.

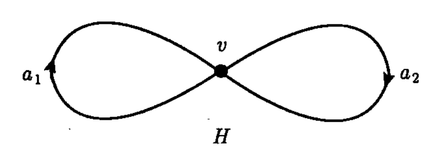


图 9.1　$T = a_1a_2$ 和 $T' = a_2a_1$ 是有向图的两条欧拉迹且满足 $X_T = X_{T'}$，但是 $\mathrm{sgn}(T) = 1$，$\mathrm{sgn}(T') = -1$

已经详细地讨论了定义 7.1 与结论 (∗) 和 (∗∗) 之间的区别，现在转到本节主要结果之一的斯万 (R.G. Swan) 的结果 [SWAN63a, 69a]. 这里给出的证明可看成斯万的证明的改进形式，但斯万的文章中漏掉了一种情况，因此，斯万的证明是不完整的. 这是我早期的一个学生文格尔 (Erich Wenger) 发现的，他在自己的论文中给予了补充 [WENG82a].

定理 9.2　设 D 是有向图且满足 $q_D \geqslant 2p_D$，记 $A(D) = \{a_1, \cdots, a_{q_D}\}$，其中下标是任意指定的，则对每一个 $v \in V(D)$ 有 $|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)|$.

证明　假设定理不成立，选取一个反例 D，使其满足下述条件：

1) $|\mathcal{T}_v(D)|$ 尽可能小，其中 $v \in V(D)$ 是任意固定顶点.

2) 在满足 1) 的情况下，使得 $\max\{\lambda(x,y) \mid (x,y) \in A(D)\}$ 尽可能小.

3) 在满足 1),2) 的情况下，使得 $\sigma(D) - p_D$ 尽可能小.

4) 在满足 1),2) 和 3) 的情况下，使得 $\Sigma(D)$ 尽可能小.

如果 $\mathcal{T}_v(D) = \varnothing$，那么定理显然是对的. 因此，$|\mathcal{T}_v(D)| > 0$，这意味着 D 或 $D \cup \{a_{w,v}\}$ 是弱连通的欧拉有向图，其中 $w \in V(D)$，$w \neq v$ 且 $a_{w,v} \notin A(D)$.

假设存在 $a_i, a_j \in A(D)$，使得 $\{a_i, a_j\} \subset A_x^+ \cap A_y^-$ $(1 \leqslant i < j \leqslant q_D$，$x, y \in V(D))$. 任选 $T \in \mathcal{T}_v(D)$，并且令

$$\left.\begin{aligned} T &:= a_r, \cdots, a_k, \cdots, a_l, \cdots, a_s, \\ T' &:= a_r, \cdots, a_l, \cdots, a_k, \cdots, a_s, \end{aligned}\right\} \qquad (\varphi)$$

其中 $\{k, l\} = \{i, j\}$，也就是说，T' 是由 T 交换 a_i 和 a_j 得到的，由 T 的选取和关于 a_i 和 a_j 的假设，则得 $T' \in \mathcal{T}_v(D)$. 由 T', π_T 和 $\pi_{T'}$ 的定义得

$$\pi_{T'} = (i, j)\pi_T \ .$$

因此，$\mathrm{sgn}(T') = -\mathrm{sgn}(T)$，即

$$T \in \mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D) \text{ 当且仅当 } T' \in \mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D) \ . \tag{1}$$

因为 $\mathcal{T}_v(D) = \mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D) \cup \mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)$ 以及 T 与 T' 之间的上述关系定义了 $\mathcal{T}_v(D)$ 中元素的一个置换，所以由 (1) 得

$$|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)| , \tag{2}$$

即定理成立. 因此，必有 $\lambda(x,y)=1$ 对每条弧 $(x,y)\in A(D)$ 成立，即 D 是无重弧的有向图.

假设 $k := \sigma(D) - p_D = q_D - 2p_D > 0$. 令 $w_1,\cdots,w_k$ 是不在 $V(D)$ 中的顶点，并且

$$D_1 = D \cup \{w_i, (w_{i-1}, w_i) \mid i = 1,\cdots,k, w_0 = x\} ,$$

其中若 D 是欧拉的，则 $x = v$；否则，$x = w$.

不管 D 是否是欧拉图的，均有 $\mathcal{T}_v(D_1) \neq \varnothing$，并且元素 $T_1 \in \mathcal{T}_v(D_1)$ 和元素 $T \in \mathcal{T}_v(D)$ 之间存在双射

$$T_1 = T, P(w_0, w_k) , \tag{3}$$

其中 $P(w_0,w_k)$ 是由 $A(P(w_0,w_k)) = A(D_1) - A(D)$ 所确定的路，置 $a_{q+i} := (w_{i-1},w_i)(i=1,\cdots,k)$，而 $q := q_D$. 我们有

$$\sigma(D_1) - p_{D_1} = q_{D_1} - 2p_{D_1} = q_D + k - 2p_D - 2k = 0 < k . \tag{4}$$

由 D 的选择，并由于 $|T_v(D_1)| = |T_v(D)|$ 以及 D_1 无重弧，可以断定 D_1 满足定理要求. 因此，

$$|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D_1)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D_1)| , \tag{5}$$

但是由 D_1 的构造有

$$\pi_{T_1} = \pi_T , \tag{6}$$

其中 T_1 和 T 的相互关系由式 (3) 确定，并且忽略长度为 1 的循环，即不动点[①]. 因此有

$$\mathrm{sgn}(\pi_{T_1}) = \mathrm{sgn}(\pi_T) . \tag{7}$$

在这种情况下，(7) 连同于 (5) 一起蕴涵着 (2) 的有效性，故我们假设

$$q_D = 2p_D . \tag{8}$$

最后假设 $\Sigma(D) > 0$，因为 $\mathcal{T}_v(D) > 0$，故可得

$$\begin{array}{ll} \mathrm{od}(v) = \mathrm{id}(v) + 1, & \mathrm{od}(w) = \mathrm{id}(w) - 1 \\ \mathrm{id}(x) = \mathrm{od}(x), & x \in V(D) - \{v,w\}. \end{array} \tag{9}$$

引进一个新的顶点 z, 并定义

$$D_1 = D \cup \{z, (z,v), (w,z)\} ,$$

① 把 π_{T_1} 和 π_T 看成映射，由于它们的定义域不同，所以它们在各种情形下都是不同的映射. 然而为了我们的目的，把置换看成长度大于 1 的不相交的循环的积，故写为方程 (6) 是正当的.

那么由 (9) 可知，D_1 是弱连通欧拉有向图. 另外，

$$|\mathcal{T}_z(D_1)| = |\mathcal{T}_v(D)| \ , \tag{10}$$

这是因为元素 $T_1 \in \mathcal{T}_z(D_1)$ 和元素 $T \in \mathcal{T}_v(D)$ 之间存在双射，即

$$T_1 = (z,v), T, (w,z) \ . \tag{11}$$

置 $a_0 := (z,v)$，$a_{q+1} := (w,z)$，并且把 π_{T_1} 看成整数集 $\{0,1,\cdots,q+1\}$ 上的一个置换，那么在这种情况下，(6) 和 (7) 也成立 (见前面脚注). 按 D 的选择以及 D_1 满足 $\Sigma(D_1)=0$，$\sigma(D_1)-p_{D_1}=0$ 和对每条弧 $(x,y)\in A(D_1)$ 有 $\lambda(x,y)=1$，那么可以断定用 z 代替 v，式 (5) 也是对的，再连同于 (7) 和 (10) 还能推出 (2) 也是有效的.

至此，我们已证明了所选定理的反例 D 必满足

$$D \text{ 是弱连通的欧拉有向图且满足 } q_D = 2p_D \ . \tag{12}$$

为了进一步限制 D 的结构，对 p_D 用归纳法证明 D 还具有以下性质：

$$D \text{ 不含关联环的 4 次顶点} \ . \tag{13}$$

否则，设 x 是 D 的一个关联环的 4 次顶点. 记 $A_x=\{(y,x),(x,x),(x,z)\}$，可能有 $y=z$. 在任何情况下都假设 $p_D>1$，否则，由 (12) 可推出 D 是图 9.1 中的有向图，显然，它不是定理的反例. 因此，$y\neq x\neq z$. 下面分两种情况.

a) $x=v$. 用 $\mathcal{T}_{v,1}(D)$ ($\mathcal{T}_{v,q}(D)$) 表示起始 (终止) 弧为 (v,v) 的 D 的欧拉迹的集合. 那么

$$\mathcal{T}_v(D) = \mathcal{T}_{v,1}(D) \cup \mathcal{T}_{v,q}(D), \tag{13a}$$

并且存在双射 $\mathcal{T}_{v,1}(D) \leftrightarrow \mathcal{T}_{v,q}(D)$ 定义如下：

$$T_1 := (v,v), T_0 \leftrightarrow T_q := T_0, (v,v) \ , \tag{13b}$$

其中

$$T_0 \in T_v(D_0) \quad 且 \quad D_0 := D - \{(v,v)\} \ .$$

设 $(v,v)=a_{i_1}$，如果

$$\pi_{T_1} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_q \end{pmatrix} ,$$

那么有

$$\begin{aligned}\pi_{T_q}\pi_{T_1}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q \\ i_2, & i_3, & \cdots, & i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_q \\ 1, & 2, & \cdots, & q \end{pmatrix} \\ &= (1,2,3,\cdots,q) = (1,2)(1,3)\cdots(1,q).\end{aligned}$$

因 q 是偶数，所以这是一个奇置换 (图 9.2)，所以有

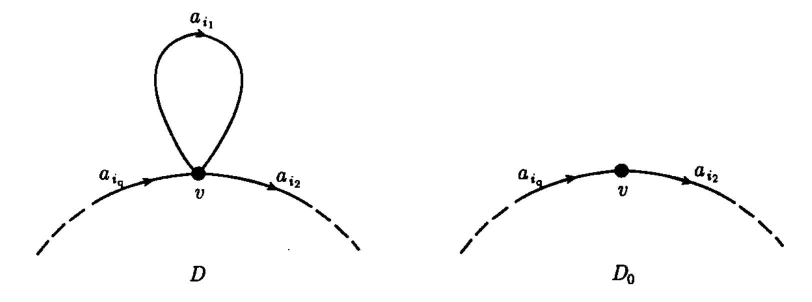


图 9.2 每一个 $T \in \mathcal{T}_v(D)$ 是有形式 $T = a_{i_1}, T_0$ 或 $T = T_0, a_i$，其中 $T_0 \in \mathcal{T}_v(D_0)$

$$\operatorname{sgn}(T_1) = -\operatorname{sgn}(T_q) \ .$$

再联系于双射 (13b) 和式 (13a)，则推出 (2) 是成立的，从而又与 D 的选择矛盾.

b) $x \neq v$. 在这种情况下，构造有向图

$$D_1 := (D - x) \cup \{a_{y,z}\} \ ,$$

其中 $a_{y,z} \notin A(D)$ 是由 y 到 z 的弧. 首先观察 D_1 满足 (12)，以及 $|\mathcal{T}_v(D_1)| = |\mathcal{T}_v(D)|$ 且 $p_{D_1} < p_D$. 按归纳假设定理对 D_1 成立. 由注 8.1a) 的最后一部分，不失一般性，假定 D 中弧的标号满足 $a_{q-2} = (y,x)$，$a_{q-1} = (x,x)$，$a_q = (x,z)$. 令 $b_i := a_i (1 \leqslant i < q-2)$，而 $b_{q-2} = a_{y,z}$. 观察元素 $T \in \mathcal{T}_v(D)$ 和 $T_1 \in \mathcal{T}_v(D_1)$ 之间的双射

$$T = T', (y,x), (x,x), (x,z), T'' \leftrightarrow T_1 = T', a_{y,z}, T'' \ , \tag{13c}$$

其中 T' 和 T'' 是 T 的子迹 (图 9.3). 如情况 a) 一样表示 π_T，我们得到

$$\pi_T = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & j-2, & j-1, & j, & j+1, & \cdots, & q-1, & q \\ i_1, & i_2, & \cdots, & q-2, & q-1, & q, & i_{j+1}, & \cdots, & i_{q-1}, & i_q \end{pmatrix},$$

$$\pi_{T_1} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & j-2, & j-1, & j, & \cdots, & q-2 \\ i_1, & i_2, & \cdots, & q-2, & i_{j+1}, & i_{j+2}, & \cdots, & i_q \end{pmatrix},$$

其中 $j \in \{3, \cdots, q\}$. 对

$$\pi^*_{T_1} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & j-2, & j-1, & j, & \cdots, & q-2, & q-1, & q \\ i_1, & i_2, & \cdots, & q-2, & i_{j+1}, & i_{j+2}, & \cdots, & i_q, & q-1, & q \end{pmatrix} \ ,$$

$$\operatorname{sgn}(\pi_{T_1}) = \operatorname{sgn}(\pi^*_{T_1}), \tag{13d}$$

并且当 j 是偶数时有

$$\begin{aligned} \pi^*_{T_1} \pi_T^{-1} &= (j-1, j+1, j+3, \cdots, q-1)(j, j+2, \cdots, q) \\ &= (j-1, j+1)(j-1, j+3) \cdots (j-1, q-1)(j, j+2) \cdots (j, q) \ , \end{aligned}$$

当 j 是奇数时有

$$\begin{aligned}\pi^*_{T_1}\pi_T^{-1} &= (j-1, j+1, \cdots, q, j, j+2, \cdots, q-1)\\ &= (j-1, j+1)(j-1, j+3)\cdots(j-1, q)(j-1, j)(j-1, j+2)\cdots(j-1, q-1)\end{aligned}$$

(注意 $(k_1, k_2, \cdots, k_m) = (k_1, k_2)(k_1, k_3)\cdots(k_1, k_m)$). 因此，在表达式 $\pi^*_{T_1}\pi_T^{-1}$ 中，对换的个数为 $q-j+\delta$，其中 $\delta \in \{0,1\}$ 满足 $\delta \equiv j \pmod 2$，即 $q-j+\delta \equiv 0 \pmod 2$. 因此，

$$\operatorname{sgn}(\pi^*_{T_1}) = \operatorname{sgn}(\pi_T) .$$

再联系到 (13d)，则可得

$$\operatorname{sgn}(T_1) = \operatorname{sgn}(T) , \tag{13e}$$

其中 T_1 和 T 间的关系由式 (13c) 给出. 因此，由 (13c)，(13e) 和 D_1 满足定理，则可推出

$$|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D_1)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D_1)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)| .$$

这与 D 的选择矛盾，从而推出 (13) 成立. 下面我们证明

$$D \text{ 不含 2 次顶点.} \tag{14}$$

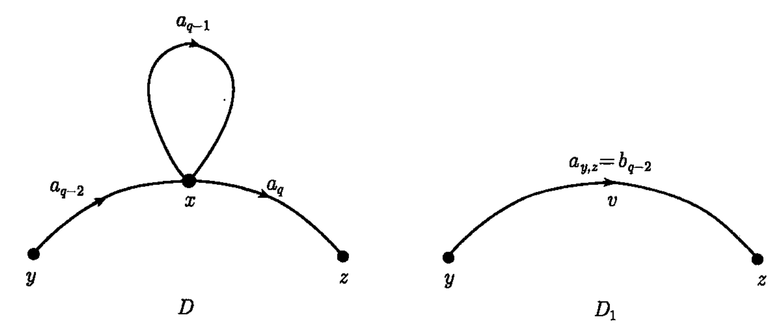


图 9.3　若 $x \neq v$，每一个 $T \in \mathcal{T}_v(D)$ 恰好对应一个 $T_1 \in \mathcal{T}_v(D_1)$，反之亦然

假设 D 包含 2 次顶点 x，使得 $(y,x) \in A(D)$ 且 $d(y) > 2$，这里因为 $q_D > p_D$. 令顶点 z' 满足 $A_x = \{(y,x),(x,z')\}$，允许 $y = z'$. 设 z 表示由 z' 可到达的第一个使得 $d(z) > 2$ 的顶点，这里可能 $z = z'$ 或 $z = y$. 考虑下述两种主要情况.

a) $|\{x,y,z\} - \{v\}| \geqslant 2$. 此时 $y \neq v$ 或者 $z \neq v$. 令 $w \in \{y,z\}$ 且 $w \neq v$. 对于包含 x 的路 (圈，若 $y = z$) $P = P(y,z)$，令 $a_j \in A_w \cap A(P)$；若 $y \neq z$，则 a_j 是唯一确定的.

(a_1) $v \neq x$. 对任意 $a_i \in A_w$，应用分裂运算形成一个欧拉有向图 $D_{i,j}$，即若 $w = y$，取 $a_i \in A_w^-$；若 $w = z$，取 $a_i \in A_w^+$. 设分裂运算得到的 (唯一 2 次) 顶点为 $w_{i,j} \in V(D_{i,j}) - V(D)$，$x^*$ 为 $w_{i,j}$ 在 $V(P) \cap V(D_{i,j})$ 中的邻点 (若 $w = y$，则

$x = x^*$)，把 $w_{i,j}$ 压平，并且加一条环 (x^*, x^*). 这样得到的图记为 D_i (图 9.4). 由构造可知

$$q_{D_i} = q_D, \quad p_{D_i} = p_D \ . \tag{14a$_1$}$$

重新对弧标号，对于 $a_\ell \in A(D) \cap A(D_i)$，定义 $b_\ell := a_\ell$，记 $A(D_i) - (A(D) \cup \{(x^*, x^*)\})$ 中唯一的弧为 b_i，而记 $b_j := (x^*, x^*)$. 按情况 a) 的假设及 $x \neq v$，可以选取 w, 使得 $v \neq x^*$ 成立. 由 D_i 的构造，弧的标号以及 $v \neq x^*$，则能推出结论

(i_1) 对 $i \neq r$，$\mathcal{T}_v(D_i) \cap \mathcal{T}_v(D_r) = \varnothing$；

(i_2) 每一个 $T \in \mathcal{T}_v(D)$，存在某个 i，使得 T 对应唯一的一个 $T' \in \mathcal{T}_v(D_i)$，并且 $\pi_T = \pi_{T'}$；

(i_3) $|\mathcal{T}_v(D)| = \sum |\mathcal{T}_v(D_i)|$，其中的和式共有 $\frac{1}{2}d(w)$ 项.

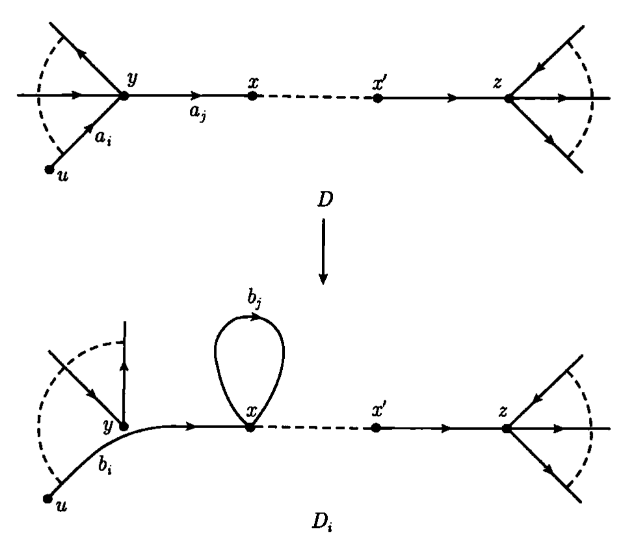


图 9.4 情形 (a_1) 对 $w = y$ (因此，$x = x^*$)，把 D 变换为 D_i，可能有 $u = y$. 注意若 $T' \in \mathcal{T}_y(D_i)$，相应的 $T \in \mathcal{T}_y(D)$ 不起始于 a_j

这个定理对不连通的 D_i 是无意义的，并且由 ($14\mathrm{a}_1$) 和 (13)，它可应用于每一个弱连通的 D_i. 再结合 (i_1),(i_2),(i_3)，可推出 (2) 成立，这与 D 的选择矛盾.

(a_2) $v = x$，因此，$y \neq z$. 置 $w = y$，构造有向图图 D_i 和其弧的标号，作法同情形 (a_1). 但现在讨论 $\mathcal{T}_y(D_i)$ 而代替 $\mathcal{T}_v(D_i)$. 类似于 (i_1) ~ (i_3)，我们有

(j_1) 对 $i \neq r$，$\mathcal{T}_y(D_i) \cap \mathcal{T}_y(D_r) = \varnothing$；

(j_2) 每一个 $T \in \mathcal{T}_y(D)$，或者存在某个 i，使得 T 对应唯一的一个 $T' \in \mathcal{T}_y(D_i)$，并且 $\pi_T = \pi_{T'}$，或者 T 起始于 $a_j = (y, x)$.

在后一种情况，可表示 $T_{a_j} := T$ 为下述形式：

$$T_{a_j} = a_j, T(x, y) \ ,$$

其中 $T(x,y)$ 对应于 D 中连接 x 和 y 的子迹. 这样就得到 $\mathcal{T}_{a_j}(D) := \{T_{a_j} \in \mathcal{T}_y(D) \mid T_{a_j}$ 起始于 $a_j\}$ 和 $T_x(D)$ 之间的双射：

$$T_{a_j} \in \mathcal{T}_{a_j}(D) \leftrightarrow T_x = T(x,y),\ a_j \in \mathcal{T}_x(D)\ .$$

(j₃) $|\mathcal{T}_{a_j}(D)| = |\mathcal{T}_x(D)| = |\mathcal{T}_y(D)| - \sum|\mathcal{T}_y(D_i)|$，其中的和式共有 $\frac{1}{2}d(y)$ 项. 然而，上述双射蕴涵着

$$\operatorname{sgn}(T_{a_j}) = -\operatorname{sgn}(T_x) \tag{14a$_2$}$$

(注意 $\pi_{T_x}\pi_{T_{a_j}}^{-1} = (1,2,3,\cdots,q)$，并与 (13b) 比较，可得结论). 另外，由构造可知 (14a₁) 成立，并且因为情形 (a₁) 已证，所以下述等式成立：

$$|\mathcal{T}_y^{\mathrm{e}}(D)| = |\mathcal{T}_y^{\mathrm{o}}(D)|,\quad |\mathcal{T}_y^{\mathrm{e}}(D_i)| = |\mathcal{T}_y^{\mathrm{o}}(D_i)|\ ,$$

现结合 (j₁),(j₂),(j₃) 和 (14a₂)，则可推出

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}_x^{\mathrm{e}}(D)| &= |\mathcal{T}_{a_j}^{\mathrm{o}}(D)| = |\mathcal{T}_y^{\mathrm{e}}(D)| - \sum|\mathcal{T}_y^{\mathrm{o}}(D_i)|\\ &= |\mathcal{T}_y^{\mathrm{e}}(D)| - \sum|\mathcal{T}_y^{\mathrm{e}}(D_i)| = |\mathcal{T}_{a_j}^{\mathrm{e}}(D) = |\mathcal{T}_x^{\mathrm{o}}(D)|\ .\end{aligned}$$

这与 D 的选择矛盾，情形 (a₂) 从而情况 a) 证毕.

b) $|\{x,y,z\} - \{v\}| = 1$. 此时有 $y = z := t$，$v = t$ 或 $v = x$. 用 C 表示 D 中包含 x 的圈.

(b₁) $v = x$. 先假定 $A_x \subset A_t$. 由注 9.1a)，不失一般性，假设 $a_{q-1} \in A_x^+$，$a_q \in A_x^-$，那么 $D_x := D - x$ 满足 (12)，用 D_x 代替 D (其中 $p_{D_x} = p_D - 1$，$q_{D_x} = q_D - 2$). 因此，定理适用于 D_x. 另外，$\mathcal{T}_t(D_x)$ 和 $\mathcal{T}_x(D)$ 之间的双射为

$$T_t \in \mathcal{T}_t(D_x) \leftrightarrow T_x := a_{q-1},\ T_t, a_q \in \mathcal{T}_x(D)\ ,$$

相应地，欧拉置换为

$$\pi_{T_t} = \begin{pmatrix} 1, & \cdots, & q-2 \\ i_1, & \cdots, & i_{q-2} \end{pmatrix},$$

$$\pi_{T_x} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \cdots, & q-1, & q \\ q-1, & i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-2}, & q \end{pmatrix}$$

以及

$$\pi_{T_t}^* = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q-2, & q-1, & q \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-2}, & q-1, & q \end{pmatrix},$$

$$\pi_{T_t}^*\pi_{T_x}^{-1} = (\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ q-2,\ q-1\ ),$$

由此得到

$$\operatorname{sgn}(\pi_{T_t}) = \operatorname{sgn}(\pi^*_{T_t}) = \operatorname{sgn}(\pi_{T_x}) \ ,$$

即因为当 $v=t$ 时 D_x 满足 (2)，所以当 $v=x$ 时 D 满足 (2)，这与 D 的选择矛盾.

现在设 $A_x \not\subset A_t$. 明确地选择 $w=t$，$a_j=(x',t)\in A(C)$，$a_i \in A_t^+ - A(C)$，然后与情形 (a₁) 一样，构造 $D_{j,i}$ 和 D_i. 注意在这种情况的假设下，$x \neq x'$；因此，$d_D(x)=d_{D_i}(x)=2$，$x^*=x'$ (图 9.4). 因为在当前的情况下，情形 (a₁) 中的结论 (i₁) ~ (i₃) 仍成立，所以 D 满足 (2). 这与 D 的选择矛盾. 这就证明了情形 $v=x$.

(b₂) $v=t$. 对 $w=t$，$a_j=(t,x)$，$a_j\in A_t^- - A(C)$ (图 9.4)，如情形 (a₁) 一样，构造图 $D_{i,j}$ 和 D_i. 在目前情况下，情形 (a₂) 中的结论 (j₁) ~ (j₃) 略加修改仍成立，即

(k₁) = (j₁)，(k₂) = (j₂) (用 t 代替 y).

(k₃) $|\mathcal{T}_t(D)| = |\mathcal{T}_{a_j}(D)| + \sum|\mathcal{T}_t(D_i)|$，其中的和式共有 $\mathrm{id}(t)$ 项，并且 $|\mathcal{T}_{a_j}(D)| = \mathcal{T}_x(D)|$.

我们也注意到，在目前情况下，(14a₂) 成立. 如情形 (a₂) 的论证一样，可证明

$$|\mathcal{T}_t^{\mathrm{o}}(D_i)| = |\mathcal{T}_t^{\mathrm{e}}(D)_i| \ .$$

此外，由于情形 (b₁) 已证明，那么由 (14a₂) 断定

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_{a_j}(D)| = |\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_x(D)| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_x(D)| = |\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_{a_j}(D)| \ .$$

由此及前述等式和 (k₃) 可推出当 $v=t$ 时，定理成立. 这个矛盾说明 D 没有 2 次顶点①.

然而，由 $\sum d(v) = 2q_D$，$q_D = 2p_D$，$d(v)\geqslant 4$ 以及 (13) 可推出

$$D \text{ 是无环 2- 正则有向图 .} \tag{15}$$

对于 $p_D=2$，相应的欧拉置换是克莱因 (Klein) 群的元素，其中有两个偶置换、两个奇置换. 因此，对 $p_D=2$，定理成立. 故由 D 的选择可知，必有 $p_D\geqslant 3$. 因此，同理可论证，存在弧 $(y,z)\in A(D)$，使得 $y\neq v\neq z\neq y$. 由注 9.1a)，我们可记

$$A_y^- = \{a_1,a_2\}, \quad A_y^+ = \{a_3,a_4\}, \quad A_z^- = \{a_4,a_5\}, \quad A_z^+ = \{a_6,a_7\} \ .$$

可能有 $A_y\cap A_z \supset \{a_4\}$，但这与下述讨论没有关系.

① 在 [SWAN63a, 69a] 中错误地假定 x 没有 2 次邻点. 这个错误对情况 a) 的讨论影响不大，但限制了对情形 b)(b₁) 前面部分的讨论. 这个错误是文格尔发现的 [WENG82a]，他用类似于我们的方法解决了剩余的情形 (归纳为 (a₁) 或 (a₂)).

对 $i=1,2$，按下述方式构造欧拉有向图 D_i^*：用两种可能的方法之一把 y 分裂为两个 2 次顶点，使得 a_4 和 $a_i(i=1,2)$ 相邻；压平关联于 a_4 的 2 次顶点，并在 z 上附一个环 (z,z). D_i^* 的弧的标号为 $b_m:=a_m(m\neq 4,i)$；定义 $b_4:=(z,z)$ 且令 b_i 是 $A(D_i^*)-(A(D)\cup\{(z,z)\})(i=1,2)$ 的唯一元素. 由 D 到 D_i^* 的这个变换表示在图 9.5 上，其中 $b_l:=a_l$ 表示相邻于 a_3 的弧. 因此，$\{i,l\}=\{1,2\}$.

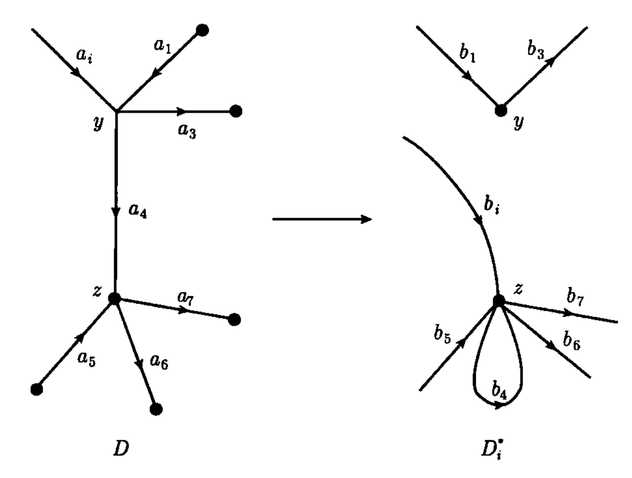


图 9.5　D 变换为 D_i^*

观察下述事实：

(l_1) $\mathcal{T}_v(D_1^*)\cap\mathcal{T}_v(D_2^*)=\varnothing$；

(l_2) 对 $i=1$ 或 $i=2$，每个 $T\in\mathcal{T}_v(D)$ 对应于唯一的 $T'\in\mathcal{T}_v(D_i^*)$，使得 $\pi_T=\pi_{T'}$；

(l_3) $p_{D_i^*}=p_D$，$q_{D_i^*}=q_D$. 因此，由 (14) 和 (15)，对于 $i=1,2$，定理适用于 D_i^*.

不幸的是，(l_2) 中的对应性不是双射，因为它没有覆盖形如

$$T^*=\cdots,b_5,b_4,b_s,\cdots,\quad s\in\{6,7\}\tag{15*}$$

的元素 $T^*\in\mathcal{T}_v(D_i^*)(i=1,2)$. 为了克服这个缺馅，令 $w=z$，$x^*=z$，$j=4$，$i=r$，$r=6,7$，并且像 (14) 的证明中情况 (a_1) 一样，分别构造 $D_{4,r}$ 和 D_r. 类似于 D_i^* (用 r 代替 i) 的弧的标号，给 D_r 的弧标号，并令 s 满足 $\{r,s\}=\{6,7\}$(图 9.6).

现在观察另一些事实：

(l_4) 型如 (15*) 的那些 $T^*\in\mathcal{T}_v(D_i^*)$ 和 $T''\in\mathcal{T}_v(D_r)$ 之间存在双射，使得 $\pi_{T^*}=\pi_{T''}$；

(l_5) $p_{D_r}=p_D$，$q_{D_r}=q_D$，并且由 (15) 可知，定理适用于 D_r.

一方面，由 (l_2) 和 (l_4)，另一方面，由 (l_3) 和 (l_5)，我们有

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D)| &= |\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D_1^*)| + |\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D_2^*)| - (|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D_6)| + |\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D_7)| \\ &= |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D_1^*)| + |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D_2^*)| - (|\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D_6)| + |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D_7)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)| \,.\end{aligned}$$

也就是说，D 满足定理的结论，这与 D 的选择矛盾.

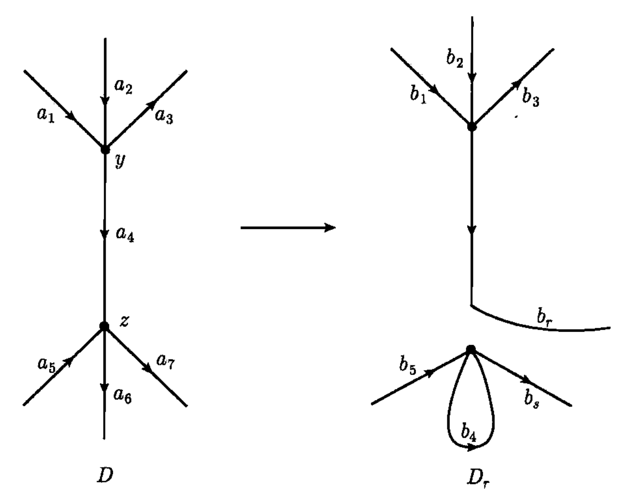


图 9.6 D 变换为 D_r

至此已证明对 D 所有可能情况的选择均有 $|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)|$. 因此，定理没有反例，定理 9.2 证毕.

注意定理 9.2 所描述的条件 $q_D \geqslant 2p_D$ 是不能减弱的，这可以从图 9.1 中的有向图细分一条弧后得到的欧拉有向图 D_1 看出. 因为当 v 是 D_1 的 2 次顶点时，$\mathcal{T}_v(D_1) = 1$ (若 v 是 4 次顶点，则 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D_1) = \varnothing$ 或 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D_1) = \varnothing$，依赖于 D_1 弧的标号)，所以定理 9.2 的结论不适用于 D_1，而此时 $q_{D_1} = 2p_{D_1} - 1$. 事实上，以 D_1 为基础可以构造出与定理 9.2 结论相悖的无穷多个反例 D，使得 $q_D = 2p_D - 1$ (见 [SWAN63a]). 这只要在 D_1 的每一个 2 次顶点上加一个 2 边形. 这个过程可以连续做下去. 按这种方式得到的每一个 D 满足 $q_D = 2p_D - 1$，并且恰有一个 2 次顶点，若以该 2 次顶点为根，则恰有 D 的一条欧拉迹. 因此，定理 9.2 的结论不适合于 D.

然而，还有一点需要说明，定理 9.2 没有涉及关于 $\mathcal{T}(D)$ 的一般奇偶元素的更多内容，其中 $\mathcal{T}(D)$ 是定理 7.1 定义的 (见注 9.1a)). $\mathcal{T}(D) \neq \mathcal{T}_v(D)$ 也可能成立 (见前段和注 9.1 的陈述 $(*), (**)$). 但是若 D 满足定理 9.2 的假设且有 2 次顶点 v，那么在定义 7.1 的意义下有 $\mathcal{T}_v(D) = \mathcal{T}(D)$，并且按定理的结论有

$$\frac{1}{2}|\mathcal{T}(D)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)| \,.$$

换言之，给定根 v 和初始弧 $a_1 = (v, t)$，在一般情况下，虽然在定义 7.1 和 $(*)$ 的

意义下有 $\mathcal{T}(D)=\mathcal{T}_{a_1}(D)$ ($\mathcal{T}_{a_1}(D),\mathcal{T}^{\rm e}_{a_1}(D),\mathcal{T}^{\rm o}_{a_1}(D)$ 定义为起始于 a_1 的相应欧拉迹的集合)，但是定理 9.2 一般没有回答 $|\mathcal{T}^{\rm e}_{a_1}(D)|=|\mathcal{T}^{\rm o}_{a_1}(D)|$ 是否成立.

归功于苏兹柏格 (M.P. Schützenberger)，前述讨论直接导出定理 9.2 的一个推论，它是 1958 年被证明的①.

推论 9.3 设 D 是有向图且满足 $q=q_D\geqslant 2p_D+1$，其中 $A(D)=\{a_1,\cdots,a_q\}$，则以 a_1 为起始弧的 D 的偶欧拉迹数目与奇欧拉迹的数目相等.

证明 不失一般性，设 D 是弱连通的欧拉有向图，否则，定理显然成立. 对 $v\notin V(D)$，$a_1=(x,y)$，构造有向图

$$D_1:=(D-\{a_1\})\cup\{v,(x,v),(v,y)\}\ ,$$

那么 D_1 也是弱连通欧拉有向图. 定义 D_1 的弧的标号为

$$b_i:=a_i,\ i=2,\cdots,q,\quad b_1:=(v,y),\quad b_{q+1}:=(x,v)\ .$$

因为 $q_{D_1}=q_D+1\geqslant 2p_D+2=2p_{D_1}$，所以可将定理 9.2 应用于 D_1. 因此，$|\mathcal{T}^{\rm e}_v(D_1)|=|\mathcal{T}^{\rm o}_v(D_1)|$. 它们的对应性

$$T_{a_1}=a_1,\cdots,a_{i_q}\leftrightarrow T_v=b_1,\cdots,b_{i_q},b_{q+1}$$

定义了 $\mathcal{T}_{a_1}(D)$ 和 $\mathcal{T}_v(D_1)$ 之间的一个双射，使得

$$\operatorname{sgn}(T_{a_1})=\operatorname{sgn}(T_v)\ .$$

由此和前面的等式即可推出推论 9.3.

推论 9.3 蕴涵着关于图、有向图或混合图的欧拉迹数目的奇偶性结果，这个证明留作练习.

推论 9.4 设 H 是图或有向图或混合图，如果 $q_H>2p_H$，则 $\mathcal{T}(H)$ 是偶数.

注 9.5 与引用的参考文献中的证明相比较，定理 9.2 的证明太长. 但是这个定理的证明是典型例子，很容易忽略一些特殊的情况. 因此，我写出的证明的所有细节，甚至为了说明有向图上的运算如何影响它的欧拉迹的符号，我把所有的显式置换也列了出来. 这一方法以达到使下述讨论与定理 9.2 相分离的目的，而不是对 (混合) 图和有向图的奇和偶覆盖迹建立统一理论.

为推广本节前述讨论，令 H 表示一个图，或有向图，或混合图. 令 $G:=G_H$ 表示基图 (如果 H 是一个图，则 $G=H$). 给 H 的边和弧标号为 $b_1,\cdots,b_q$，$q=q_H$. 假设 G 有一个 (闭或开) 覆盖迹 T_G，起点为 $v\in V(G)=V(H)$，考察 G 在 H 里对

① 见 [BERG66a, p170] 的脚注和 [BERG73a, 第 11 章, 定理 9]. 后一篇文献中的证明有很大一部分与斯万的证明是一致的，也省掉了某些情况的讨论 (见前面的脚注). [BOLL79a, 第 5 节, 引理 15] 里也有同样的错误. 作为历史记载，我们注意到斯万在他的文章 [SWAN63a] 的脚注里感谢了苏兹伯格的结果.

应的弧和边的序列 T. 设 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 表示以 v 为起点的所有这样的弧和边的序列的集合. 当然，正如有向图的情况一样，T_G 对应的置换为

$$\pi_{T_G} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_q \end{pmatrix};$$

相应地，定义 $\operatorname{sgn}(T_G)$.

然而，由于 T 中的弧 (x,y) 可能被通过的方向是 y 到 x，即沿反方向通过，所以符号函数的这个定义不适合描述 T. 令 o_T 表示**T 以反向通过 H 的弧的数目**，并定义

$$\operatorname{sgn}(T) = (-1)^{o_T}\operatorname{sgn}(T_G)\ .$$

相应地，若 $\operatorname{sgn}(T) = -1\ (+1)$，则称 T 是奇 (偶) 的 (注意若 T_G 是偶 (奇) 的，T 可能是奇 (偶) 的)，我们用 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G,H)$ ($\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G,H)$) 表示对应的奇 (偶)$T$ 的集合①.

注 9.6 a) 像有向图中的闭或开覆盖迹一样，在 $T \in \mathcal{T}_v(G,H)$ 的情况下，$\operatorname{sgn}(T)$ 依赖于 v 的选取和 $E(H) \cup A(H)$ 中的元素的标号选择. 但是如果对一种标号有 $|\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G,H)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G,H)|$，那么对 $E(H) \cup A(H)$ 的任一种标号 $\{b_i \mid i = 1,\cdots,q\}$ 这个关系式成立. 由于 o_T 是独立于标号的参数. 因此，在注 9.1a) 中建立的一些等式在更一般的情况下也成立，所以在下述的一些结果中，我们不必总是提及这样的标号. 在下文中，如果对某个 $v \in V(H)$ 有 $|\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G,H)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G,H)|$，则称 v 为**均衡的**；如果每个 $v \in V(H)$ 都是均衡的，则称 H 为均衡的②.

b) 如果 H 是均衡的，那么 $H' := (H - a) \cup \{a^{\mathrm{R}}\}$ 也是均衡的. 因为将任意 $T \in \mathcal{T}_v(G,H)$ 与对应的 $T' \in \mathcal{T}_v(G,H')$ 相比较，由 $T_G = T'_G$ 和 $|o_T - o_{T'}| = 1$ 可知有 $\operatorname{sgn}(T) = -\operatorname{sgn}(T')$. 因此，由归纳法可断定，如果 H'' 是由 H 中某些弧反向后得到的混合图，那么 H'' 是均衡的当且仅当 H 是均衡的 (注意这里 $E(H) = E(H')$).

c) 若对某个 $b \in E(H)$ 或 $b \in A(H)$ 有 $\lambda(b) > 1$，则 H 是均衡的. 这个结论的证明类似于定理 9.2 的证明中的建立式 (1) 的方法.

d) 如果 H 有两个奇顶点，如 x 和 y，那么 H 是均衡的当且仅当 x 或 y 是均衡的 (读者可以写出详细证明作为练习，对图的情况见 [HUTC74b, 命题 2]).

对任何情况，定理 9.2 都可推出下述结果 (这里假定 $E(H) \cup A(H)$ 中的元素已标号).

引理 9.7 如果 $q_H \geqslant 2p_H$，则 H 是均衡的.

证明 为了对至少一个 $v \in V(H)$，使得 $\mathcal{T}_v(G,H) \neq \varnothing$ (否则，H 是均衡的)，设 $G := G_H$ 连通，并且 G 是欧拉的，或 G 恰有两个奇次顶点 v 和 w. 如果 G 是

① 哈钦森 (Joan P. Hutchinson) 在 [HUTC74a, 74b, 75a] 中分别称之为负 (正)E 路和 E 圈.

② 在 [HUTC74a,74b,75a] 中，这样的点在有向图或混合图是称为零位，在图中称为消元.

欧拉的，令 $\tilde{O}_E(G) := \{H_1, \cdots, H_k\}(k \geqslant 2)$ 是 G 的欧拉定向集合，否则，$\tilde{O}_E(G)$ 表示使得 $H_i \cup \{a_{w,v}\}(i = 1, \cdots, k)$ 为欧拉的 G 的定向集合，其中 $a_{w,v} \notin A(H_i)$ 是连接 w 到 v 的弧.

按定理 9.2，$|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(H_i)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(H_i)| \neq 0$，其中当 G 是欧拉时，v 是 H 的任意顶点，否则，v 是 G 的一个奇次顶点，使得 $\mathrm{id}_{H_i}(v) = \mathrm{od}_{H_i}(v) - 1(i = 1, \cdots, k)$. 在后一种情况下，对 v 的其他选择有 $\mathcal{T}_v(H_i) = \varnothing$，并因此定理成立.

另一方面，每一个 $T \in \mathcal{T}_v(G, H)$ 恰好导出一个定向 $H_i \in \tilde{O}_E(G)(i \in \{1, \cdots, k\})$. 它是将 H 中的边定向和 H 中某些弧反向而得到的. 注意每一个 $T' \in \mathcal{T}_v(H_i)(i = 1, \cdots, k)$ 对应唯一的 $T \in \mathcal{T}_v(G, H)$. 因此有

$$|\mathcal{T}_v(G, H)| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{T}_v(H_i)| \ .$$

根据注 9.6b) 的第一部分，以及对 $H'' = H_i$，每一个 $T' \in \mathcal{T}_v(H_i)$，$H$ 中被反向的弧是相同的，所以我们断定：$\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(H_i)$ 对应于 $\mathcal{T}_v(G, H)$ 的一个子集 $\mathcal{T}^*$ 完全包含在 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G, H)$，当且仅当 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(H_i)$ 对应于这样一个子集完全包含在 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G, H)$ 中，并且 $\mathcal{T}^* \cap \mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G, H) \neq \varnothing$ 当且仅当 $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G, H)$. 由此和上述等式，以及定理 9.2 的上述应用可得

$$|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G, H)| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{T}_v^{\gamma_i}(H_i)| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{T}_v^{\delta_i}(H_i)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G, H)| \ ,$$

其中对 $i = 1, \cdots, k$ 有 $\{\gamma_i, \delta_i\} = \{\mathrm{e}, \mathrm{o}\}$ 且 $\gamma_i = \mathrm{e}\ (= \mathrm{o})$，当且仅当 $|A(H) - A(H_i)| \equiv 0 \pmod 2$ $(\equiv 1 \pmod 2)$. 引理证毕.

推论 9.7a 如果 $q_H \geqslant 2p_H + 1$，则对每个 $v \in V(H)$ 和每个 $b \in A_v \cup E_v$，$\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G, H)$ 中起始于 b 的元素个数与 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G, H)$ 中起始于 b 的元素个数相等.

前面已见到，引理 9.7 也可由定理 9.2 得到，用相同的方法，推论 9.7a 可由推论 9.3 推出，证明留作练习.

注意即使 H 是图的情况，引理 9.7 也推不出推论 9.4，这是因为对 $T \in \mathcal{T}_v(G, H)$，$T$ 也有反序列 $T^{\mathrm{R}} \in \mathcal{T}_v(G, H)$.

在图的情况下，使得 H 是均衡的有另外一个充分条件，这个条件与 q 的 (非平凡) 下界无关.

命题 9.8 ([HUTC74b, 命题 1]) 若 G 是欧拉图且满足 $q_D \equiv 2$ 或 $3 \pmod 4$，那么 G 是均衡的.

证明 若 G 是不连通，命题显然成立，故假设对 $H = G$ 和任意固定顶点 v 有 $\mathcal{T}_v(G) := \mathcal{T}_v(G, G) \neq \varnothing$，联系于每一个 $T = e_{i_1}, \cdots, e_{i_q} \in \mathcal{T}_v(G)$，$q := q_G$，有一反序列 $T^{\mathrm{R}} = e_{i_q}, \cdots, e_{i_1}$，因此得到

$$\pi_{T^{\mathrm{R}}}\pi_T^{-1}=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & q\\ i_q, & i_{q-1}, & \cdots, & i_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-1}, & i_q\\ 1, & 2, & \cdots, & q-1, & q\end{pmatrix}$$
$$=(1,q)(2,q-1)\cdots\left(\frac{q-\delta}{2},\frac{q+\delta}{2}+1\right),$$

其中 $\delta\in\{0,1\}$ 满足 $\delta\equiv q\pmod 2$. 由此可得 $\pi_{T^{\mathrm{R}}}\pi_T^{-1}$ 是奇置换当且仅当 $\frac{q-\delta}{2}\equiv 1\pmod 2$，即当且仅当 $q\equiv 2\pmod 4$ 或 $q\equiv 3\pmod 4$. 因此，如果 $q\equiv 2$ 或 $3\pmod 4$，那么 $\mathrm{sgn}(T^{\mathrm{R}})\neq\mathrm{sgn}(T)$，并且由 $T\leftrightarrow T^{\mathrm{R}}$ 确定的上述置换 $\mathcal{T}_v(G)\leftrightarrow\mathcal{T}_v(G)$ 变为双射 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G)\leftrightarrow\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G)$. 由此及 v 任意性推出命题成立.

为了下个命题，也为了进一步讨论平衡 (混合)(有向) 图的概念，需要对 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 中的元素进行某种分类. 从现在起，记 $\mathcal{T}_v(G):=\mathcal{T}_v(G,G)$，并且设 $T_G\in\mathcal{T}_v(G)$ 对应于元素 $T\in\mathcal{T}_v(G,H)$.

定义 9.9 设 H 是弱连通混合图，它的所有顶点都是偶次的. 令 $v\in V(G)$，假设 $E(H)\cup A(H)$ 中的元素已标号 $b_1,\cdots,b_q$，$q=q_H$. 对于 $T,T'\in\mathcal{T}_v(G,H)$，若 $\pi_{T_G}(j)=i_j$ 蕴涵着存在某个 $k\in\{1,\cdots,q\}$，使得对一切 $j=1,\cdots,q$ 有 $\pi_{T'_G}(j)=i_{j+k}$ (置 $j+q=j$，$j=1,\cdots,q$)，则称 T 和 T' 为**旋转等价的**.

容易看出，旋转等价的概念实际上是一个等价关系 RE，它的证明留作练习.

设 v 和 H 为定义 9.9 中所定义的，对 $d(v)=2r$，在 RE 下，$\mathcal{T}_v(G,H)$ 的每个等价类恰有 r 个元素. 因为若 T 和 T' 属于同一等价类，则 $X_T=X_{T'}$. 反之，则一般不成立 (见练习 9.3). 用 $\mathcal{P}_{\mathrm{RE}}(v)$ 表示由关系 RE 导出的 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 的等价类划分.

引理 9.10 设 H, RE 和 $\mathcal{P}_{\mathrm{RE}}(v)$ 是按定义 9.9 及其后一段所定义的. 假设 $q=q_H$ 是奇数，那么对每一等价类 $C\in\mathcal{P}_{\mathrm{RE}}(v)$ 和每个 $T,T'\in C$ 有 $\mathrm{sgn}(T)=\mathrm{sgn}(T')$.

证明 首先，由 T 和 T' 是旋转等价的定义得 $o_T=o_{T'}$，因为 T 和 T' 以反向通过相同的弧的集合，因此，只要证明 $\mathrm{sgn}(T_G)=\mathrm{sgn}(T'_G)$ 就可以了.

按 RE 的定义，若 $\pi_{T_G}=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & q\\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_q\end{pmatrix}$，则对某 $k\in\{1,\cdots,q\}$ 有

$$\pi_{T'_G}\pi_{T_G}^{-1}=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k+1, & \cdots, & q\\ k+1, & k+2, & \cdots, & 2k+1, & \cdots, & k\end{pmatrix}.$$

由 $\pi_{T'_G}\pi_{T_G}^{-1}$ 的结构可知，它可表示为长度为 s 的 q/s 个两两不相交的循环积，其中 $s\in\mathbb{N}$ 是使得 $s\cdot k\equiv 0\pmod q$ 的最小整数. 按 q 是奇数的假设，s 是奇的且这 q/s 个 (两两不交的) 置换循环中每一个可以都表示为 $s-1\equiv 0\pmod 2$ 个对换的积. 因此，$\pi_{T'_G}\pi_{T_G}^{-1}$ 能表示为偶数个对换的积，即 $\mathrm{sgn}(\pi_{T'_G}\pi_{T_G}^{-1})=1$，也就是说，

$$\mathrm{sgn}(T_G)=\mathrm{sgn}(\pi_{T_G})=\mathrm{sgn}(\pi_{T_G}^{-1})=\mathrm{sgn}(\pi_{T'_G})=\mathrm{sgn}(T'_G),$$

由此可推出引理成立.

推论 9.11 设 $T \in \mathcal{T}_v(G,H)$，$T' \in \mathcal{T}_w(G,H)$ 且满足 G 是欧拉的，$X_T = X_{T'}$，并且 T_G 和 T'_G 导出 G 的同一个欧拉定向. 如果 q_H 是奇数，那么 $\mathrm{sgn}(T) = \mathrm{sgn}(T')$.

证明 注意在引理 9.10 的证明中，没有应用 T 和 T' 的起始点相同这个条件. 另外，这个推论的假设还蕴涵着对 $\pi_{T_G}(j) = i_j$ 有 $\pi_{T'_G}(j) = i_{j+k}$ (见定义 9.9). 因此，这个推论由引理 9.10 可推出.

命题 9.8 和引理 9.10 是下一个结果的基础 (见 [HUTC74a, 引理 3.4], [HUTC74b, 命题 4], [HUTC75a, 引理 1,2]).

命题 9.12 设 H 是 (混合) (有向) 图，没有奇次顶点且 $q = q_H$ 是奇数，设 $\mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}} \subseteq \mathcal{T}_v(G,H)$ 是关于 $\mathcal{P}_{\mathrm{RE}}(v)$ 的代表的集合，其中 v 是 H 的一个固定顶点 (这里假定 $A(H) \cup E(H)$ 中元素已标号为 $b_1, \cdots, b_q$，$q = q_H$)，则下述结论等价：

1) v 是均衡的；

2) $|\{T \in \mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}} \mid \mathrm{sgn}(T) = 1\}| = |\{T \in \mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}} \mid \mathrm{sgn}(T) = -1\}|$；

3) H 是均衡的.

证明 不失一般性，设 H 是弱连通的，因此，$\mathcal{T}_v(G,H) \neq \varnothing$. 假定 $|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G,H)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G,H)|$，考察任一等价类 $C \in \mathcal{P}_{\mathrm{RE}}(v)$. 由 q 是奇数的假设和引理 9.10，对任意 $\delta \in \{e,o\}$，$C \cap \mathcal{T}_v^{\delta}(G,H) \neq \varnothing$ 蕴涵着 $C \subseteq \mathcal{T}_v^{\delta}(G,H)$. 其次，在任何情况下，$|C| = \frac{1}{2}d(v)$. $\mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}}^{\mathrm{e}}, \mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}}^{\mathrm{o}} \subset \mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}}$ 分别表示偶的和奇的弧 (边) 序列的代表子集，于是有

$$|\mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}}^{\mathrm{e}}| = \frac{2}{d(v)}|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(G,H)| = \frac{2}{d(v)}|\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(G,H)| = |\mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}}^{\mathrm{o}}|\,.$$

因此，1) 推出 2)；反之，把上式两边同乘以 $\frac{1}{2}d(v)$，同样可以得到由 2) 推出 1).

因为 3) 总是蕴涵 1)，所以要完成命题的证明，只要证明，1) 和 2) 蕴涵 3) 即可. 不失一般性，设 $p_H > 1$，这是因为当 $p_H = 1$ 时，1) 和 3) 是等价的. 任意选取 $w \in V(H) - \{v\}$，对每个 $T \in \mathcal{T}_w(G,H)$，考察它的反序列 T^{R}，并设 $T_G, T_G^{\mathrm{R}} \in \mathcal{T}_w(G)$ 是 G 中对应的欧拉迹. 由定义知

$$\mathrm{sgn}(T) = (-1)^{o_T}\mathrm{sgn}(T_G), \quad \mathrm{sgn}(T^{\mathrm{R}}) = (-1)^{o_{T^{\mathrm{R}}}}\mathrm{sgn}(T_G^{\mathrm{R}})\,,$$

因此，由命题 9.8 及其证明断言，$\mathrm{sgn}(T) = -\mathrm{sgn}(T^{\mathrm{R}})$ 当且仅当或者 $|E(H)|$ 是奇数且 $q_H \equiv 3 \pmod 4$，或者 $|E(H)|$ 是偶数且 $q_H \equiv 1 \pmod 4$. 在前一种情况下，$o_T \equiv o_{T^{\mathrm{R}}} \pmod 2$ 且 $\mathrm{sgn}(T_G) = -\mathrm{sgn}(T_G^{\mathrm{R}})$，而在后一种情况下，$o_T \not\equiv o_{T^{\mathrm{R}}} \pmod 2$ 且 $\mathrm{sgn}(T_G) = \mathrm{sgn}(T_G^{\mathrm{R}})$. 与命题 9.8 的证明类似，对任意 $w \in V(H) - \{v\}$，我们可证明 $|\mathcal{T}_w^{\mathrm{e}}(G,H)| = |\mathcal{T}_w^{\mathrm{e}}(G,H)|$，即 w 是均衡的. 由假设 v 是均衡的，因此，在所考察的情况下 H 是均衡的.

因此，剩下的情况是 $q_H \equiv 3 \pmod 4$ 且 $|E(H)|$ 为偶数，以及 $q_H \equiv 1$ (mod 4 和 $|E(H)| \equiv 1 \pmod 2$.

设 $\mathcal{T}_{v,\text{rep}} \subseteq \mathcal{T}_v(G,H)$ 是关于 $\mathcal{P}_{\text{RE}}(v)$ 的一个代表系. 不失一般性，假设 $\mathcal{T}_{v,\text{rep}}$ 的每一个元素起始或终止于一个固定的 $f \in E_v \cup A_v - \Lambda_v$ (因 H 是弱连通的，这样的 f 必存在). 用 $\mathcal{T}_v(f,1)$ ($\mathcal{T}_v(f,q)$) 表示起始 (终止) 于 f 的 $\mathcal{T}_{v,\text{rep}}$ 中的元素的集合，则有

$$\mathcal{T}_{v,\text{rep}} = \mathcal{T}_v(f,1) \cup \mathcal{T}_v(f,q) \,. \tag{1}$$

按定义，对于 $T \in \mathcal{T}_v(G,H)$，T 和它的反序列属于不同的等价类，故由 $\mathcal{T}_{v,\text{rep}}$ 的假设可得

$$\mathcal{T}_v(f,q) = \{T^{\text{R}} \in \mathcal{T}_v(G,H) \mid T \in \mathcal{T}_v(f,1)\} \tag{2}$$

(注意若 T_1 和 T_2 属于 $\mathcal{P}_{\text{RE}}(v)$ 的不同等价类，则 T_1^{R} 和 T_2^{R} 也属于 $\mathcal{P}_{\text{RE}}(v)$ 的不同等价类). 因为 $\text{sgn}(T) = \text{sgn}(T^{\text{R}})$ (这可由 q_H 和 $|E(H)|$ 的假设得出)，那么由 $\varphi(T) = T^{\text{R}}$ 定义的双射 $\varphi : \mathcal{T}_v(f,1) \leftrightarrow \mathcal{T}_v(f,q)$ 是*符号保持的* (即 $\text{sgn}(T) = \text{sgn}(\varphi(T))$). 由此及 (1)，(2) 和 2) 可推出

$$|\mathcal{T}_v^{\text{e}}(f,1)| = |\mathcal{T}_v^{\text{o}}(f,1)| \,, \tag{3}$$

其中 $\mathcal{T}_v^{\text{e}}(f,1)$ 和 $\mathcal{T}_v^{\text{o}}(f,1)$ 分别表示 $\mathcal{T}_v(f,1)$ 的偶元素和奇元素的集合.

现在我们再讨论 $\mathcal{T}_w(G,H)$. 对于 $T, T^{\text{R}} \in \mathcal{T}_w(G,H)$，由对应性 $T \leftrightarrow T^{\text{R}}$ 及在给定条件下推得 $\text{sgn}(T) = \text{sgn}(T^{\text{R}})$ 的事实，确定了一个符号保持双射 $\psi : \mathcal{T}_1 \leftrightarrow \mathcal{T}_2$，其中 $\mathcal{T}_1$ ($\mathcal{T}_2$) 是 $\mathcal{T}_w(G,H)$ 中起始 (终止) 于 v 通过 f 的所有元素集合. 因为 $\mathcal{T}_w(G,H) = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$，所以只要证明

$$|\mathcal{T}_1^{\text{e}}| = |\mathcal{T}_1^{\text{o}}| \tag{4}$$

即可，其中 $\mathcal{T}_1^{\text{e}}$ ($\mathcal{T}_1^{\text{o}}$) 表示 $\mathcal{T}_1$ 的偶 (奇) 元素集合. 同样有 $|\mathcal{T}_2^{\text{e}}| = |\mathcal{T}_2^{\text{o}}|$，由 $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \varnothing$ (因 $f \notin \Lambda(H)$) 得

$$|\mathcal{T}_w^{\text{e}}(G,H)| = |\mathcal{T}_1^{\text{e}}| + |\mathcal{T}_2^{\text{e}}| = |\mathcal{T}_1^{\text{o}}| + |\mathcal{T}_2^{\text{o}}| = |\mathcal{T}_w^{\text{o}}(G,H)| \,.$$

考虑关于等价关系 RE 的 $\mathcal{T}_w(G,H)$ 的相应划分的等价类 $\mathcal{P}_{\text{RE}}(w)$. 由引理 9.10 中 RE 的定义，对每个 $\delta \in \{e,o\}$ 和每个 $C \in \mathcal{P}_{\text{RE}}(w)$，$C \cap \mathcal{T}_1^{\delta} \neq \varnothing$ 蕴涵着 $C \subseteq \mathcal{T}_1^{\delta}$. 因此，$\mathcal{T}_1$ 是 $\mathcal{P}_{\text{RE}}(w)$ 中一些类的并集，因为这些等价类中每一类恰好含 $\dfrac{1}{2}d(w)$ 个元素，因此，要证明 (4) 只要找出含偶元素和奇元素个数相等的一个具体的 $\mathcal{T}_{w,\text{rep}}^{(1)} \subset \mathcal{T}_1$ 即可. 给定 RE 的定义，满足 $C \subseteq \mathcal{T}_1$ 的每一个 $C \in \mathcal{P}_{\text{RE}}(w)$ 恰好含有一个元素 $T_{C,f}$，使得 f 属于起始和终止于 w 的 $T_{C,f}$ 的首段 (即自 w 出发沿 $T_{C,f}$ 行走，在到达 w 之前经过 f). 令

$$\mathcal{T}_{w,\mathrm{rep}}^{(1)} := \{T_{C,f} \mid C \subseteq \mathcal{T}_1\} .$$

按 $\mathcal{T}_v(f,1)$ 和 $\mathcal{T}_{w,\mathrm{rep}}^{(1)}$ 的定义，这两个集合之间有下述双射：对于任意 $T_{C,f} \in \mathcal{T}_{w,\mathrm{rep}}^{(1)}$，设 $S(w,v)$ 是起始于 w 终止于 v 的 $T_{C,f}$ 的最长子序列，并且它不含 f 也不含起始及终止于 w 的段. 因此有

$$T_{C,f} = S(w,v), T(v,w) ,$$

其中 $T(v,w)$ 是 $T_{C,f}$ 的对应的补子序列. 按 $T_{C,f}$ 和 $S(w,v)$ 的定义，$T(v,w)$ 的第一条弧 (边) 必是 f. 因此有

$$T := T(v,w), S(w,v) \in \mathcal{T}_v(f,1) .$$

反之，对每一个 $T' \in \mathcal{T}_v(f,1)$，用 $S'(w,v)$ 表示起始于 w 且以标号 b_{i_q} 的弧 (边) 终止于 v (其中 $\pi_{T'_G}(q) = i_q$)，并且恰好含 $A_w \cup E_w$ 中一个元素的 T' 的子序列，那么有

$$T' = T'(v,w), S'(w,v) \quad \text{且} \quad T'_{C,f} := S'(w,v), T'(v,w) \in \mathcal{T}_{w,\mathrm{rep}}^{(1)} ,$$

其中 $T'(v,w)$ 表示相应的补序列. 特别地，上述 $S(w,v)$ 和 $S'(w,v)$ 的定义蕴涵着，若 $T = T'$，则有 $S(w,v) = S'(w,v)$. 因此，

$$T_{C,f} = S(w,v), T(v,w) \leftrightarrow T = T(v,w), S(w,v)$$

定义了 $\mathcal{T}_{w,\mathrm{rep}}^{(1)}$ 和 $\mathcal{T}_v(f,1)$ 之间的一个双射，由推论 9.11，这个双射是符号保持的. 由 (3) 可推出，$\mathcal{T}_{w,\mathrm{rep}}^{(1)}$ 中的奇元素个数和偶元素个数相等，故 (4) 成立，即 w 是均衡的. 由于 w 是 $V(H) - \{v\}$ 中的任一顶点及 v 是均衡的假设，所以 H 是均衡的. 命题 9.12 证毕.

接着命题 9.12 的证明，引进一些概念.

定义 9.13　设 H 是混合图，G 是 H 的基图，假设 H 的边和弧已给定标号. 令 $f = b_i \in A_v \cup E_v$ 且 f 不是有向环. 最后，令 $\mathcal{T}_v(f,1)$ 表示自顶点 v 沿 f 出发且对应于 G 的开的或闭的覆盖迹的 H 的所有弧 (边) 序列的集合，令 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(f,1)$ 和 $\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(f,1)$ 分别表示 $\mathcal{T}_v(f,1)$ 的偶元素和奇元素的子集. 记

$$t_{v,f}^{\mathrm{e}} := |\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(f,1)|, \quad t_{v,f}^{\mathrm{o}} := |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(f,1)|$$

(见命题 9.12 证明中的式 (1)). 相应地，称 f 为**关于 v 的均衡子**当且仅当 $t_{v,f}^{\mathrm{e}} = t_{v,f}^{\mathrm{o}}$，称 H 为 **f- 均衡的** 当且仅当对每个 $v \in V(H)$ 和每个非有向环 $f \in A_v \cup E_v$ 有 f 是均衡子 (见命题 9.12 证明中的式 (3)).

定义 9.13 中要求 f 不是有向环，这一要求与进一步讨论没有关系，下述引理说明这一事实，引理证明留作练习：

引理 9.14 设 H 是混合图，$A(H) \cup E(H) = \{b_1, \cdots, b_q\}$，如果 H 含有有向环，那么 H 是 f- 均衡的.

因此，以下我们总是假定 H 是不含有向环的. 我们还注意到若 H 的基图 G 是欧拉的，并且对 $v \neq w$，$f = (v, w)$ 或 $f = wv$，若 $t^{\mathrm{e}}_{v,f} = t^{\mathrm{o}}_{v,f}$，那么 $t^{\mathrm{e}}_{w,f} = t^{\mathrm{o}}_{w,f}$. 对 $T \in \mathcal{T}_v(f, 1)$，双射 $\varphi : T \leftrightarrow T^{\mathrm{R}}$ 或者是符号保持的，或者是符号相反的 (即 $\mathrm{sgn}(\varphi(T)) = -\mathrm{sgn}(T)$)，它与 q 的大小无关，并且 φ 也是 $\mathcal{T}_v(f, 1)$ 和 $\mathcal{T}_v(f, q)$ 之间的双射 (见命题 9.12 证明中的式 (2)). 其次，存在双射 $\psi : \mathcal{T}_v(f, q) \to \mathcal{T}_w(f, 1)$，定义为 $\psi(b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_q}) = b_{i_q}, b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_{q-1}}$，其中 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_q} \in \mathcal{T}_v(f, q)$，$f = b_{i_q}$. 由此可知，$\psi$ 是符号保持的当且仅当 q 是奇数，否则，ψ 是符号相反的. 因此，$\psi\varphi : \mathcal{T}_v(f, 1) \to \mathcal{T}_w(f, 1)$ 是符号保持的，或符号相反的双射，使得 $t^{\mathrm{e}}_{v,f} = t^{\mathrm{o}}_{v,f}$ 蕴涵 $t^{\mathrm{e}}_{w,f} = t^{\mathrm{o}}_{w,f}$. 反之亦然，所以 f 是均衡子与 f 所关联的顶点无关.

注意若 H 有奇次的顶点，那么只关联于偶次顶点的弧 (边) 自动地是一个均衡子. 因为在这种情况下，$G = G_H$ 有覆盖迹当且仅当 G 恰有两个奇次顶点，并且这条覆盖迹的起始点和终止点恰是这两个奇次顶点. 最后我们注意 H 是 f- 均衡蕴涵着 H 是均衡的. 特别地，推论 9.7a 断言，若 $q_H \geqslant 2p_H + 1$，则 H 是 f- 均衡的.

为了简便起见，我们引进另一些概念.

定义 9.15 设 H 是混合图，$i \in \{0, 1, 2, 3\}$，$j \in \{0, 1\}$，$k \in \{0, 2\}$. 我们称 H **属于类型 $(i, j; k)$** 当且仅当 $q_H \equiv i \pmod 4$，$|E(H)| \equiv j \pmod 2$ 且 H 有 k 个奇次顶点.

下述结论是定义 9.15 和前述讨论的直接结果 (见 $\mathrm{sgn}(T)$ 的定义，$T \in \mathcal{T}_v(G, H)$ 的定义和命题 9.8 及命题 9.12 的证明)，它们的证明留作练习.

推论 9.16 设 H 是弱连通混合图，有 0 个或两个奇次顶点，记 $A(H) \cup E(H) = \{b_1, b_2, \cdots, b_q\}$. 考察由 $\varphi(T) = T^{\mathrm{R}}$ 定义的双射 $\varphi : \mathcal{T}_v(G, H) \longrightarrow \mathcal{T}_x(G, H)$，其中，若 G 是欧拉的，则 $x = v$；若 $\{v, w\}$ 是 H 的两个奇次顶点，则 $x = w$. 对任意 $k \in \{0, 2\}$，下述结论成立:

1) 如果 H 属于下述类型 $(1, 0; k)$，$(3, 1; k)$，$(0, 1; k)$，$(2, 0; k)$ 之一，则 φ 是符号相反的；

2) 如果 H 属于下述类型 $(1, 1; k)$，$(3, 0; k)$，$(0, 0; k)$，$(2, 1; k)$ 之一，则 φ 是符号保持的.

下述是推论 9.16 的一个结果.

推论 9.17 设 H 满足推论 9.16 的假设，则下述结论成立:

1) 如果 H 属于下述类型 $(0, 1; 0)$，$(1, 0; 0)$，$(2, 0; 0)$，$(3, 1; 0)$ 之一，则 H 是均衡的；

2) 如果 H 属于下述类型 $(1, 1; 0)$，$(3, 0; 0)$ 之一，则 H 是均衡的当且仅当 H 是 f- 均衡的.

我们注意到上述两个推论与 q_H 的下界 $f(p_H)$ 无关. 下面将推论 9.17 进行全面推广，假定混合图的弧和边已被标号.

推论 9.18 对一个固定的 $q \in \mathbb{N}$，假定对于 $q_{H'} = q$ 及 $|E(H')| \leqslant 1$ 具有类型 $(1,1,0)$ 或 $(3,0;0)$ 的每个弱连通混合图 H' 是均衡的. 设 H 是一个混合图且 $q_H = q$ 及 $|E(H) \leqslant 1|$. 若 H 属于类型 $(1,2;2)$, $(3,0;2)$, $(1,0;k)(k \in \{0,2\})$，则 H 是 f- 均衡的.

证明 A) 首先假设 H 属于类型 $(1,1;2)$ 或 $(3,0;2)$. 用 x 和 y 表示 H 的两个奇次顶点，记 $A_y \cup E_y = \{b_{\ell_j} \mid j = 1, \cdots, d'\}$，其中环只计算一次. 因此，若 E_y 不含环，则 $d' = d(y)$ (由引理 9.14 的假设 A_y 不含环). 对 $j = 1, \cdots, d'$，由 H 构造 $H^{(j)}$ 如下：若 $d' > 1$，则

$$V(H^{(j)}) = V(H), \quad A(H^{(j)}) \cup E(H^{(j)}) = A(H) \cup E(H) ,$$

$H^{(j)}$ 和 H 的关联函数在 $A(H) \cup E(H) - \{b_{\ell_j}\}$ 上相同，如果 b_{ℓ_j} 不是环，则 $b_{\ell_j} \in A_y \cup E_y \subseteq A(H) \cup E(H)$ 关联于 $x \in V(H^{(j)})$，但不关联于 $y \in V(H^{(j)})$；否则，b_{ℓ_j} 是连接 x 和 y 的一条边 ($H^{(j)}$ 的构造表示在图 9.7 上).

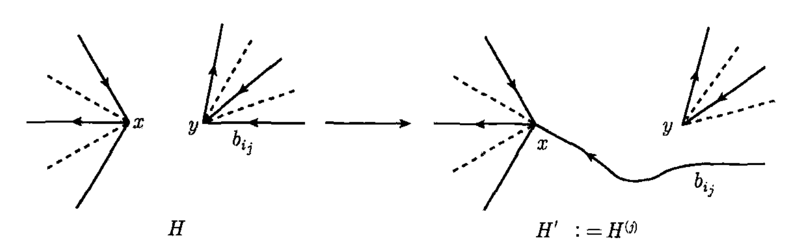


图 9.7　在 H 中把关联于 y 的 b_{ℓ_j} 改为关联于 x 且不改 b_{ℓ_j} 的定向，这样得到 H'. 由于 b_{ℓ_j} 不是有向环，这个构造是唯一确定的. 若 b_{ℓ_j} 是 E_y 里的环，那么两种改变关联函数的可能有相同的结果

如果 $d' = 1$，那么把 H 的顶点 x 和 y 等同起来就得到 $H^{(1)}$. 在任何情况下，置 $H' := H^{(j)}$ $(j = 1, \cdots, d')$，并且 H 的边 (弧) 的标号在 H' 中不变.

注意对每一个 $b_{\ell_j} \in A_y \cup E_y$，$H'$ 是唯一确定的. 但在下述讨论中，一个确定的因素是 b_{ℓ_j} 是否作为 H' 中的一个环出现. 由假设和 H' 的构造可推出 H' 属于类型 $(1,1;0)$ 或 $(3,0;0)$. 因此，由 $q_{H'} = q_H$，所以从假设可推出 H' 是均衡的. 按推论 9.17 还可以推出

$$H' \text{ 是 } f \text{ - 均衡的 }, \tag{1}$$

即对于 $f = b_{l_j}$，在 H' 中，特别地有

$$t^{\mathrm{e}}_{x,f} = t^{\mathrm{o}}_{x,f} . \tag{2}$$

另一方面，因为当 f 不是 H' 的有向环时，$\mathcal{T}_x(f,1) \subset \mathcal{T}_x(G', H')$ $(G' := G_{H'})$

和 $\mathcal{T}_y(f,1) \subset \mathcal{T}_y(G,H)$ $(G := G_H)$ 之间存在符号保持双射，故由 (2) 得到

$$t^{\mathrm{e}}_{y,f} = t^{\mathrm{o}}_{y,f}\ , \tag{3}$$

它必定是 H 中的等式 (注意 $T \in \mathcal{T}_x(f,1)$ 被写为弧 (边) 序列，由于由 H 构造 H' 时，没有改变任何的弧 (边) 标号，所以它也可解释为 $T \in \mathcal{T}_y(f,1)$).

事实上，如果 $f = b_{\ell_j}$ 是 H' 中过 x 的有向环，则上述产生 (3) 的双射 $\mathcal{T}_x(f,1) \leftrightarrow \mathcal{T}_y(f,1)$ 不再成立，这种情况发生当且仅当 $\varnothing \neq A_x \cap A_y \subseteq A(H)$. 在这种情况下，定义 $H'' := H' - \{f\}$，并且注意 H'' 属于类型 $(0,1;0)$ 或 $(2,0;0)$. 不失一般性，假设 $f = b_{\ell_j} = b_q$ (见注 9.6a))，并且 H'' 是弱连通的，由推论 9.161)，对每个 $T \in \mathcal{T}_x(G'',H'')$，$G'' := G_{H''}$ 有 $\mathrm{sgn}(T) = -\mathrm{sgn}(T^{\mathrm{R}})$. 因为 G'' 是欧拉的，所以有 $T^{\mathrm{R}} \in \mathcal{T}_x(G'',H'')$. 因此，

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_x(G'',H'')| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_x(G'',H'')|\ . \tag{4}$$

另一方面，我们断定双射

$$\psi : T_x \in \mathcal{T}_x(G'',H'') \to T_y := f, T_x \in \mathcal{T}_y(f,1)$$

或者是符号保持的，或者是符号相反的依赖于 f 的定向. 若 T 表示对应于 T_x 的 G'' 的欧拉迹，并且若

$$\pi_T = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q-1 \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-1} \end{pmatrix}$$

是联系于 T 的欧拉置换，那么对应于 T_y 的 G' 的开覆盖迹 T_0 联系于欧拉置换

$$\pi_{T_0} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \cdots, & q-1 \\ q, & i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\psi(T_x) = T_y$. 另外，对于

$$\pi^*_T = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q-1, & q \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-1}, & q \end{pmatrix},$$

我们有 $\mathrm{sgn}(\pi_T) = \mathrm{sgn}(\pi^*_T)$. 因此，

$$\pi^*_T \pi^{-1}_{T_0} = (1,2,\cdots,q-1,q) = (1,2)(1,3),\cdots,(1,q)\ ,$$

因为 q 是奇数，故它是一个偶置换. 又因为当 $f \in A^+_y$ 时有 $o_{T_y} = o_{T_x}$，而当 $f \in A^-_y$ 时有 $o_{T_y} = o_{T_x} + 1$，所以若 $f \in A^+_y$，则 ψ 是符号保持的; 否则，是符号相反的. 因此，我们的断言是正确. 由此及 (4) 可推出，即使 $f \in A_x \cup E_y \subseteq A(H)$，式 (3) 也是成立的. 由此，对每个 $f \in A_y \cup E_y \subseteq A(H) \cup E(H)$，式 (3) 也成立. 对称地，我们可断言对每个 $f \in A_x \cup E_x \subseteq A(H) \cup E(H)$，

$$t^{\mathrm{e}}_{x,f} = t^{\mathrm{o}}_{x,f} \ . \tag{3'}$$

因为对每个 $f \in A_v \cup E_v$ 和 $v \in V(H) - \{x, y\}$ 有

$$t^{\mathrm{e}}_{v,f} = 0 = t^{\mathrm{o}}_{v,f} \ . \tag{3''}$$

由 (3), (3′), (3″) 可推出，若 H 属于类型 $(3,0;2)$ 或 $(1,1;2)$，则 H 是 f- 均衡的. 至此，完成了命题的第一部分的证明 (注意若 H'' 或 H' 不连通，则 (3) 显然成立).

B) 对于 $k \in \{0, 2\}$，H 属于类型 $(1,0;k)$. 此时 $E(H) = \varnothing$.

首先假定 $k = 2$. 对任意奇次顶点 y 和任意 $f \in A_y$，在 H 中，用边 e_f 替换弧 $f \in A(H)$，并且 e_f 的标号与 f 的标号相同，这样得到 H_1，H_1 属于类型 $(1,1;2)$. 由情况 A) 的证明可知，H_1 是 f- 均衡的. 特别地，在 H_1 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{y,e_f} = t^{\mathrm{o}}_{y,e_f} \ . \tag{3'''}$$

由于 $\mathcal{T}_y(e_f, 1) \subseteq \mathcal{T}_y(G_1, H_1)$，$G_1 = G_{H_1}$ 中元素与 $\mathcal{T}_y(f, 1) \subseteq \mathcal{T}_y(G, H)$ 中元素之间存在双射 ω，使得对 $T_{e_f} = e_f, T^*$ 有

$$\omega(T_{e_f}) = f, T^* \ ,$$

因此，根据 $f \in A^+_y$ 或 $f \in A^-_y$，ω 是符号保持的，或者符号相反的. 由此和 (3‴) 可推出，对每个 $f \in A_y$，式 (3) 成立. 类似地，与情况 A) 一样，可断定 (3′) 和 (3″) 也成立. 因此，对 $k = 2$，H 是 f- 均衡的.

最后，设 $k = 0$ 并考虑任意 $y \in V(H)$ 和任意的 $f \in A_v$，与上述一样构造出 H_1 且导出 (3‴)，由于 H_1 的类型是 $(1,1;0)$，所以按假设 H_1 是均衡的，因此式 (3) 成立，并且按推论 9.17 的 2)，H_1 是 f- 均衡的. 命题证毕.

我们也有下面的引理.

引理 9.19　设 H 是无奇次顶点的混合图且 $q = q_H$ 是奇数. 假设给定弧 (边) 标号 $b_1, \cdots, b_q$ 及 H 的一个 2 次顶点 v. 记 $H' := H - v$，如果 H' 是均衡的，那么 H 是均衡的，并此时 $A_v \cup E_v$ 中每个元素都是均衡子.

证明　不失一般性，假设 $A_v \cup E_v = \{b_{q-1}, b_q\}$，记 $N(v) = \{x, y\}$，允许 $x = y$. 现在假设 H' 是均衡的，那么

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_x(G', H')| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_x(G', H')| = |\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_y(G', H')| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_y(G', H')| \ . \tag{*}$$

不失一般性，$b_q \in A_x \cup E_x$. 对于 $T' \in \mathcal{T}_x(G', H')$，我们有 $T := b_q$，$T', b_{q-1} \in \mathcal{T}_v(G, H)$. 记 $T_{G'} \in \mathcal{T}_x(G')$，$T_G \in T_v(G)$，则有

$$\mathrm{sgn}(T_{G'}) = \mathrm{sgn}(T_G) \ . \tag{**}$$

事实上，如果

$$\pi_{T_{G'}} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q-2 \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-2} \end{pmatrix} ,$$

那么 $\pi_{T_{G'}}$ 和

$$\pi^*_{T_{G'}} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & q-2, & q-1, & q \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-2}, & q-1, & q \end{pmatrix}$$

有相同的符号. 另外，按 $\pi_{T_{G'}}$ 和 T 的定义，我们有

$$\pi_{T_G} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \cdots, & q-1, & q \\ q, & i_1, & i_2, & \cdots, & i_{q-2}, & q-1 \end{pmatrix} .$$

因此，我们得到

$$\pi^*_{T_{G'}}\pi^{-1}_{T_G} = (1,2,\cdots,q-1,q) .$$

由 q 是奇数的假设，它是一个偶置换. 这就证明 (**)，因为不管 T' 如何选取，T 通过 b_q 和 b_{q-1} 是同方向的，因此有

$$o_T = o_{T'} + c ,$$

其中 c 是常数，它与 T' 的选择无关且 $c \in \{0,1,2\}$. 因此，

$$\mathrm{sgn}(T) = (-1)^c \mathrm{sgn}(T') .$$

这意味着以上 T' 和 $T = b_q, T', b_{q-1}$ 的关系定义了一个 $\mathcal{T}_x(G',H')$ 和 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 之间的符号保持或符号相反的双射 φ. 这及 (*) 蕴涵了对 $f = b_q$ 有

$$t^{\mathrm{e}}_{v,f} = t^{\mathrm{o}}_{v,f} . \qquad (***)$$

因此，$f = b_q$ 是均衡子，对称地 (用 y 代替 x)，可以证明 b_{q-1} 也是均衡子. 然而，由于 q 是奇数及 H 没有奇次顶点，那么 (***) 可以解释为关于 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 的代表系的等式，

$$\mathcal{T}_{v,\mathrm{rep}} = \mathcal{T}_v(f,1) \cup \mathcal{T}_v(f,q) .$$

因此，由 (***) 和 φ 是符号保持或符号相反，则可断定 $\mathcal{T}_{v,rep}$ 的奇元素和偶元素的数目相等. 根据命题 9.12，H 是均衡的. 引理证毕.

由命题 9.18 和引理 9.19 可以看出，关于类型 $(3,1;2)$ 的混合图有一些特殊性. 读完下述结果，这种特殊性就显而易见了：

定理 9.20 设 H 是一个混合图，给定弧 (边) 标号为 $b_1,\cdots,b_q$，$q = q_H$. 对于 $p = p_H$ 假设或者 $q \geqslant 2p-1 > 1$ 且 $|E(H)| \leqslant 1$，或者 $p = q = 1$ 且 $|E(H)| = 0$. 进一步假设每个满足 $q^* := q_{H^*} \leqslant q$ 且 $|E(H^*)| = 1$ 的，类型为 $(3,1;2)$ 的混合图 H^* 是均衡的，那么 H 是均衡的.

证明 按引理 9.7，如果 $q > 2p-1$，则定理成立. 因此，假定 $q_H = 2p_H - 1$. 若定理不成立，令 H 是顶点数最小的反例. 如果 $p=1$，那么 H 是具有一条有向环的有向图，此时由引理 9.14 知定理成立[①]. 因此，假定 $p>1$，若 H 不连通或者多于两个奇次顶点，那么定理显然成立，故可假定 H 是弱连通的，并且至多有两个奇次顶点.

假如 $p=2$. 若 H 含两条平行弧，则按注 9.6c)，H 是均衡的. 对 $A(H) = \{(v,w),(w,v)\}$ 的情形进行讨论，其中 $V(H)=\{v,w\}$. 在 H 中把弧 (w,v) 反向 (即用 $(w,v)^{\mathrm{R}}$ 替换 (w,v))，这样得到的 H' 有两条平行弧. 由注 9.6c)，H' 是均衡的. 再由注 9.6b) 和 d) 可知，H 也是均衡的. 因此，由 $q=3$，$p=2$ 可知，H 包含一条有向环. 由引理 9.14，在这种情况下，H 是均衡的. 至此，当 $p=2$ 时，H 总是均衡的[②]. 因此，假定

$$p > 2 \quad \text{且} \quad q = 2p-1\,. \tag{1}$$

假设 $G := G_H$ 是连通欧拉图，那么由

$$2q_G = 2q = \sum d_G(v) = 4p-2$$

可知，至少有一个 $v \in V(H)$，使得 $d_H(v)=2$. 对于这样的一个 v，构造 $H' := H - v$，则有 $p_{H'} = p-1$，$q_{H'} = 2p_{H'} - 1 > 1$，并且显然有 $|E(H')| \leqslant 1$. 由 H 的选择可推断 H' 是均衡的. 由引理 9.19 知，H 也是均衡的. 这与 H 的选择矛盾. 这个矛盾连同于引理 9.14 和注 9.6b),c) 可推出

H 是弱连通无有向环无重弧，并且恰有两个奇次顶点. (2)

由于 q 是奇数，所以由假设和 (2) 可断定 H 是类型 $(1,0;2),(1,1;2),(3,0;2),(3,1;2)$ 之一. 我们已经看到，如果 $G^* := G_{H^*}$ 是欧拉的且 $q_{H^*} = q$，则 H^* 是均衡的. 在这种情况下，H^* 是类型 $(1,1;0)$ 或 $(3,0;0)$ (若 H^* 是类型 $(1,0;0)$ 或 $(3,1;0)$，那么按推论 9.17 得 H^* 总是均衡的). 其次 $|E(H^*)| \leqslant 1$. 利用命题 9.18 或当 H^* 是类型 $(3,1;2)$ 时 H^* 是均衡的假设，我们可以断定在任何情况下 H 都是均衡的. 定理证毕.

为了证明满足 $|E(H)| \leqslant 1$ 和 $q_H = 2p_H - 1 > 1$ 的任何混合图 H 是均衡的，根据定理 9.20，只要证明当 H 是类型 $(3,1;2)$ 时，H 是均衡的就足够了. 事实上，这是 [HUTC75a, 定理 3] 证明的核心部分 (见文献证明中的情况Ⅳ，它结合对类型 $(1,0;2)$ 的有向图的处理). 胡迟逊的证明很复杂 (基于各种技术性引理). 因此，这里只概要地给出证明，详细内容请读者补充[③]. 我们仍然假设 $A(H) \cup E(H)$ 的元

---

① 哈钦森未讨论这个情况，因为从本节的代数应用出发，她假设 $p>1$ 是不失一般性的. 但是对 $p=q=|E(H)|=1$ 的情况，定理是不成立的.

② 哈钦森只讨论了没有有向环的 H.

③ 我花费了几周时间试图给出一个非构造性证明，即主要沿前面结果的思路去证明，但没有成功.

素已标号为 $b_1, \cdots, b_{q_H}$.

定理 9.21 若 H 是满足 $q_H = 2p_H - 1$ 和 $|E(H)| \leqslant 1$ 的属于类型 $(3,1;2)$ 的混合图，则 H 是均衡的.

证明概要 如前一样，间接证明. 对 $p_H = 2$，定理成立，在这种情况下，H 必有一条有向环或者平行弧. 设 x 和 y 是 H 的两个奇次顶点.

首先证明 $\delta = \min\{d(x), d(y)\} \geqslant 5$. 显然，$\delta > 1$；否则，不失一般性，设 $\delta = d(x)$，$N(x) = \{v\}$，并且 $\mathcal{T}_x(G, H)$ 和 $\mathcal{T}_v(G - x, H - x)$ 之间存在符号保持或符号相反的双射，而由引理 9.7 知 $H - x$ 是均衡的. 现在假设 $3 = d(x) \leqslant d(y)$. 如果 x 邻接环 ℓ，则 $\{\ell\} = E(H)$ (见引理 9.14). 因此，$H - x$ 属于类型 $(1,0;0)$ 或 $(1,0;2)$. 若属于类型 $(1,0;0)$，则对 $H - x$ 应用推论 9.17；若属于类型 $(1,0;2)$，则应用定理 9.20，并注意 $\mathcal{T}_x(G, H)$ 和 $\mathcal{T}_v(G - x, H - x)$ 之间存在符号保持或符号相反的双射，那么由 $H - x$ 是均衡的 (对 $q < q_H$，定理 9.20 成立)，可断定 H 是均衡的，其中 $\{v\} = N(x)$. 因此，x 关联于三条不同的边 (弧)，构造 $H_0 = H \cup \{b_{q+1}\}$，其中 b_{q+1} 是过 x 的无向环. 由引理 9.7，H_0 是均衡的. 由 $A_x \cup E_x := \{b_{q-2}, b_{q-1}, b_q\} \subset A(H) \cup E(H)$ 及 $G_0 := G_{H_0}$，我们有

$$\mathcal{T}_x(G_0, H_0) = \mathcal{T}_x(b_{q+1}, 1) \cup \sum_{j=q-2}^{q} \mathcal{T}_x(b_j, 1) . \tag{1}$$

每一个 $T_j \in \mathcal{T}_x(b_j, 1)$ 都有形式

$$T_j = b_j, \cdots, b_k, b_{q+1}, b_\ell, \cdots ,$$

其中 $\{j, k, \ell\} = \{q-2, q-1, q\}$. 不失一般性，设 $j = q - 2$，构造

$$H_{q-2} = (H - \{b_{q-1}, b_q, b_{q+1}\}) \cup \{b'_{q-1}\}, \quad b'_{q-1} \notin A(H) \cup E(H) ,$$

其中 b'_{q-1} 关联于 T_j 的 b_k, b_{q+1}, b_ℓ 段的首尾两个顶点，并且 b'_{q-1} 是边当且仅当 b_k 和 b_ℓ 恰有一个是弧.

首先假设 b'_{q-1} 不是环，那么 $\mathcal{T}_x(b_{q-2}, 1)$ 中元素和 $\mathcal{T}_x(G_{q-2}, H_{q-2})$ 的元素之间存在符号保持或符号相反的双射，其中 $G_{q-2} := G_{H_{q-2}}$. 同样，$\mathcal{T}_x(G_{q-2}, H_{q-2})$ 和 $\mathcal{T}_v(G_{q-2} - x, H_{q-2} - x)$ 的元素之间也存在符号保持或符号相反的双射，其中 $\{v\} = N_{H_{q-2}}(x)$ (注意由于 $d_H(x) = 3$，x 是 H_{q-2} 的一个端点). 由构造和 H 的选择，$H_{q-2} - x$ 是均衡的. 因此，$t^{\mathrm{e}}_{x, b_{q-2}} = t^{\mathrm{o}}_{y, b_{q-2}}$.

现在假设 b'_{q-1} 是一个环，对上述的 T_j，我们有 $T'_j := b_j, \cdots, b_\ell, b_{q+1}, b_k, \cdots$，它也是 $\mathcal{T}_x(b_j, 1)$ 的一个元素. 因此，这个对应性 $T_j \leftrightarrow T'_j$ 定义了 $\mathcal{T}_x(b_j, 1)$ 到其自身的一个双射，这个双射是符号相反的当且仅当 b'_{q-1} 是一条弧. 在这种情况下立即有 $t^{\mathrm{e}}_{x, b_{q-2}} = t^{\mathrm{o}}_{x, b_{q-2}}$ (由假设，$j = q - 2$). 然而，若 b'_{q-1} 是边，那么上述的对应性 $T_j \leftrightarrow t'_j$ 是符号保持的，并且不再是 $\mathcal{T}_x(b_{q-2}, 1)$ 和 $\mathcal{T}_x(G_{q-2}, H_{q-2})$ 之间的双射.

但是如果用 $\mathcal{T}'_x(b_{q-2},1)\subset\mathcal{T}_x(b_{q-2},1)$ 替换 $\mathcal{T}_x(b_{q-2},1)$，其中 $T\in\mathcal{T}'_x(b_{q-2},1)$ 当且仅当 $T=b_{q-2},\cdots,b_{q-1},b_{q+1},b_q,\cdots$，那么我们就能像 b'_{q-1} 不是环的情况一样的证明. 应用 $T'_j\leftrightarrow T_j$ 是符号保持的这一事实. 我们也能得到 $t^{\mathrm{e}}_{x,b_{q-2}}=t^{\mathrm{o}}_{x,b_{q-2}}$.

重新标号 H_0 的元素，对 (1) 中第二项每个集合有 $t^{\mathrm{e}}_{x,b_j}=t^{\mathrm{o}}_{x,b_j}$，由此和 (1) 以及 H_0 是均衡的能推出

$$t^{\mathrm{e}}_{x,b_{q+1}}=t^{\mathrm{o}}_{x,b_{q+1}}\ . \tag{2}$$

因为 $\mathcal{T}_x(b_{q+1},1)$ 和 $\mathcal{T}_x(G,H)$ 之间存在符号相反的双射 (注意 q 是奇数)，所以 (2) 蕴涵

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_x(G,H)|=|\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_x(G,H)|\ , \tag{3}$$

从而由 H 的选择可知，$\delta\geqslant 5$ 必然成立.

现在构造

$$H^*=H\cup\{z,(z,x),(z,y)\},\quad z\notin V(H)\ .$$

H^* 属于类型 $(1,1;0)$ 且 $q_{H^*}=2p_{H^*}-1$. 因此，如果 H^* 是均衡的，那么由推论 9.17，H^* 是 f- 均衡的. 令 $b_{q+1}:=(z,x)$，$b_{q+2}:=(z,y)$，则 $\mathcal{T}_z(b_{q+1},1)$ 和 $\mathcal{T}_x(G,H)$ 之间存在符号保持的双射，由此得

若 H^* 是均衡的，则 (z,x) 是均衡子且 H 均衡. (4)

H 包含 2 次顶点 (见定理 9.20 证明中 (1) 的论证)；如果 H^* 含有两个相邻的 2 次顶点 u 和 v，那么当 $E_u=\varnothing$ 时，$H_u:=H^*-u$ 属于类型 $(3,1;2)$；否则，属于类型 $(3,0;2)$. 其次 $p_{H_u}=p_H$ 且 $q_{H_u}=q_H$. 由于 v 是 H_u 的一个端点，所以由引理 9.7，H_u-v 是均衡的，因此，H_u 是均衡的 (见证明的开始部分)，从而由引理 9.19 可推出，H^* 也是均衡的，又由 (4) 知 H 是均衡的，这与 H 的选择矛盾. 因此，H^* 的 2 次顶点的集合 $V_2(H^*)$ 是独立集，所以对任何情况都有

$$\left.\begin{aligned}&d_{H^*}(v)\geqslant 4,\ v\in V(H^*)-(\{x,y\}\cup V_2(H^*))\ ,\\&\min\{d_{H^*}(x),d_{H^*}(y)\}\geqslant 6\ ,\\&q_{H^*}=2p_{H^*}-1\ .\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

置 $\hat{H}=H^*-V_2(H^*)$，则有 $q_{\hat{H}}=2p_{\hat{H}}-1$ (因为 $V_2(H^*)$ 是独立集). 但是

$$4p_{\hat{H}}-2=2q_{\hat{H}}=\sum_{v\in V(\hat{H})}d_{\hat{H}}(v)$$

蕴涵着 $\delta(\hat{H})\leqslant 3$. 由此及 (5) 和 $V_2(H^*)$ 是独立集，可推出

H^* 有一个顶点 $v\in V(H^*)-V_2(H^*)$，使得 v 至少与 $V_2(H^*)$ 中 $d_{H^*}(v)-3$ 个顶点相邻. (6)

(参见 [HUTC75a, 引理 4]) 选取 v，使得 $|N_{H^*}(v)\cap V_2(H^*)|$ 最大. 假设 $N_{H^*}(v)$ 里

的元素标号为 $N_{H^*}(v) = \{v_1, \cdots, v_d\}(d = d_{H^*}(v))$(对 $i \neq j$ 可能有 $v_i = v_j$) 且对 $i = 4, \cdots, d$，$v_i \in V_2(H^*)$. 设

$$\bar{H} := H^* - v_d\ ,$$

则 $p_H = p_{\bar{H}}$，$q_H = q_{\bar{H}}$. 首先假设 $|N_{H^*}(v_d)| = 1$，此时 $\bar{H}$ 属于类型 $(3,1;0)$ 或 $(3,0;0)$，并且 $q_{\bar{H}} = 2p_{\bar{H}} - 1$. 由推论 9.17，前一种情况 $\bar{H}$ 是均衡的. 后一种情况，由引理 9.19，再应用定理 9.20 则知，$\bar{H}$ 是均衡的 (注意 $\bar{H}$ 总是有 2 次顶点)，从而 $\bar{H}$ 总是均衡的，并且再重新应用引理 9.19，可证明 H^* 是均衡的，由此及 (4) 可推出 H 是均衡的. 这与 H 的选择矛盾，这个矛盾蕴涵着

$$|N_{H^*}(v_i)| = 2 \quad \text{对任意 } v_i \in N_{H^*}(v) \cap V_2(H^*)\ . \tag{7}$$

因此，$\bar{H}$ 必是类型 $(3,0;2)$ 或 $(3,1;2)$ 的. 如果 $\bar{H}$ 是 $(3,0;2)$ 型的，那么像命题 9.18 的证明一样，把 $\bar{H}$ 变换为各种不同类型 $(3,0;0)$ 的有向图，它们中每一个都含有 2 次顶点，因此，可归结为类型 $(1,0;2)$ 的有向图. 对这些类型 $(1,0;2)$ 的有向图应用定理 9.20 和引理 9.19 可看出，这些类型 $(3,0;0)$ 的有向图是均衡的. 然后，像命题 9.18 的证明一样，可推出 $\bar{H}$ 是均衡的①. 由此得到

$\bar{H}$ 的类型为 $(3,1;2)$，它的奇次顶点为 v 和 $w := w_d$， (8)

$w_i \in N_{H^*}(v_i) - \{v\}$. 像前面一样可以推出 $\min\{d_{\bar{H}}(v), d_{\bar{H}}(w)\} \geqslant 5$. 因此，由 v 的选取 (见 (6))，我们有

$$|N_{\bar{H}}(v) \cap V_2(\bar{H})| \geqslant d - 4\ . \tag{9}$$

记 $A_v \cup E_v = \{e_1, \cdots, e_{d-1}\} \subseteq A(\bar{H}) \cup E(\bar{H})$ 且满足对 $1 \leqslant i \leqslant d-1$，$e_i$ 关联于 v_i (图 9.8). 对 $\bar{G} := G_{\bar{H}}$，我们有

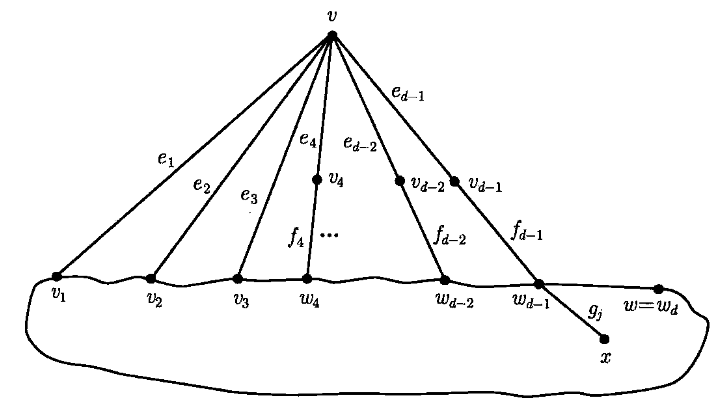


图 9.8 混合图 $\bar{H}$. 为了简单起见，把弧也画成边 (不知是否有 $E_v \cup \bigcup_{i=4}^{d-1} E_{v_i} = \varnothing$)

① 这里和以后的讨论，当 $\bar{H}$ 变换为较小的混合图时，如有必要，可以假定 $A(\bar{H}) \cup E(\bar{H})$ 已被适当的标号. 由注 9.6 的 a)，这个假定是不失一般性的.

$$\mathcal{T}_v(\bar{G},\bar{H})=\sum_{i=1}^{d-1}\mathcal{T}_v(e_i,1)\ . \tag{10}$$

对 $i=4,\cdots,d-1$，由于 $\mathcal{T}_v(e_i,1)$ 和 $\mathcal{T}_{w_i}(\bar{G}-v_i,\bar{H}-v_i)$ 之间存在符号保持或符号相反的双射，所以可以断定 $t^{\rm e}_{v,e_i}=t^{\rm o}_{v,e_i}$，其中 $w_i\in N_{\bar{H}}(v_i)-\{v\}$ (可能有 $w_i=w$，其中 v 是 $\bar{H}-v_i$ 中的偶次顶点)，并且定理 9.20 适用于 $\bar{H}-v_i$. 因此，要证明 $\mathcal{T}_v(\bar{G},\bar{H})$ 中奇元素和偶元素的个数相等，只要证明下式成立即可：

$$\sum_{i=1}^{3}t^{\rm e}_{v,e_i}=\sum_{i=1}^{3}t^{\rm o}_{v,e_i}\ . \tag{11}$$

考虑一个固定的 $i\in\{1,2,3\}$，每一个 $T\in\mathcal{T}_v(e_i,1)$ 在 $\bar{H}-e_i$ 中确定了转移 $X_T(v)$ 的一个集合. 我们区分两种情况 (见 [HUTC75a, 引理 5 和 6]).

情况 1 $\{e_1',e_2',e_3'\}-\{e_i'\}\notin X_T(v)$. 注意在这种情况下，每对 $\{e_j',e_k'\}\in X_T(v)$ 对应于 T 的一个子序列，它的端点是 v_j 和 w_k，即 $S_{j,k}:=e_j,e_k,f_k$. 用 $v_jw_k\notin E(\bar{H})$ 替换 $S_{j,k}$ 当且仅当 $S_{j,k}$ 不含边；否则，用 $(v_j,w_k)\notin A(\bar{H})$ 替换 $S_{j,k}$. 只要可以就重复这个替换程序. 记这个新得到的混合图为 $\bar{\bar{H}}$. 这就推广了在讨论导出 (1) 时提出的替换程序. 类似于这个讨论，若 $A(\bar{\bar{H}})\cup E(\bar{\bar{H}})-(A(\bar{H})\cup E(\bar{H}))$ 不含环，那么在导出 $X_T(v)$ 的 $\mathcal{T}_v(e_i,1)$ 和对应于 $\bar{\bar{H}}$ 中以 v 为起始点始于 e_i 的序列集合 $\bar{\bar{\mathcal{T}}}_v(e_i,1)$ 之间存在符号保持或符号相反的双射. 我们有 $q_{\bar{\bar{H}}}=2p_{\bar{\bar{H}}}-1$，但是 $|E(\bar{\bar{H}})|>1$ 可能出现. 然而 $d_{\bar{\bar{H}}}(v)=1$，因此，$\tilde{H}:=\bar{\bar{H}}-v$ 满足 $q_{\tilde{H}}=2p_{\tilde{H}}$，由引理 9.7 可推出 $\tilde{H}$ 是均衡的. 因为 $\bar{\bar{\mathcal{T}}}(e_i,1)=\mathcal{T}_v(\bar{\bar{G}},\bar{\bar{H}})$ 和 $\mathcal{T}_{v_i}(\tilde{G},\tilde{H})$ 之间存在符号保持或符号相反的双射，所以 $\bar{\bar{H}}$ 是均衡的 (其中 $\bar{\bar{G}}=G_{\bar{\bar{H}}}$，$\tilde{G}=G_{\tilde{H}}$). 由于 $\bar{\bar{H}}$ 随着 $X_T(v)$ 的变化而改变，故对于

$$\mathcal{T}_i:=\{T\in\mathcal{T}_v(e_i,1)\mid\{e_\ell',e_m'\}\notin X_T(v),\ \{i,\ell,m\}=\{1,2,3\}\}$$

有

$\mathcal{T}_i$ 含偶元素和奇元素的个数相等. (12)

如果 $A(\bar{\bar{H}})\cup E(\bar{\bar{H}})-(A(\bar{H})\cup E(\bar{H}))$ 至少含一个环，也可得相同的结论，这只要应用 (1) 之后讨论的相应部分即可.

情况 2 $\{e_1',e_2',e_3'\}-\{e_i'\}\in X_T(v)$. 设

$$\mathcal{T}':=\left\{T\in\bigcup_{i=1}^{3}\mathcal{T}_v(e_i,1)\middle|\{e_j',e_k'\}\in X_T(v),\ \{i,j,k\}=\{1,2,3\}\right\}\ .$$

我们想要证明

$\mathcal{T}'$ 所含偶元素和奇元素的个数相等. (12′)

为此，注意到 $X_T(v)$ 导出的 $e_4',\cdots,e_{d-1}'$ 的一个转移划分 $X_T'(v)$ (注意 $d-1$ 为奇

数). 我们将再次使用在情况 1 和证明开始时所使用的替换程序 (但是现在有点不同). 这里我们假定这个程序产生的混合图没有 $\bar{H}$ 以外的环 (若 $\bar{H}$ 有环), 因为新环出现的情形, 可以用类似于前面讨论过的方法去处理.

我们对 $|X'_T(v)|$ 使用归纳法. 当 $|X'_T| = 0$ 时有 $d_{\bar{H}}(v) = 3$, 所以 (12′) 成立. 假定 $|X'_T(v)| > 0$, 现在讨论

$$\mathcal{T}'(e_r, e_{d-1}) := \{T \in \mathcal{T}' \mid \{e'_r, e'_{d-1}\} \in X'_T(v)\} ,$$

其中 $r \in \{4, \cdots, d-2\}$, 我们断定

$\mathcal{T}'(e_r, e_{d-1})$ **含偶元素和奇元素的个数相等**, (13)

其中 $r = 4, \cdots, d-2$. 为此, 不失一般性, 设 $r = d-2$, 从而每个 $T \in \mathcal{T}'(e_{d-2}, e_{d-1})$ 具有形式

$$T = e_i, \cdots, f_{d-2}, e_{d-2}, e_{d-1}, f_{d-1}, g_j, \cdots$$

或

$$T = e_i, \cdots, g_j, f_{d-1}, e_{d-1}, e_{d-2}, f_{d-2}, \cdots ,$$

其中 $g_j \in A_{w_{d-1}} \cup E_{w_{d-1}} - \{f_{d-1}\}$ 且 $i \in \{1, 2, 3\}$ (图 9.8). 在任一情况下, 首先对 $\{f_{d-2}, e_{d-2}, e_{d-1}\}$ 使用替换程序, 用一条相应的边 (弧) f' 替换这个集合. 然后用边 (弧) f'' 替换集合 $\{f', f_{d-1}, g_j\}$ (三条弧或者一条弧和两条边的集合用一条边去替换, 而两条弧和一条边的集合是用一条弧去替换).

因此, 上述的每个 T 被变换为

$$T'' = e_i, \cdots, f'', \cdots ,$$

它是 $\mathcal{T}_v(G''_j, H''_j)$ 的一个元素, 其中对

$$H''_j = (\bar{H} - \{v_{d-2}, v_{d-1}, g_j\}) \cup \{f''\}$$

有 $G''_j = G_{H''_j}$, 而 f'' 关联于 w_{d-2} 和 x_j (图 9.8). 由此可得 $q_{H''_j} = 2p_{H''_j} - 1$ 且更重要的是 $E(H''_j) = 1$. 因此, H''_j 属于类型 $(3, 1; 2)$ 且 $p_{H''_j} < p_H$. 由 H 的选择知 H''_j 是均衡的 (注意应用上述替换程序可能先得到一个类型 $(1, 0; 2)$ 的混合图, 但有两条边). 由构造有 $|X'_{T''}(v)| = |X'_T(v)| - 1$, 其中 $X'_{T''}(v)$ 是 $\{e'_4, \cdots, e'_{d-3}\}$ 的划分 (注意 T'' 起始于某个 $e_i (i \in \{1, 2, 3\})$). 用根据 $\bar{H}$ 定义 $\mathcal{T}'$ 的方法, 根据 H''_j 定义 $\mathcal{T}''_j$, 然后应用归纳假设, 我们可推出 $\mathcal{T}''_j$ 含偶元素个数和奇元素个数相等. 运用上述这个替换程序, 对于相应于 $\mathcal{T}''_j$ 的 $\mathcal{T}'_j \subseteq \mathcal{T}'$ 可得到同样的结论. 此外有

$$\mathcal{T}'(e_{d-2}, e_{d-1}) = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{T}'_j ,$$

其中 $A_{w_{d-1}} \cup E_{w_{d-1}} - \{f_{d-1}\} = \{g_1, \cdots, g_m\}$ 且

$$\mathcal{T}'_s \cap \mathcal{T}'_t = \varnothing, \quad s \neq t .$$

由此及 $r=d-2$ 的选择的任意性，可以推出 (13) 成立. (13) 与

$$\mathcal{T}'=\bigcup_{r=4}^{d-2}\mathcal{T}'(e_r,e_{d-1})$$

蕴涵 (12′) 成立，其中 $\mathcal{T}'$ 是不交集合的并. 情况 2 证毕.

小结　由于

$$\bigcup_{i=1}^{3}\mathcal{T}_v(e_i,1)=\mathcal{T}'\cup\left(\bigcup_{i=1}^{3}\mathcal{T}_i\right), \tag{14}$$

其中等式每端的任意两项是不交的. 因为 (12) 和 (12′) 蕴涵式 (14) 的右端所含的偶元素和奇元素的个数相等，从而式 (14) 的左端所含偶元素和奇元素的个数也相等，从而式 (11) 成立. 由此 v 是均衡的，并因此 $\bar{H}$ 是均衡的. 由引理 9.19，H^* 是均衡的，再由 (4) 知 H 是均衡的，这与 H 的选择矛盾. 这就是定理证明的概要.

借助于定理 9.20 和定理 9.21，我们能证明下述结果，因为我们使用了这样的事实: 对某个些类型的混合图，如果它们是均衡的，则必是 f- 均衡的，所以这里给出的证明不同于 [HUTC75a, 定理 4 和 5] 里的证明.

推论 9.22　如果 H 是属于下述类型 $(0,0;k),(2,0;k),(0,1;k)(k\in\{0,2\})$ 之一的有向图或混合图，并且满足 $q_H=2p_H-2>0$ 和 $|E(H)|\leqslant 1$，H 的弧 (边) 标号为 $b_1,\cdots,b_q$ $(q=q_H)$，那么 H 是均衡的.

证明　若 $k=0$，设 v 是 H 的任一个顶点，构造有向图

$$H'=H\cup\{f\},$$

其中 $f\notin A(H)$ 是自 w 到 v 的弧，$w\in V(H)-\{v\}$ 是任意选取的. 若 $k=2$，则 H 的奇次顶点记为 w 和 v，构成上述的 H'. 在任何情况下均指定 f 的标号为 b_{q+1}. 由此得到 $q_{H'}=2p_{H'}-1$，并且 H' 是类型 $(1,0;k),(3,0;k),(1,1;k)(k\in\{0,2\})$ 之一. 由定理 9.21 成立，故可使用定理 9.20; 这样 H' 是均衡的. 由推论 9.17 和命题 9.18，H' 甚至是 f- 均衡的. 特别地，在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{w,f}=t^{\mathrm{o}}_{w,f}\,. \tag{*}$$

另一方面，$\mathcal{T}_w(f,1)\subseteq\mathcal{T}_w(G',H')$ 和 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 之间存在双射 φ，使得对任意 $T:=b_{q+1},b_i,\cdots,b_{i_q}\in\mathcal{T}_w(f,1)$ 有 $\varphi(T)=b_i,\cdots,b_{i_q}\in\mathcal{T}_v(G,H)$，$q=q_H$. 因为 $q+1$ 是奇数，所以 φ 是符号保持的 (注意 $o_T=o_{\varphi(T)}$). 由此及 (*) 得

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_v(G,H)|=|\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_v(G,H)|\,.$$

因此，若 G 是欧拉的，那么由 v 的任意性知 H 是均衡的; 若 G 不是欧拉的，那么由 v 是均衡的就推出 H 是均衡的 (注 9.6 的 d))，即在任何情况下，H 都是均衡的. 推论证毕.

注意推论 9.22 的证明核心依赖于 H' (由 H 的构造得到) 是 f- 均衡的. 但是对于满足 $q_H = 2p_H - 1$ 且 $|E(H)| = 1$ 的类型是 $(3,1;k)(k \in \{0,2\})$ 的混合图 H, 我们还未能证明它是 f- 均衡的. 没有类似于定理 9.20 那样相对简单的证明方法去证明这种类型的混合图是 f- 均衡的, 理论上在原因基于下述结果 (见 [HUTC75a, 定理 6,7,8]), 这里只叙述而不加以证明:

定理 9.23 设 $p \geqslant 2$ 且 $0 < q \leqslant 2p-2$ 是整数, 那么下述结论成立:

1) 若 $q < 2p-2$, 则存在弱连通至多有两个奇次顶点的混合图 H, 满足 $p_H = p$ 和 $q_H = q$, 并且对任意 $|E(H)| \in \{0,1\}$, H 都不是均衡的. 特别地, 存在无限多个类型为 $(1,0;2)$ 和 $(3,0;0)$ 的有向图, 有 p 个顶点和 $q = 2p-3$ 条弧, 并且不是均衡的.

2) 若 p 是偶数且 $q = 2p-2$, 则存在类型 $(2,1;2)$ 的混合图 H, 满足 $p_H = p$, $q_H = q$, $|E(H)| = 1$, 但是 H 不是均衡的.

定理 9.23 的 2) 说明为什么在一般情况下, 满足 $q_H = 2p_H - 1$ 和 $|E(H)| = 1$ 的类型为 $(3,1;0)$ (因此, 也为 $(3,1;2)$) 的混合图 H 不可能是 f- 均衡的. 因为假如每个这样的 H 是 f 均衡的, 那么删去它的任一条弧得到的混合图 H' 满足定理 9.23 的 2) 的假设. 类似于推论 9.22 的证明, 可证明 H' 是均衡的, 与定理 9.23 的 2) 矛盾. 我们也注意到定理 9.23 的 1) 说明, 为什么推论 9.22 未能推出 H 是 f-均衡的结论.

于是定理 9.20, 定理 9.21, 推论 9.22 和定理 9.23 恰描述了我们可以判定均衡混合图的各种类型 $(i,j;k)$, 其中除在类型 $(2,1;0)$ 时 $q_H = 2p_H - 2$ 外, 其他情况下都有 q_H 尽可能小, $|E(H)| \leqslant 1$. 事实上, 两个顶点、一条弧和一条边且无环的混合图不是均衡的. 我们将看到有无穷多个这种类型的非均衡的混合图. 一个有意义的问题是确定下述条件下的类型为 $(3,1;k)(k \in \{0,2\})$ 的 H: H 满足 $q_H = 2p_H - 1$, $|E(H)| = 1$ 且 H 是 f- 均衡的.

考察一下 $q_H > 2p_H - 1$ 的混合图 H, 我们已知当 $q_H = 2p_H$ 时, H 是均衡的, 而当 $q_H \geqslant 2p_H + 1$ 时, H 是 f- 均衡的 (引理 9.7 和推论 9.7a). 在这些情况下, $|E(H)|$ 没有限制. 另一方面, 比较定理 9.2 和定理 9.20 及定理 9.21, 条件 $q_D \geqslant 2p_D$ 和 $q_H = 2p_H - 1$ 都是最好可能的, 于是猜想: 任意一个混合图 H, 若 $q_H = 2p_H$ 且 $|E(H)| \leqslant 1$, 则 H 是 f- 均衡的. 下面证明了这个猜想. 仍然假定弧 (边) 标号已给定为 $b_1, \cdots, b_q$.

推论 9.24 设 H 是一个混合图, 至多只有一条边且满足 $q_H \geqslant 2p_H$, 则 H 是 f- 均衡的.

证明 不失一般性, 设 H 是弱连通的且至多有两个奇次顶点. 由推论 9.7a 只讨论 $q_H = 2p_H$ 的情况就行了.

1) 假设 $G = G_H$ 是欧拉图. 讨论任意 $f \in A(H) \cup E(H)$, 不失一般性, 设

$f = b_q$. 由定理 9.20 和定理 9.21，$H' := H - \{f\}$ 满足 $q_{H'} = 2p_{H'} - 1$ 且是均衡的. 若 f 不是环，设 x 和 y 是 H' 的两个奇次顶点；否则，因为 $f \in A_x \cup E_x$，置 $x = y$. $\mathcal{T}_y(f,1) \subseteq \mathcal{T}_y(G,H)$ 和 $\mathcal{T}_x(G',H')$ 之间存在双射 φ，其中 $G' = G_{H'}$. 如果 $f \in A(H)$，则 φ 是符号保持的或符号相反的，这依赖于 f 的定向；若 $\{f\} = E(H)$，则 φ 肯定是符号相反的 (注意 q 是偶数). 在任何情况下，由 $|\mathcal{T}_x^{\mathrm{e}}(G',H')| = |\mathcal{T}_x^{\mathrm{o}}(G',H')|$ 可得

$$t_{y,f}^{\mathrm{e}} = t_{y,f}^{\mathrm{o}}\ ; \tag{*}$$

由 $f \in A(H) \cup E(H)$ 的任意性知，H 是 f- 均衡的.

2) H 有两个奇顶点，用 x 和 y 表示. 对任意 $f \in (A_x \cup E_x) \cap (A_y \cup E_y)$，同上述一样构造 H'，同样 f 满足 (*). 注意在这种情况下，G' 是欧拉的. 对于其他情况的 f，像命题 9.18 的证明里一样构造 H' (图 9.7). G' 是欧拉的且有 $q_{H'} = q_H = 2p_H$. 然而，由于在情况 1) 已得到解答，所以 G' 是 f- 均衡的，因此，满足 (*). 这样一来，在任何情况下，f 都是均衡子，也就是说，H 是 f- 均衡的. 推论证毕.

事实上，推论 9.24 可用其他方法证明，甚至能大大改进这个推论. 这只需充分利用定理 9.20，定理 9.21 和推论 9.18 即可. 为此，我们定义一个比 f- 均衡更强的概念.

定义 9.25　设 H 是一个 f- 均衡的混合图 (或有向图或图)，给定的边 (弧) 标号为 $b_1, \cdots, b_q$，$q = q_n$，那么 H 称为**转移均衡的** (或简称为 ***t*- 均衡的**)，当且仅当 (若 G 是欧拉的) 对每个 $v \in V(H)$，或 (若 x 和 y 为 H 的奇次顶点) 对每个 $v \in \{x,y\}$，并且对每个 $f \in A_v \cup E_v$ 和每个 $g \in A_w \cup E_w - \{f\}$ (若 f 不是环，$w \neq v$，$f \in A_w \cup E_w$)，$\mathcal{T}_v(G,H)$ 中形为 $T = f, g, \cdots$ 的偶元素和奇元素个数相等，简记为 $t_{v,f_g}^{\mathrm{e}} = t_{v,f_g}^{\mathrm{o}}$.

借助于顶点分裂的概念，我们证明下述结果：

推论 9.26　设 H 是无环混合图并且满足 $q_H \geqslant 2p_H$ 和 $|E(H)| \leqslant 1$，给定的弧 (边) 的标号为 $b_1, \cdots, b_q$，$q = q_H$. 如果 $q_H = 2p_H$ 且 H 属于类型 $(0,0;k)$ 或 $(2,j;k)$，其中 $j \in \{0,1\}$，$k \in \{0,2\}$，那么 H 是 t- 均衡的. 如果 $q_H > 2p_H$，则不管 H 是什么类型的，它都是 t- 均衡的.

证明　任意选取 $v \in V(G)$，$f \in A_v \cup E_v$，对 $w \neq v$ 且 $f \in A_w \cup E_w$，取 $g \in A_w \cup E_w - \{f\}$. 不失一般性，设 $f = b_1$，$g = b_q$，考虑

$$H' := (H - \{f,g\}) \cup \{b_1'\}\ ,$$

其中 $b_1' \notin A(H) \cup E(H)$ 是从 v 到 x 的弧，其中 x 和 g 相关联，并且 $x = v$ 当且仅当 $g \in (A_x \cup E_x) \cap (A_v \cup E_v)$. 于是有 $q_{H'} \geqslant 2p_{H'} - 1$，并且 H' 至多有一条边. 事实上，若 $\{f,g\} \cap E(H) \neq \varnothing$，则由定义 H' 是有向图. 由混合图 t- 均衡的定义，我们假定 H 至多有两个奇次顶点，并且 $v \in \{u,y\}$ 仅当 u 和 y 是 H 的奇次顶点. 另

外，假设 H 是弱连通的，并且假定当 $d_H(w)=2$ 时，在构造 H' 中 w 已被删掉. 因此，H' 是弱连通的. 重新定义 $b_1 := b_1' \in A(H')$.

由假定可得若 $q_{H'} = 2p_{H'} - 1$，则 H' 不属于类型 $(3,1;k)$ $(k \in \{0,2\})$. 因此，由推论 9.17，命题 9.18，定理 9.20，定理 9.21 和推论 9.24 断定 H' 是 f- 均衡的，即在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{v,b_1} = t^{\mathrm{o}}_{v,b_1}, \quad b_1 \text{ 不是环} . \tag{$*$}$$

首先假设 $b_1 \in A(H')$ 不是环，那么 $\mathcal{T}_v(b_1,1) \subseteq \mathcal{T}_v(G',H')$ 和形如 $T = b_1, b_q, \cdots$ 的 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 的元素之间存在符号保持或符号相反的双射 φ. φ 是符号保持还是符号相反依赖于 f 和 g 的定向和 q 的奇偶性. 由于假定 $b_1' = b_1$ 不是环，从而由 $(*)$ 推出在 H 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{v,fg} = t^{\mathrm{o}}_{v,fg} . \tag{$**$}$$

但是，若 $b_1' = b_1$ 是一个环，则令

$$H'' := H' - \{b_1\} .$$

因为 H' 不属于类型 $(3,1;k)$，从而 H'' 不属于类型 $(2,1;k)(k \in \{0,2\})$. 因此，当 $q_{H''} = 2p_{H''} - 2$ 时，根据引理 9.22，否则，根据定理 9.20 和定理 9.21 知，H'' 是均衡的，即对 $G'' = G_{H''}$ 有

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_v(G'',H'')| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_v(G'',H'')| . \tag{$***$}$$

然而，我们也有

$$H'' = H - \{f,g\},$$

并且 $T^* \in \mathcal{T}_v(G'',H'')$ 和 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 中形如 $T = f,g,T^*$ 的元素之间存在符号保持或符号相反的双射 φ，即 $\varphi(T^*) = T = f,g,T^*$. 由此及 $(***)$ 推出 $(**)$，即使 b_1' 是环，$(**)$ 也成立. 故在任何情况下，$(**)$ 成立. 因为或者 $v \in V(H)$ 是任选的，或者当 u 和 y 是 H 的奇次顶点时 $v \in \{u,y\}$，从而推论得证.

我们再次考察定理 9.20，定理 9.21，推论 9.22 和推论 9.24. 一方面，这两个推论是由这两个定理推出来的；另一方面，在定理 9.21 的证明中，类型 $(3,1;2)$ 的混合图的被先化为类型 $(1,1;0)$ 的混合图，并进一步化为另一个类型为 $(3,1;2)$ 的混合图的讨论. 因此，提出下述问题：*证明上述这些结果有另外的方法吗？各种类型的混合图之间存在多大意义的等价性？也就是说，假如已证明对于 $\delta \in 1,2,3$，满足 $q_H = 2p_H - \delta$ 的任意类型为 $(i,j;k)$ 的混合图 H 是均衡的或 f- 均衡的，能够推出满足 $q_{H'} = 2p_{H'} - \delta$ 的类型为 $(i',j';k')$ 的混合图 H' 也是均衡的或 f- 均衡的吗？* 假设 H 的弧 (边) 标号为 $b_1, \cdots, b_q (q = q_H)$. 下述定理回答了这些问题. 已证明任意类型为 $(0,1;0),(1,0;0),(2,0,0),(3,1,0)$ 之一的混合图是均衡的 (推论 9.17 的 1)). 此后删掉对某些类型为 $(i,j;2)$ 的混合图的讨论. 可以证明它们是 f- 均衡或 t-

均衡的，当且仅当类型为 $(i,j;0)$ 的混合图是 f- 均衡的或 t- 均衡的，这个结论的证明留作练习. 最后，为简单起见，用符号 $H(i,j;k)_q$ 代表“具有 $q=q_H$，$|E(H)|\leqslant 1$ 的类型为 $(i,j;k)$ 的任意混合图 H”. 但在 $q_H=2p_H-1$ 的情形下，我们省去这个下标. 另外，在下述结果的证明中，使用正式的等式 $H=H(i,j;k)_q$，并且在应用它们的上下文中，这些等式的含义是自明的. 在各种例子中，下标 q 表示讨论的图的规模.

定理 9.27　设 $\mathcal{H}$ 表示满足 $q_H=2p_H-\delta(\delta=0,1,2,\ p_H\geqslant 2)$ 的无环且最多有一条边的混合图 H 的集合. 设 $p:=p_H, q:=q_H$. 考虑 $H(i,j;k)_q\in\mathcal{H}$，则有

(I) 下述任何两个结论等价:

(I.1) $H(1,0;0)$ 是 f- 均衡的且 $H(0,0;0)_{2p-2}$ 是均衡的;

(I.2) $H(1,0;2)$ 是 f- 均衡的;

(I.3) $H(1,1;0)$ 是均衡的;

(I.4) $H(1,1;2)$ 是 f- 均衡的;

(I.5) $H(3,1;2)$ 是均衡的;

(I.6) 对 $k=0,2$，$H(0,0;k)_{2p-2}$ 是均衡的;

(I.7) $H(0,1;2)_{2p-2}$ 是均衡的;

(I.8) $H(0,1;0)_{2p}$ 是 f- 均衡的;

(I.9) $H(2,0;0)_{2p}$ 是 t- 均衡的;

(I.10) $H(2,1;0)_{2p}$ 是 t- 均衡的;

(II) 下述任何两个结论等价:

(II.1) $H(3,0;0)$ 是均衡的;

(II.2) $H(2,0;2)_{2p-2}$ 是均衡的;

(II.3) $H(0,0;0)_{2p}$ 是 t- 均衡的;

(II.4) $H(2,0;0)_{2p}$ 是 f- 均衡的.

此外，

(III) $H(0,0;0)_{2p-2}$ 是均衡的

任意对 $1\leqslant i\leqslant 10$，结论 (I.i) 蕴涵结论 (III)，并进一步蕴涵结论 (II.j) $(1\leqslant j\leqslant 4)$. 最后，由 (I.5) 成立推知，对 $1\leqslant i\leqslant 10$, $1\leqslant j\leqslant 4$，结论 (I.i), (II.j) 和 (III) 都成立.

证明　根据定理所表示的分类，分三步进行证明. 我们假设开始的混合图是弱连通的.

I) 按下述蕴涵关系进行证明:

(I.3) → (I.4) → (I.10) → (I.7) → (I.8) → (I.3)，

(I.4) → (I.2) → (I.9) → (I.6) → (I.1) → (I.3)，

(I.8) ↔ (I.5).

一旦这些蕴涵关系得到证明，那么我们就有一个强连通有向图 D 如下：

$$V(D)=\{(\mathrm{I},i)\mid 1\leqslant i\leqslant 10\},$$
$$A(D)=\{((\mathrm{I}.i),(\mathrm{I}.j))\mid (\mathrm{I}.i)\to(\mathrm{I}.j),1\leqslant i,j\leqslant 10,i\neq j\},$$

其中 $(\mathrm{I}.i)\to(\mathrm{I}.j)$ 为上述所列的三条链上的任意蕴涵关系. 易见，D 是强连通的等价于 (I.1) ~ (I.10) 中任何两个结论等价.

(I.3) → (I.4). 这由命题 9.18 的证明可以推出.

(I.4) → (I.10). 考虑 $H=H(2,1;0)_{2p}$ 中任一个转移 $t=\{a',b'\}$. 不失一般性，$a=b_q$，并先假设 $a\in A(H)$，其中 a 是对应于 a' 的弧，那么 $H':=H-a$ 是类型 $(1,1;2)$ 的，故按假设 (注意 $A(H)$ 中不含环)，H' 是 f- 均衡的，设 x 和 y 表示 H' 的奇次顶点. 特别地，因对 $z=x$ 或 $z=y$ 有 $b\in A_z\cup E_z$，所以在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{z,b}=t^{\mathrm{o}}_{z,b}\ , \tag{1}$$

其中选取 z 满足 $a\in A_z$ 且 t 是在 z 点的转移. 对 $T_z\in\mathcal{T}_z(b,1)$ 和 $T_a:=a$，$T_z\in\mathcal{T}_u(a,1)$ (其中 $u\neq z$ 是关联于 a 的顶点)，我们得到 $\mathcal{T}_z(b,1)$ 和 $\mathcal{T}_u(G,H)$ 中形如 $T_{a,b}=a,b,\cdots$ 的元素集合之间的双射 φ，φ 依赖于 a 的定向，或者是符号保持的或是符号相反的. 在任何情况下，(1) 蕴涵下式成立：

$$t^{\mathrm{e}}_{u,ab}=t^{\mathrm{o}}_{u,ab}\ . \tag{2}$$

如果 $E(H)=\{a\}$ 且 a 不是环，那么可得同样的结论. 因为在这种情况下，可用边 e_b 代替 $H'=H-a$ 中的 b 而得到类型为 $(1,1;2)$ 的混合图 H''. 由 H'' 和 e_b 得 (1) 成立，从而在 H' 中 (1) 也成立，因此，(2) 成立. 最后，若 a 是环，因为 H 没有有向环，所以 $H'=H-a$ 是属于类型 (1,0;0) 的. 在这种情况下，定义 $H'=H-b$ 得 $H'=H(1,1;2)$，其奇次项点仍用 x 和 y 表示，使得 $\{a\}=E_x$，用交换 a 和 b 的标号，重新定义 H 的边 (弧) 标号. 由假设在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{x,a}=t^{\mathrm{o}}_{x,a}\ . \tag{3}$$

由此产生 $\mathcal{T}_x(a,1)\subseteq\mathcal{T}_x(G',H')$ 和 $\mathcal{T}_x(G,H)$ 中形如 $T=a,T_0,b$ 的元素集合之间的双射，这个双射依赖于 b 的定向或是符号保持或是符号相反的，其中 $T_0\in\mathcal{T}_x(G'-a,H'-a)$. 但是 $T^{\mathrm{R}}=a,b,T_0^{\mathrm{R}}$ (注意 a 是无向环)，并且关系 $T\leftrightarrow T^{\mathrm{R}}$ 定义了集合 $\{T\in\mathcal{T}_x(G,H)\mid T=a,T_0,b\}$ 和 $\{T\in\mathcal{T}_x(G,H)\mid T=a,b,T_0^{\mathrm{R}}\}$ 之间的符号保持或符号相反的双射. 由此及式 (3) 可得当 $u=x$ 时，(2) 成立. 于是不管转移 t 的形式如何，(2) 成立. 因为 t 是任意一个转移，并且按推论 9.24，H 是 f- 均衡的，所以 H 是 t- 均衡的. (I.4)→(I.10) 证毕.

(I.10) → (I.7). 设 x 和 y 是 $H=H(0,1;2)_{2p-2}$ 的奇次顶点. 由于 $q=2p-2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 以及 $p\geqslant 2$，故有 $p\geqslant 3$. 设 $z\in V(H)-\{x,y\}$，构造 $H'=H\cup\{a_{xz},a_{zy}\}$，

其中 a_{xz} 和 a_{zy} 不是 H 的弧，a_{xz} 和 a_{zy} 分别是 x 到 z 和 z 到 y 的弧. 由构造，$H' = H(2,1;0)_{2p}$. 把 H 的标号扩充到 H'，并设 $b_{q+1} = a_{xz}$，$b_{q+2} = a_{zy}$. 因为由假设 H' 是 t- 均衡的，故在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{x,b_{q+1}b_{q+2}} = t^{\mathrm{o}}_{x,b_{q+1}b_{q+2}} . \tag{4}$$

然而，由

$$T' = b_{q+1}, b_{q+2},\ T \in \mathcal{T}_x(G', H') \text{ 和 } T \in \mathcal{T}_y(G, H)$$

所确定的关系 $T' \leftrightarrow T$ 是符号保持的 (由 b_{q+1} 和 b_{q+2} 的定向及与 q 的奇偶性无关). 由此及 (4) 可推出 y 在 H 中是均衡的，由此，x 也是均衡的 (见注 9.6d))，因此，H 是均衡的. (I.10)→(I.7) 证毕.

(I.7) → (I.8). 对任意 $f \in A(H) \cup E(H)$，$H = H(0,1;0)_{2p}$，引进顶点 $v_f \notin V(H)$，并定义

$$H' = (H - f) \cup \{v_f, a_f\} ,$$

其中 a_f 关联于 v_f 和 v，而 v 是 f 的一个端点，并且 a_f 是一条弧当且仅当 f 是一条弧. 用 f 在 H 中的标号指定 a_f 的标号. 这样得到 $\mathcal{T}_w(f,1) \subseteq \mathcal{T}_w(G,H)$ 和 $\mathcal{T}_{v_f}(a_f,1) \subseteq \mathcal{T}_{v_f}(G',H')$ 之间的符号保持的双射，其中 $w \in V(H)$ 关联于 f 且 $w \neq v$ 当且仅当 f 不是环 (不失一般性，假设 a_f 是 v_f 的出弧当且仅当 f 是 w 的出弧). 由构造可知，H' 是属于类型 $(0,1;2)$ 的且 $q' = 2p' - 2$. 因此，由假设 H' 是均衡的，即在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{v_f,a_f} = t^{\mathrm{o}}_{v_f,a_f} .$$

根据上述符号保持双射，这就等于说在 H 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{w,f} = t^{\mathrm{o}}_{w,f} .$$

此式蕴涵着 f 是 H 中的均衡子. 由 f 的任意性可知，H 是 f- 均衡的. (I.7)→(I.8) 证毕.

(I.8) → (I.3). 设 v 是 $H = H(1,1;0)$ 的一个 2 次顶点 (因 $q = 2p - 1$，这样的 v 存在). 不失一般性，假设 $A_v \cup E_v = \{b_{q-1}, b_q\}$，令

$$H' := (H - v) \cup \{f\} ,$$

其中若 $E_v \neq \varnothing$，则 f 是连接 $x, y \in N(v)$ 的边，否则，f 是一条弧. 置 $f = b_{q-1}$. 注意 f 是有向环当且仅当 $E_v = \varnothing$ 且 $|N(v)| = 1$ (注意因为 $p > 1$，故有 $N(v) \neq \varnothing$). 然而在任何情况下，H' 是类型 $(0,1;0)_{2p}$ 的，并且由假设或引理 9.14，H' 是 f- 均衡的. 对于固定的 $z \in \{x, y\}$，讨论下面两种情形:

情形 1 f 不是有向环，则在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{z,f} = t^{\mathrm{o}}_{z,f} \ . \tag{5}$$

但是对于 $\delta \in \{0,1\}$，$\mathcal{T}_z(f,1) \subseteq \mathcal{T}_z(G',H')$ 和 $\mathcal{T}_v(b_{q-\delta},1) \subseteq \mathcal{T}_v(G,H)$ 之间存在双射 φ，其中 $\delta=0$ 当且仅当 $b_q \notin A_z \cup E_z \subset A(H) \cup E(H)$. 注意 φ 是符号保持的或是符号相反地依赖于 A_v 中元素的定向和 f 的定向，由 (5) 断定 $b_{q-\delta}$ 是 H 的均衡子. 由命题 9.12 的证明和推论 9.17 的 2)，H 是 f- 均衡的 (注意在这种情况下，q 是奇数).

情形 2 如果 $f=\{z,z\} \in A(H')$，$\{z\}=N(v) \subseteq V(H)$，则令

$$H'' := H - v = H' - \{f\} \ .$$

因为 H' 是类型 $(0,1;0)_{2p}$ 的，所以 H'' 是类型 $(3,1;0)$ 的. 由推论 9.17 的 1)，H'' 是均衡的. 因此有

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_z(G'',H'')| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_z(G'',H'')| \ .$$

由此断定 (5) 成立，在这种情况下，假设通过 f 的方向是固定的 (如沿 f 的定向). 同情形 1) 中的证明一样，可断定 H 是 f- 均衡的.

因此，在任何情况下，H 都是 f- 均衡的，有 (I.8)→(I.3). 从而证明了叙述 (I.3)，(I.4)，(I.7)，(I.8)，(I.10) 是两两等价的.

(I.4) → (I.2). 由命题 9.18 的证明中的 B) 部分可直接推出.

(I.2) → (I.9). 由 (I.4) → (I.10) 的证明可推出 (I.2) → (I.9) 的证明.

(I.9) → (I.6). 用 x 和 y 表示 $H=H(0,0;2)_{2p-2}$ 的奇次顶点，若 $H=H(0,0;0)_{2p-2}$，设 $v:=x=y$ 是任意的. 注意对这种类型的混合图，可以假定 $p>2$ (因为 $2 \not\equiv 0 \pmod 4$，所以 $H=H(0,0;k)_2$ 是不可能的). 任选一个顶点 $z \in V(H)-\{x,y\}$，引进 y 到 z 和 z 到 x 的新弧 b_{q+1} 和 b_{q+2}. 这样得到的有向图 H' 属于类型 $(2,0;0)_{2p}$，故由假设 H' 是 t- 均衡的. 设 $t=\{b'_{q+1},b'_{q+2}\}$，则在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{y,b_{q+1}b_{q+2}} = t^{\mathrm{o}}_{y,b_{q+1}b_{q+2}} \ . \tag{6}$$

然而，对于 $T_x \in \mathcal{T}_x(G,H)$，关系

$$T_{q+1,q+2} := b_{q+1}, b_{q+2}, T_x \leftrightarrow T_x$$

确定了 $\mathcal{T}_y(G',H')$ 中起始于 b_{q+1}, b_{q+2} 的元素集合与 $\mathcal{T}_x(G,H)$ 之间的符号保持双射. 由此和 (6) 以及注 9.6d) 可知，H 是均衡的. (I.9)→(I.6) 证毕.

(I.6) → (I.1). 在 $H=H(1,0;0)$ 中去掉任一条弧 b 后剩下的图为 $H'=H(0,0;2)_{2p-2}$，由假设 (不失一般性，$b=b_q$)，H' 是均衡的. 类似于引理 9.19 的证明方法，可以证明 b 是均衡子. 由于 b 的任意性，故 $H(1,0;0)$ 是 f- 均衡的.

(I.1) → (I.3). 先假设 $f \in E(H)$，$H=H(1,1;0)$，f 是环 xx，则 $H'=H-f$ 是类型 $(0,0;0)_{2p-2}$ 的. 不失一般性有 $f=b_q$. 由假设，H' 是均衡的，故因为

$$|\mathcal{T}_x^{\rm e}(G',H')| = |\mathcal{T}_x^{\rm o}(G',H')| \text{ 得 } t_{x,f}^{\rm e} = t_{x,f}^{\rm o} ,$$

即 f 是 H 的均衡子. 因此，由推论 9.12 的证明，H 是均衡的，并因此由推论 9.17 的 2)，H 是 f- 均衡的. 如果 f 不是环，则用一条弧 a_f 代替 f，得到一个类型为 $(1,0;0)$ 的有向图 H'. 由假设 H' 是均衡的. 因此，在 H' 中有

$$t_{x,a_f}^{\rm e} = t_{x,a_f}^{\rm o} ,$$

这等于说在 H 中有

$$t_{x,f}^{\rm e} = t_{x,f}^{\rm o} .$$

因此，在这种情况下，f 也是 H 的均衡子. 这是 H 是 f- 均衡的一个充分条件. (I.1)→(I.3) 证毕.

(I.8) 和 (I.5) 是等价的. 首先考察 $H = H(0,1;0)_{2p}$. 由引理 9.7，H 是均衡的. 对每个固定的 $f \in A(H)$，因为 $H' := H - f$ 是类型 $(3,1;2)$ 的，并且可假设 $f = b_q$，所以由假设 H' 是均衡的. 与证明 (I.6) → (I.1) 的情形一样，可以证明 f 是 H 的均衡子. 因此，H 的每条弧都是均衡子，因为 H 是均衡的，对每个 $v \in V(H)$，我们有

$$|\mathcal{T}_v^{\rm e}(G,H)| = \sum_{f \in A_v \cup E_v} t_{v,f}^{\rm e} = \sum_{f \in A_v \cup E_v} t_{v,f}^{\rm o} = |\mathcal{T}_v^{\rm o}(G,H)| .$$

对于 $g = xy \in E(H)$ (可能有 $x = y$)，我们有

$$0 = \sum_{f \in A_x \cup E_x} (t_{v,f}^{\rm e} - t_{v,f}^{\rm o}) = t_{v,g}^{\rm e} - t_{v,g}^{\rm o} ,$$

即 g 是一个均衡子. 因此，(I.5) 蕴涵 (I.8).

现在令 $H = H(3,1;2)$，$a_{x,y} \notin A(H)$ 是自 H 的奇次顶点 x 到奇次顶点 y 的弧，令 $H' = H \cup \{a_{xy}\}$ 且指定 a_{xy} 的标号为 b_{q+1}. 显然，H' 是类型 $(0,1;0)_{2p}$ 的. 由假设，H' 是 f- 均衡的. 对于 $f = a_{xy}$，我们有

$$t_{x,f}^{\rm e} = t_{x,f}^{\rm o} . \tag{7}$$

因为 $\mathcal{T}_x(f,1) \subseteq \mathcal{T}_x(G',H')$ 和 $\mathcal{T}_y(G,H)$ 之间存在一个 (依赖于 f 的定向的) 符号保持的或符号相反的双射

$$f, T_y \leftrightarrow T_y, \quad T_y \in \mathcal{T}_y(G,H) ,$$

故由 (7) 和注 9.6d) 可断定 y 是均衡的，因此，H 是均衡的.

至此，我们已完成了结论 (I) 的证明.

II) 证明下述蕴涵关系：

$$(\text{II}.1) \to (\text{II}.3) \to (\text{II}.2) \to (\text{II}.4) \to (\text{II}.1) .$$

(II.1) → (II.3). 考虑 $H = H(0,0;0)_{2p}$. 设 $t = \{a'_{xv}, a'_{v,y}\}$ 是任意一个转移，允许 $x = y$. 不失一般性，$a_{xv} \in A_v^-$，$a_{vy} \in A_v^+$，并且置 $a_{xv} = b_{q-1}$，$a_{vy} = b_q$ (见注 9.6a),b))，其中 a_{xv} 和 a_{vy} 是分别对应于 t 中元素的弧. 对 x 到 y 的弧 $a_{xy} \notin A(H)$，令

$$H' := (H - \{a_{x,v}, a_{vy}\}) \cup \{a_{xy}\} ,$$

这里假定当 $d_H(v) = 2$ 时，$v \notin V(H')$. 由构造，H' 是类型 $(3,0;0)$ 或 $(3,0;0)_{2p'+1}$ 的 (若 $d_H(v) = 2$，则 $p' = p_H - 1$). 指定 a_{xy} 的标号为 b_{q-1}.

首先设 $x \neq y$，那么由假设和推论 9.17 的 2) 或推论 9.24，H' 是 f- 均衡的. 因此，对 $f = a_{xy} \in A(H')$ 有

$$t^{\mathrm{e}}_{x,a_{xy}} = t^{\mathrm{o}}_{x,a_{xy}} . \tag{8}$$

对于

$$T'_x := a_{xy}T_{yx} \in \mathcal{T}_x(a_{xy}, 1) \subseteq \mathcal{T}_x(G', H')$$

和

$$T_x := a_{xv}, a_{vy}, T_{yx} \in \mathcal{T}_x(G, H) ,$$

定义 $\mathcal{T}_x(a_{xy}, 1)$ 和 $\mathcal{T}_x(G, H)$ 中起始于 a_{xv}, a_{vy} 的元素集合间的双射 φ,

$$\varphi(T'_x) = T_x .$$

由构造可知，φ 是符号保持的. 由此和 (8) 推出

$$t^{\mathrm{e}}_{x,a_{xv}a_{vy}} = t^{\mathrm{o}}_{x,a_{xv},a_{vy}} . \tag{9}$$

若 $x = y$，则令

$$H'' := H' - \{a_{xy}\} = H - \{a_{xy}, a_{vx}\} ,$$

有 H'' 属于类型 $(2,0;0)_{2p-2}$ 或 $(2,0;0)_{2p''}$ (若 $d_H(v) = 2$). 由推论 9.17 的 1)，H'' 在任何情况下都是均衡的. 因此有

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_x(G'', H'')| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_x(G'', H'')| . \tag{10}$$

对 $T'_x \in \mathcal{T}_x(G'', H'')$ 和 $T_x := a_{xv}, a_{vx}, T'_x \in \mathcal{T}_x(G, H)$，如上述一样定义一个双射 φ，那么 φ 是符号保持的. 由此和 (10) 可推出，即使 $x = y$，(9) 也成立.

到此，在任何情况下，(9) 成立，由于 t 的任意性，故 H 是 t- 均衡的.

(II.3) → (II.2). 首先注意，$H = H(2,0;2)_{2p-2}$ 必满足 $p > 2$；否则，H 必有一个有向环，但由定理假设这是不可能的. 设 x 和 y 是 H 的两个奇次顶点，取 $z \in V(H) - \{x, y\}$. 引进 x 到 z 和 z 到 y 的弧 a_{xz} 和 a_{zy}，令

$$H' := H \cup \{a_{xz}, a_{zy}\} ,$$

扩充 H 的标号到 H' 且定义 $b_{q+1} := a_{xz}$，$b_{q+2} := a_{zy}$. 由构造，H' 是类型 $(0,0;0)_{2p}$ 的，并且由假设 H' 是 t- 均衡的. 特别地，在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{x,a_{xz}a_{zy}} = t^{\mathrm{o}}_{x,a_{xz}a_{zy}} . \tag{11}$$

然而，由 H' 的构造和 H' 的弧标号方式可知，关系

$$T_{xy} := a_{xz}, a_{zy}, T_{yx} \in \mathcal{T}_x(G', H') \leftrightarrow T_{yx} \in \mathcal{T}_y(G, H)$$

是符号保持的双射. 由此和 (11) 断定

$$|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_y(G,H)| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_y(G,H)| ,$$

此式连同于注 9.6 的 d) 就证明了蕴涵关系 (II.3) → (II.2).

(II.2) → (II.4). 任意选取 $a_{xy} \in A(H)$，$H = H(2,0;0)_{2p}$. 对顶点 $x_a \notin V(H)$，定义 H' 如下:

$$V(H') = V(H) \cup \{x_a\}, \quad A_{x_a} = \{a_{xy}\} ,$$

$$A^+_v(H') = A^+_v(H), \quad A^-_v(H') = A^-_v(H), \quad v \in V(H) - \{x\}$$

(即把 a_{xy} 在 x 点分裂出去). H' 中弧的标号与在 H 中相同 (注意 $A(H) = A(H')$). 显然，H' 是 $(2,0;2)_{2p-2}$ 型的，由假设 H' 是均衡的. 由此及 H' 的构造得

$$t^{\mathrm{e}}_{x,a_{xy}} = |\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_{x_a}(G', H')| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_{x_a}(G', H')| = t^{\mathrm{o}}_{x,a_{xy}} ,$$

即 a_{xy} 是 H 中的均衡子. 由 $a_{xy} \in A(H)$ 的任意性，这就证明了 (II.2) → (II.4).

(II.4) → (II.1). 因为 $q_H = 2p_H - 1$，所以 $H = H(3,0;0)$ 有 2 次顶点 v. 用证明 (I.8) → (I.3) 的同样思路 (只是省略边的讨论)，可以证明 (II.4) → (II.1). 只是需要适当地改变所得到的 (混合)(有向) 图的类型，如 $H(3,0;0)$ 归结为类型 $(2,0;0)_{2p'}$ 的 H'，或者类型 $(1,0;0)$ 的 H''. 在后一种情况下，由推论 9.17 的 1) 可知，H'' 也是均衡的. 结论 (II) 证毕.

III) 实际上，(I.1) 蕴涵 (III) 是显然的. 因此，对 $1 \leqslant i \leqslant 10$，因为 10 个结论 (I.$i$) 两两等价，故 (I.$i$) 蕴涵 (III). 为了得出对于 $1 \leqslant j \leqslant 4$，(III) 蕴涵 (II.$j$)，那么由 II) 可知，只要证明 (III) → (II.2) 即可. 为此，引进顶点 $z \notin V(H)$，$H = H(2,0;2)_{2p-2}$，令

$$H' = H \cup \{z, (z,x), (y,z)\} ,$$

其中 x 和 y 是 H 的两个奇次顶点. 把 H 中弧的标号扩展到 H' 中，并且定义 $b_{q+1} = (z,x)$，$b_{q+2} = (y,z)$，注意 H' 是类型 $(0,0;0)_{2p-2}$ 的，故由假设可推出，在 H' 中有

$$t^{\mathrm{e}}_{z,b_{q+1}} + t^{\mathrm{e}}_{z,b_{q+2}} = t^{\mathrm{o}}_{z,b_{q+1}} + t^{\mathrm{o}}_{z,b_{q+2}} . \tag{12}$$

然而，由推论 9.16 的 2)，对于 $T, T^{\mathrm{R}} \in \mathcal{T}_z(G', H')$，关系 $T \leftrightarrow T^{\mathrm{R}}$ 是符号保持的双射. 注意 $d_{H'}(z) = 2$ 蕴涵

$$T \in \mathcal{T}_z((z,x),1) \text{ 当且仅当 } T^{\mathrm{R}} \in \mathcal{T}_z((y,z),1) .$$

因此，断定

$$t^{\delta}_{z,b_{q+1}} = t^{\delta}_{z,b_{q+2}}, \quad \delta \in \{\mathrm{e}, \mathrm{o}\} . \tag{13}$$

故 (12) 和 (13) 把 A_z 的元素归类于均衡子. 双射

$$\varphi : \mathcal{T}_z(b_{q+1}, 1) \leftrightarrow \mathcal{T}_x(G, H)$$

定义为

$$\varphi((z,x), T_x, (y,z)) = T_x \in \mathcal{T}_x(G, H) .$$

由于 q 是偶数，φ 是符号保持的，故 $t^{\mathrm{e}}_{z,b_{q+1}} = t^{\mathrm{o}}_{z,b_{q+1}}$ 蕴涵着 $|\mathcal{T}^{\mathrm{e}}_x(G,H)| = |\mathcal{T}^{\mathrm{o}}_x(G,H)|$ 成立，由注 9.6 的 d)，这也等于说，H 是均衡的. 这就完成了定理的第三部分的证明.

对 $1 \leqslant i \leqslant 10$，$1 \leqslant j \leqslant 4$，蕴涵关系 (I.$i$) → (II.$j$) 的证明，没有像 $i = 1$ 和 $j = 2$ 的情形一样明显地要求证明蕴涵关系 (I.i) → (III) → (II.j)，这从蕴涵关系 (I.9) → (II.4) 可以看出，而后者由定义而成立. 另一方面，(III) 隐含在 I) 的结论中，即它作为 (I.1) 和 (I.6) 的一部分出现. 对于 $j = 1, 2, 3, 4$，(III) → (II.j) 成立是十分有趣的.

在定理 9.27 的叙述中，除了练习 9.7 中的情况被删除，还可以进一步推广定理 9.27，其中一些结论的证明，可以由蕴涵关系 (III) → (II.2) 的证明中提出 (见引理 9.19 的证明). 我们把它们作为推论列出，证明留作练习.

推论 9.28 设 H 是类型为 $(0,0;0)_{2p}$ 或者 $(2,0;0)_{2p-2}$ 或者 $(3,1;0)$ 的混合图，并且无有向环. 那么对任意给定的 H 的弧 (边) 标标号 $b_1, \cdots, b_q$，H 是均衡的，并且 $\bigcup\limits_{v \in V_2(H)} (A_v \cup E_v)$ 中所有元素都是均衡子.

类似地，由定理 9.27 的结论 (II.2) 可推出下述结果 (注意由较前的结果保证 (I.1) 成立)：

推论 9.29 若 H 是类型为 $(3,1;0)$ 的混合图，$\{f\} = E(H)$，那么 H 是均衡的，并且 f 是均衡子.

事实上，推论 9.29 可以扩展到类型为 $(3,1;2)$ 的混合图，证明留作练习.

然而，正由于不是所有类型为 $(2,1;2)_{2p-1}$ 的混合图都是均衡的 (见定理 9.23 的 2))，所以推论 9.28 不可能推广到包含类型为 $(0,1;0)_{2p-2}$ 的所有混合图. 要构造这样的混合图 H，任取一个类型为 $(2,1;2)_{2p-2}$ 的 H'，在 H' 内增加一个新顶点 z，并且自 z 到 H' 的每个奇次顶点连一条弧，这样就得到一个类型为 $(0,1;0)_{2p-2}$

的混合图 H，由推论 9.17 的 1)，H 是均衡的. 然而，要满足推论 9.28 的全部结论，H' 必须是均衡的，但是这一般不成立. 前面已经注意到定理 9.23 的 2) 也说明为什么类型 $(3,1;k)(k \in \{0,2\})$ 的混合图不总是 f- 均衡的，这也蕴涵着类型为 $(0,1;0)_{2p}$ 的混合图一般不是 t- 均衡的，但是下述结论是正确的 (证明留作练习)：

推论 9.30 设 H 是类型为 $(2,1;0)_{2p-2}$ 的混合图，并且设 H 的弧 (边) 已经标号. 如果 H 是均衡的，那么推论 9.28 的结论成立.

不幸的是，不是所有的类型为 $(2,1;0)_{2p-2}$ 的混合图都是均衡的 (这里只给出概要证明，详细的证明留作练习). 设 H 是类型为 $(1,0;2)_{2p-3}$ 的有向图，H 的奇次顶点记为 x 和 y. 构造 H_1 和 H_2 如下：H_1 是由 H 加上连接 x 和 y 的一条边 f 而形成的，而 H_2 是由 H 加上一条连接 x 和 y 的长度为 3 的有向路 P 而形成的，并使得 $P \cap H = \{x,y\}$. 那么 H_1 是均衡的当且仅当 H_2 是均衡的 (把 H 的弧标号分别扩展到 H_1 和 H_2 上，并参见定理 9.21 的证明概要中有关 (11) 和 (12) 的讨论). H_1 是类型 $(2,1;0)_{2p-2}$ 的，而 H_2 是类型 $(0,0;0)_{2p-4}$ 的. 假定 H_2 是均衡的，并且应用关系 $T \leftrightarrow T^{\mathrm{R}}$ 在 H_2 中是符号保持的事实，能导出推论 9.28 的结论成立，这就蕴涵着 H 也是均衡的. 因此，对每个非均衡的类型为 $(1,0;2)_{2p-3}$ 的 H (由定理 9.23 的 1) 可知这样的 H 存在)，相应的类型为 $(2,1;0)_{2p-2}$ 的 H_1 也不是均衡的. 用类似的证明方法，可以证明对每个这样的 H，产生一个非均衡的类型为 $(3,0;0)_{2p-3}$ 的有向图. 因此，在定理 9.23 的 1) 中，只要有一种类型的非均衡有向图，就能导出另一类型的非均衡有向图的存在 (见引理 9.19).

上述推论 9.28～ 推论 9.30 可以用于推广定理 9.27，我们把它留作练习. 不管怎样，这些推论不足以说明定理 9.27 的各结论是等价的. 虽然下述这个新的论断成立："*$H(3,1;0)$ 满足推论 9.28 的结论*"蕴涵着 (I.3)，但由 (II.1) 不可能自动地推出这个新结论成立，从而蕴涵着推论 9.29. 下述可能是一个有意义的研究课题：探索一些新的工具，用以证明对任意 $1 \leqslant j \leqslant 4$ 和 $1 \leqslant i \leqslant 10$，(II.$j$) 蕴涵 (I.$i$).

9.1.1 矩阵代数的一个应用

下面应用均衡混合图中一些结果和斯万的定理 (定理 9.2)，建立矩阵代数中一些结果. 实际上，这正是本章前面讨论的根源. 为缩短证明，我们从一般性讨论开始.

设 $n \geqslant 1$ 是一个固定整数，M_n 表示复数域上所有 $n \times n$ 矩阵的向量空间，给定任意 $m > 1$ 个元素 $A_1, \cdots, A_m \in M_n$[①]，设 $\mathcal{S}_m$ 表示 m 个对象的对称群，如这些对象是 $1, \cdots, m$ 等整数，定义

$$[A_1, A_2, \cdots, A_m] := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} \operatorname{sgn}(\pi) A_{i_1}, \cdots, A_{i_m}\ , \tag{A}$$

① 在 9.1.1 小节的大部分参考文献中，作者们考虑特征值为 0 的域，或者交换环，或者有限域.

其中 $\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & m \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_m \end{pmatrix}$.

称 M_n 满足 **m 次标准恒等式**，当且仅当对任意选取的 $A_1, \cdots, A_m \in M_n$ 有

$$[A_1, \cdots, A_m] = \boldsymbol{O} \tag{S}$$

($\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵)①.

让我们选取特殊的 $A_1, \cdots, A_m \in M_n$，考虑 M_n 的标准基 B_n，

$$B_b := \{E_{i,j} \mid a_{i,j} = 1,\ (i,j) \neq (k,\ell), a_{k,\ell} = 0,\ 1 \leqslant i,j,k,\ell \leqslant n\}\ ,$$

其中 $a_{r,s}$ 表示 $E_{i,j}$ 中第 (r,s) 个元素. 考虑 B_n 中 m 个元素的总体 $E_m := \{E_{i_k,j_k}, 1 \leqslant k \leqslant m\}$，构造一个有向图 $D := D(E_m)$ 如下：

$$V(D) = \{v_1, \cdots, v_n\}, \quad A(D) = \{a_{i_k,j_k} \mid 1 \leqslant k \leqslant m\}\ , \tag{D}$$

其中弧 a_{i_k,j_k} 对应于 $E_{i_k,j_k} \in E_m$，它连接 v_{i_k} 到 v_{j_k}. 注意对 $1 \leqslant k < \ell \leqslant m$, $E_{i_k,j_k} = E_{i_\ell,j_\ell}$ 可能成立，所以 D 可能有重弧. 又由于可能有 $i_k = j_k$，故 D 也可能有环. 特别地，一条弧在 $A(D)$ 中的重数等于对应的矩阵在 E_m 中出现的次数.

下面讨论 M_n 的特殊子空间，即 M_n^+ 和 M_n^-. 它们分别是 M_n 的对称和斜对称矩阵的子空间. M_n^+ 的一个基如下给出：

$$B_n^+ := \{E_{i,j}^+ \mid a_{i,j} = a_{j,i} = 1,\ \text{若}\ \{i,j\} \neq \{k,\ell\},\ \text{则}\ a_{k,\ell} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$$

(注意 $E_{i,j}^+ = E_{j,i}^+$ 蕴涵着 $E_{i,i} \in B_n^+$)，而 M_n^- 的一个基为

$$B_n^- := \{E_{i,j}^- \mid a_{i,j} = -a_{j,i} = 1,\ \text{若}\ \{i,j\} \neq \{k,\ell\},\ \text{则}\ a_{k,\ell} = 0,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

在这种情况下有 $E_{i,j}^- = -E_{j,i}^-$，因此，$E_{i,i}^- = \boldsymbol{O}(i = 1, \cdots, n)$. 在 (S) 中用 M_n^+ 或 M_n^- 或其他子空间 $M_n^* \subseteq M_n$ 替换 M_n，相应的式子分别用 $(\mathrm{S}^+), (\mathrm{S}^-), (\mathrm{S}^*)$ 表示. 关于 (A) 的定义也引进类似的记号.

---

① 实际上，一些作者在定义 $[A_1, \cdots, A_m]$ 中没有明显地叙述序列 $i_1, \cdots, i_m$ 和 π 之间如何相关. 事实上，某些似乎假设 $\pi = (i_1, \cdots, i_m)$ (这与我们定义的 π 不同)，或者根本没有谈及这个问题. 然而，由 $(1,2) = (2,1)$ 可知，这个问题不是没有关系的(注意上述的解释中，恒等式和置换循环积都不出现). 另一方面，$(i_1, i_2, \cdots, i_m) = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_m \\ i_2, & i_3, & \cdots, & i_1 \end{pmatrix}$ 且

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & m \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_m \\ i_2, & i_3, & \cdots, & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & m \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_m \end{pmatrix}^{-1} = (1, 2, \cdots, m).$$

因此，在 π 是长为 m 的循环的情况下，解释 π 的两种不同的方法是相关的，并且这个关系与 π 的实际选取是无关的.

记 E_m^* 是 $B_n^* := B_n^+ \cup B_n^-$ 的 m 个元素的总体，定义混合图 $H := H(E_m^*)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
&V(H) = \{v_1, \cdots, v_n\}, \\
&a_{i,j} \in A(H) \text{ 连接 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 当且仅当 } E_{i,j}^- \in E_m^* \cap B_n^-, \\
&f_{i,j} \in E(H) \text{ 连接 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 当且仅当 } E_{i,j}^+ \in E_m^* \cap B_n^+, \\
&1 \leqslant i, j \leqslant n
\end{aligned} \tag{H}
$$

(其中弧 (边) 的重数由相应的矩阵在 E_m^* 中出现的次数确定).

回到 $[A_1, \cdots, A_m]$ 的定义，注意 $[A_1, \cdots, A_m]$ 是多重线性的 (与计算行列式的传统方法相比较). 也就是说，对选取的 $A_1, \cdots, A_m \in M_n$ (或 M_n^+, M_n^-, M_n^*)，把 $[A_1, \cdots, A_m]$ 的研究归结为一个和式，和式中每项是 $r \cdot [E_1, \cdots, E_m]$ 的形式，其中 r 是复数，而 $E_1, \cdots, E_m \in B_n$ (或 B_n^+, B_n^-, B_n^*). 例如，若考虑任意矩阵 $A_1, \cdots, A_m \in M_n$，那么可以表示为

$$
A_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{(k)} E_{i,j}, k = 1, \cdots, m, \text{ 其中 } \{E_{i,j} \mid i, j = 1, \cdots, n\} = B_n .
$$

因此，有下面的等式 (R)：

$$
\begin{aligned}
[A_1, \cdots, A_m] &= \left[\sum_{i_1,j_1=1}^{n} a_{i_1,j_1}^{(1)} E_{i_1,j_1}, \cdots, \sum_{i_m,j_m=1}^{n} a_{i_m,j_m}^{(m)} E_{i_m,j_m} \right] \\
&= \left(\sum_{i_1,j_1=1}^{n} a_{i_1,j_1}^{(1)} \right) \cdots \left(\sum_{i_m,j_m=1}^{n} a_{i_m,j_m}^{(m)} \right) [E_{i_1,j_1}, \cdots, E_{i_m,j_m}] \\
&= \sum_{i_1,j_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m,j_m=1}^{n} \left(a_{i_1,j_1}^{(1)} \cdots a_{i_m,j_m}^{(m)} \right) [E_{i_1,j_1}, \cdots, E_{i_m,j_m}] .
\end{aligned}
$$

如果 $A_1, \cdots, A_m \in M_n^+$ (或 M_n^-, M_n^*)，那么用 B_n^+ (或 B_n^-, B_n^*) 代替 B_n，可以类似地进行计算 (如果对于 $k = 1, \cdots, m$ 有 $A_k \in M_n^+$ (或 M_n^-)，唯一不同是在上述和中 $i_k \leqslant j_k$ (或 $i_k < j_k$) 一定成立)，相应的式子用 (R^+) ((R^-), (R^*)) 表示.

有了上述这些技术性讨论和定义，就能给出本节的一些结果的较短的证明. 这些证明依赖于斯万的定理和均衡图的一些主要结果 (除了定理 9.27). 从 [AMIT50a] 中的一个本质定理开始，这个定理是 9.1 节中所探讨的理论的出发点.

定理 9.31 (爱米秀–莱维茨基 (Amitsur-Levitzki)) 给定 $n \in \mathbb{N}$，m 次标准恒等式 (S) 是满足的，当且仅当 $m \geqslant 2n$.

证明 由 (R)，只要证明对任意选取 (但固定) 的 $E_{i_1,j_1}, \cdots, E_{i_m,j_m} \in B_n$ 有

$$
[E_{i_1,j_1}, \cdots, E_{i_m,j_m}] = \boldsymbol{O} \tag{E}
$$

即可. 为此, 同 (D) 中所描述的一样, 构造有向图 D. 由定义, 对任意 $E_{q,r}, E_{s,t} \in B_n$, 我们有

$$E_{q,r} \cdot E_{s,t} = \delta_{r,s} \cdot E_{q,t} \ , \tag{O}$$

其中 $\delta_{r,s}$ 是克罗内克函数, 即在 (A) 的和中任意一项, 如 $\mathrm{sgn}(\pi) \prod_{k=1}^{m} E_{i_{\ell_k}, j_{\ell_k}}$, 有

$$\prod_{k=1}^{m} E_{i_{\ell_k}, j_{\ell_k}} \neq \boldsymbol{O} \text{ 当且仅当 } j_{\ell_k} = i_{\ell_{k+1}}, k = 1, \cdots, m-1 \ , \tag{1}$$

其中 $\{(i_{\ell_k}, j_{\ell_k}) \mid k = 1, \cdots, m\} = \{(i_k, j_k) \mid k = 1, \cdots, m\}$. 此外, 还需要定义 $A_k := E_{i_k, j_k} (k = 1, \cdots, m)$, 使得由

$$\pi := \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & m \\ \ell_1, & \ell_2, & \cdots, & \ell_m \end{pmatrix}$$

确定的因子 $\mathrm{sgn}(\pi)$ 与 (A) 一致.

但是 (1) 等同于

$\Pi_{i_{\ell_1}} := \prod_{k=1}^{m} E_{i_{\ell_k}, j_{\ell_k}} \neq \boldsymbol{O}$ 对应于以 $v_{i_{\ell_1}}$ 为根的 $D = D(E_m)$ 的唯一确定的覆盖迹

$$T_{i_{\ell_1}} = a_{i_{\ell_1}, j_{\ell_1}}, a_{i_{\ell_1}, j_{\ell_2}}, \cdots, a_{i_{\ell_{m-1}}, j_{\ell_m}}, \tag{2}$$

其中 $E_m := \{E_{i_k, j_k} \mid k = 1, \cdots, m\}$. 这可由 (1) 和 (D) 得出. 另外, 由 (1) 和 (2) 可知, 这个对应性是双射的. $T_{i_{\ell_1}}$ 是欧拉迹, 还是开覆盖迹, 依赖于 $j_{\ell_m} = i_{\ell_1}$ 或 $j_{\ell_m} \neq i_{\ell_1}$, 进而定义 $A_k := E_{i_k, j_k} (k = 1, \cdots, m)$, 导出 D 的弧标号, 即联系于弧 a_{i_k, j_k} 的标号为 $b_k (k = 1, \cdots, m)$. 由此得出

$$\mathrm{sgn}(T_{i_{\ell_1}}) = \mathrm{sgn}(\pi) \ . \tag{3}$$

由假设 $m \geqslant 2n$ (注意 $p_D = n$, $q_D = m$) 和定理 9.2 推出, 对每个 $v \in V(D)$ 有

$$|\mathcal{T}_v^{\mathrm{e}}(D)| = |\mathcal{T}_v^{\mathrm{o}}(D)| \ ,$$

即对 $v := v_{i_{\ell_1}}$ 和 $T := T_{i_{\ell_1}}$ 有

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_v(D)} \mathrm{sgn}(T) = 0 \ . \tag{4}$$

但是

$$\Pi_{i_{\ell_1}} = E_{i_{\ell_1}, j_{\ell_m}} \ .$$

由此及 (3) 和 (4) 推出, 与以 $v = v_{i_{\ell_1}}$ 为根的所有覆盖迹相联系的 (E) 的非零项的和为

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_v(D)} \mathrm{sgn}(T) \right) E_{i_{\ell_1}, j_{\ell_m}} = \boldsymbol{O} \ . \tag{5}$$

如果这样的 D 是欧拉的，那么对每个 $v \in V(D)$ 有 $\mathcal{T}_v(D) \neq \varnothing$，并且每个这样的 $\mathcal{T}_v(D)$ 对应于 (E) 的一组项，由 (5) 这组项的和 $= \boldsymbol{O}$. 另一方面，如果这样的 D 是非欧拉的，那么恰有一个 $v \in V(D)$，使得 $\mathcal{T}_v(D) \neq \varnothing$；在这种情况下，对每个 $w \in V(D) - \{v\}$ 定义 $\mathrm{sgn}(T_w) = \mathrm{sgn}(T) = 0$. 因此，若置 $E_{D,v} := E_{i_{\ell_1}, j_{\ell_m}} (v = v_{i_{\ell_1}})$，那么由 (5) 知，(E) 的项的和为

$$\sum_{v\in V(D)} \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_v(D)} \mathrm{sgn}(T)\cdot E_{D,v} \right) = \boldsymbol{O} \, . \tag{6}$$

因此，由 (1) 和 (6) 可得下式：

$$\begin{aligned}
[E_{i_1,j_1}, \cdots, E_{i_m,j_m}] &= \sum_{\binom{1,\cdots,m}{\ell_1,\cdots,\ell_m}} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1,\cdots,m \\ \ell_1,\cdots,\ell_m \end{pmatrix} \cdot \prod_{k=1}^{m} E_{i_{\ell_k}, j_{\ell_k}} \\
&= \sum_{\binom{1,\cdots,m}{\ell_1,\cdots,\ell_m}} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1,\cdots,m \\ \ell_1,\cdots,\ell_m \end{pmatrix} \cdot E_{i_{\ell_1}, j_{\ell_m}} \\
&= \sum_{v\in V(D)} \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_v(D)} \mathrm{sgn}(T)\cdot E_{D,v} \right) = \boldsymbol{O} \, ,
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\{\ell_1, \cdots, \ell_m\} = \{1, \cdots, m\}$.

最后，若 $m = 2n-1$，那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个阶为 n 和规模为 m 的欧拉有向图 D_1，它恰有一条以唯一的 2 次顶点 v 为根的欧拉迹 (图 9.1 和定理 9.2 的证明的下面一段). 记 $V(D_1) = \{v_1, \cdots, v_n\}$，只考虑 $(v_i, v_j) \in A(D_1)$ 的那些 $E_{i,j}$. 因为 D_1 只有一条以 v 为根的欧拉迹 T_v，由此可知 D_1 的任意一条欧拉迹 T 来自 T_v 的一个循环置换 (把 T 和 T_v 看成闭的弧序列). 因为 $m = 2n-1$ 是奇数，所以由推论 9.11 知，$\mathrm{sgn}(T) = \mathrm{sgn}(T_v)$. 这些讨论蕴涵着对这 m 个矩阵 (假设 $E_{i,j}$ 作为 A_k 的任意表示) 而言，(E) 不会是消失. 因此，这 $m = 2n-1$ 次标准恒等式在 M_n 中不满足. 定理证毕.

为了改进定理 9.31 的下界，矩阵的范围必须给予特殊规定，使之在规定范围内 m 次标准恒等式被满足. 事实上，若用 (S^+) 代替 (S)，那么 $m = 2n$ 仍是最好可能的. 因为若 $A_1, \cdots, A_m \in B_n^+$，相应的 G 为由 (H) 所定义的图，而且有无穷多个满足 $q = 2p-1$ 且非均衡的连通图 G. 为看出这一点，设 P 是 p 个顶点 $v_1, \cdots, v_p$ 的路，v_1 和 v_p 是 P 的端点；在 P 的每个顶点上加一个环，这样得到的图 G 满足 $q = (p-1)+p = 2p-1$，并且恰有一条起始于 v_1 或 v_p 的覆盖迹. 这样得到的图 G，对任意的边标号，它都不是均衡的. 另一方面，$E(G)$ 对应于 $E_0 := \{E_{i,i}^+, E_{i,i+1}^+ \mid i = 1, \cdots, p-1\} \cup \{E_{p,p}^+\} \subset B_n^+$. 置 $A_{2i-1} := E_{i,i}^+ (i =$

$1,\cdots,p)$，$A_{2i}:=E^+_{i,i+1}(i=1,\cdots,p-1)$. 然而，由这些符号也导出 G 的一种边标号，由此得

$$\begin{aligned}&[E^+_{1,1},E^+_{1,2},\cdots,E^+_{p,p}]\\&=[A_1,A_2,\cdots,A_{2p-1}]\\&=A_1A_2\cdots A_{2p-1}+\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & 2p-1\\ 2p-1, & 2p-2, & \cdots, & 1\end{pmatrix}\cdot A_{2p-1}A_{2p-2}\cdots A_1\ .\end{aligned}\qquad(\Sigma)$$

其次，$A_1,\cdots,A_{2p-1}$ 的选择和定理 9.31 证明中的 (O) 以及当 $i\neq j$ 时，$E^+_{i,j}=E_{i,j}+E_{j,i}$ 和 $E^+_{i,i}=E_{i,i}$ 的事实，可将 (Σ) 简化为

$$[E^+_{1,1},E^+_{1,2},\cdots,E^+_{p,p}]=E_{1,p}\pm E_{p,1}\neq \boldsymbol{O}\ .\qquad(\pm)$$

但是即使要求 G 是欧拉的，也存在无穷多个集合 $E^+_m\subset\bigcup\limits_{n\in N}B^+_n$，使得 $m=2n-1$ 且 (S^+) 不成立. 为说明这一点，只要看一下上面的 G，并令

$$G_1:=G\cup\{v_{p+1},v_1v_{p+1},v_pv_{p+1}\}\ .$$

对于 $p_1=p+1$，G_1 满足 $m=q_1=2p_1-1=2n-1$，并且 G_1 是欧拉的，相应地，矩阵集合为

$$E^+_m=E_0\cup\{E^+_{p,p+1},E^+_{1,p+1}\}\ .$$

现在有

$$|\mathcal{T}_{v_i}(G_1)|=4,\ 1\leqslant i\leqslant p,\quad |\mathcal{T}_{v_{p+1}}(G_1)|=2\ ,$$

但是对于 $i=1,\cdots,p+1$，在 $\mathcal{P}_{\mathrm{RE}}(v_i)$ 中只有两类. 由引理 9.10 (q 是奇数) 可知，每个特殊类中的元素有相同的符号. 现在假设 $p_1\equiv 1\pmod 2$，那么 $m=q_1=2p_1-1\equiv 1\pmod 4$. 由命题 9.8 的证明可得 $\mathcal{T}_{v_i}(G_1)$ 中每个元素有相同的符号. 由推论 9.11，$\bigcup\limits_{i=1}^{p+1}\mathcal{T}_{v_i}(G_1)$ 的所有元素有相同符号 (通过一个无向环的两种可能的方向不加区分. 因此，这样的环被认为只有一种定向，即这个环的两个半边之间不加区分). 在上述例子中，用定义 $A_{2p}:=E^+_{p,p+1}$，$A_{2p+1}:=E_{1,p+1}$ 扩充它的标号. 应用这些讨论和 $(\pm)$ 得到

$$[E^+_{1,1},E^+_{1,2},\cdots,E^+_{p,p},E^+_{p,p+1},\cdots,E^+_{1,p+1}]=2E_{p+1,p+1}+4\sum_{i=1}^{p}E_{i,i}\neq\boldsymbol{O}$$

(注意 $E_{1,1},E_{1,2},\cdots,E_{p+1,1}=E_{1,2},\cdots,E_{p+1,1},E_{1,1}$，$\cdots\cdots$，并且对所有 $\pi\in\mathcal{S}_m$ 且所关联的矩阵积不为零，有 $\operatorname{sgn}(\pi)=1$).

从上述讨论可以看出，G 和 G_1 总含有环. 因此，提出这样的问题：是否存在 p 阶 $2p-1$ 条边的无环非均衡图？这是胡迟逊提出的问题 [HUTC74b, 问题 1]，她也对 $p=6,7$ 列举了这样的例子，但没有明确地揭示它们.

在 [HUTC74b] 中已注意到，如果 (A) (或 (A$^+$) 或 (A$^-$) 或 (A*)) 不是零矩阵，但这个矩阵的迹可能是零. 这就产生了下面的推广. 一个混合图 H 称为**弱均衡的**[①]当且仅当

$$\sum_{i=1}^{p}|\mathcal{T}_{v_i}^{\mathrm{e}}(G,H)|=\sum_{i=1}^{p}|\mathcal{T}_{v_i}^{\mathrm{o}}(G,H)|\ ,$$

其中 $V(H)=\{v_1,\cdots,v_p\}$. 由此得到对 $A_1,\cdots,A_m\in(B_n^*)$ 的一个选择，A^* 中的迹为零当且仅当与此相联系的 (混合)(有向) 图或者是弱均衡的，或者它含有奇次顶点 (练习 9.12). 我们引述这方面的一些结果，证明留作练习 (见 [HUTC74b, 命题 5,6,7]). 假设已给定弧 (边) 标号.

命题 9.32　设 H 是有偶数条弧且最多有两个奇次顶点的混合图，则下述结论成立：

1) 若 G_H 是非欧拉的且 H 非均衡，则 H 是弱均衡的当且仅当 $q_H\equiv 2\pmod 4$ 或 $q_H\equiv 3\pmod 4$[②]；

2) 若 G_H 是欧拉的且 $q_H\equiv 0\pmod 2$，则 H 是弱均衡的；

3) 若 G_H 是欧拉的且 $q_H\equiv 1\pmod 2$，则 H 是弱均衡的当且仅当 H 是均衡的.

用类似的证明方法，还可以证明下述结果：

命题 9.33　设 H 是有奇数条弧的混合图，则下述结论成立：

1) 若 G_H 是非欧拉的且 H 非均衡，则 H 是弱均衡的当且仅当 $q_H\equiv 0\pmod 4$ 或 $q_H\equiv 1\pmod 4$[③]；

2) 若 H 属于类型 $(2,1;2)_{q_H}$ 或 $(3,0;k)_{q_H}$ $(k\in\{0,2\})$，则 H 是弱均衡的当且仅当 H 是均衡的；

3) 若 H 属于类型 $(2,1;0)_{q_H}$，则 H 是弱均衡的.

为了得到 m 次标准恒等式，其中 $m<2n$，我们回到矩阵代数和指定矩阵范围的问题. 与 (S$^+$) 的情形相反，我们有下述在 (S$^-$) 的情况下的结果：

定理 9.34　设整数 $n\geqslant 2$，m 次标准恒等式 (S$^-$) 是满足的当且仅当 $m\geqslant 2n-2$.

① 胡迟逊只对图定义了这一概念：她称它为完全可消图.

② 在 [HUTC74b, 命题 5] 的证明中，必须把“相同符号”换成“相反符号”.

③ 在 H 属于类型 $(0,1;0)_q$ 或 $(1,0;0)_q$ 的情况下，由推论 9.17 的 1) 可知，不管 q 为何值，H 都是均衡的.

证明 由于 (R$^-$) 类似于 (R)，因此，对任意选定的 $E^-_{i_1,j_1},\cdots,E^-_{i_m,j_m}\in B^-_n$，只要证明

$$[E^-_{i_1,j_1},\cdots,E^-_{i_m,j_m}]=\boldsymbol{O} \tag{E$^-$}$$

即可. 注意对于 $k=1,\cdots,m$ 有 $i_k<j_k$ 以及

$$E^-_{i,j}=E_{i,j}-E_{j,i},\quad 1\leqslant i<j\leqslant n\ . \tag{$-$}$$

设 D 是对应于 E^-_m 的在 (H) 中定义的有向图 (见定理 9.31 的讨论)，其中

$$E^-_m:=\{E^-_{i_k,j_k}\mid k=1,\cdots,m\}\ ,$$

我们可以假定 $m=q_D<2p_D=2n$；否则，能把整个问题归结为定理 9.31 中所处理的更一般的情况，在这种情况下，(S$^-$) 成立. 因此，D 属于类型 $(\alpha,0;k)$ 或 $(\beta,0;k)_{2p-2}$，其中 $p=p_D=n$，$k\in\{0,2\}$，$\alpha\in\{1,3\}$，$\beta\in\{0,2\}$. 由定理 9.21，推论 9.22 和定理 9.20，在每一种可能的情况下，D 都是均衡的. 再置 $A_k=E^-_{i_k,j_k}$ $(k=1,\cdots,m)$，导出 D 的弧标号.

下面考虑 (E$^-$) 的任意一个非零项，

$$\Pi_{\ell_1}:=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1,\cdots,m\\ \ell_1,\cdots,\ell_m\end{pmatrix}\prod_{k=1}^{m}E^-_{i_{\ell_k},j_{\ell_k}}\neq\boldsymbol{O} \tag{Π}$$

(见定理 9.31 的证明). 看一下 (Π) 中两个相继的因子. 为简单起见，置 $i_{\ell_k}=i$，$j_{\ell_k}=j$，$i_{\ell_{k+1}}=r$，$j_{\ell_{k+1}}=s$. 注意 $i<j$，$r<s$ 并应用 ($-$)，则有

$$\begin{aligned}E^-_{i,j}E^-_{r,s}&=(E_{i,j}-E_{j,i})(E_{r,s}-E_{s,r})\\&=E_{i,j}E_{r,s}-E_{i,j}E_{s,r}-E_{j,i}E_{r,s}+E_{j,i}E_{s,r}\\&=\delta_{j,r}E_{i,s}-\delta_{j,s}E_{i,r}-\delta_{i,r}E_{j,s}+\delta_{i,s}E_{j,r}\neq\boldsymbol{O}\end{aligned} \tag{O}$$

(把此式与定理 9.31 的证明中的 (O) 相比较). 为了使 (Π) 满足，需要而且只需要对 (Π) 中任意两个相继的项满足 (O)，这也等价于 (O) 中至少有一个克罗内克函数 δ 是正的，也就是说，

或者 $i<i=r<s$， 或者 $i<j=s$ 且 $i\gtrless r$ ，

或者 $i=r<j$ 且 $j\gtrless s$， 或者 $r<i=s<j$.

这就蕴涵着在任何情况下，两条弧 b_{ℓ_k} 和 $b_{\ell_{k+1}}$ (分别对应于 $E^-_{i,j}$ 和 $E^-_{r,s}$) 必是相邻的. 然而我们能得到更多的结论，即如果通过 b_{ℓ_k} 和 $b_{\ell_{k+1}}$ 时均沿其定向，或均沿其反向 ($i<j=r<s$ 或 $r<i=s<j$)，那么 (O) 分别简化到 $E_{i,s}\neq\boldsymbol{O}$ 或 $E_{j,r}\neq\boldsymbol{O}$，在其他两种情况下，我们有 $-E_{i,r}\neq\boldsymbol{O}$，$-E_{j,s}\neq\boldsymbol{O}$，$-E_{i,i}-E_{j,j}\neq\boldsymbol{O}$. 这意味着通过这两条弧时，恰好有一条是按其定向通过的. 其次，(O) 的非零项的下标指示通过 b_{ℓ_k} 和 $b_{\ell_{k+1}}$ 的方式.

总结 (O) 的讨论和它与 (II)，再注意到 $E_{i,s}=E_{i,j}E_{j,s}$，$E_{i,r}=E_{i,j}E_{j,r}$ 等，我们得到

$$\Pi_{\ell_1}:=(-1)^{o_T}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1,\cdots,m\\ \ell_1,\cdots,\ell_m\end{pmatrix}\prod_{k=1}^{m}E_{r_{\ell_k},s_{\ell_k}}\neq \boldsymbol{O}\ , \tag{1}$$

其中 $r,s=\{i,j\}$ (事实上，$r=i$，$s=j$ 成立当且仅当 b_{ℓ_k} 是沿其方向通过的). 而且 o_T 是 T 沿反方向通过弧的个数，而 T 对应于由 $\prod\limits_{k=1}^{m}E_{r_{\ell_k},s_{\ell_k}}=E_{r_{\ell_1},s_{\ell_m}}$ 导出的 $G:=G_D$ 的覆盖迹 T_G (见定理 9.31 的证明中 (1) 之后的讨论)①. 最后，由于 D 中弧标号的定义方法，我们还有 $\mathrm{sgn}(T_G)=\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1,\cdots,m\\ \ell_1,\cdots,\ell_m\end{pmatrix}$. 因此，

$$\mathrm{sgn}(T)=(-1)^{o_T}\mathrm{sgn}(T_G)\ , \tag{2}$$

并且 (1) 简化为

$$\Pi_{\ell_1}=(-1)^{o_T}\mathrm{sgn}(T_G)E_{r_{\ell_1},s_{\ell_m}}\ . \tag{3}$$

满足 (II) 的 (E^-) 的每一项对应于唯一的一个 $T\in\bigcup\limits_{i=1}^{p}\mathcal{T}_{v_i}(G,D)$，如果 T 对应于 (3) 所表示的 Π_{ℓ_1}，则 T 的起点是 $v_{r_{\ell_1}}$，终点是 v_{ℓ_m}. 如前面一样，我们断定这个对应性是双射的. 根据 (3)，把满足 (II) 的 (E^-) 的项进行分类 (两项属于同类当且仅当它们的各自简化式 (3) 包含因子 $E_{r_{\ell_1},s_{\ell_m}}$)，对 $v=v_{r_{\ell_1}}$，置 $E_{D,v}=E_{r_{\ell_1},s_{\ell_m}}$，并应用 D 是均衡的事实，用类似的证明可得到与定理 9.31 的证明中建立的基本相同的式子 (4)~(6). 只有下述情况除外：$\mathrm{sgn}(T)$ 必须用 (2) 的术语叙述 (见上)，并且若 $G=G_D$ 是非欧拉时，那么恰有两个顶点 (D 的奇次顶点)x 和 y，而 (E^-) 的非零项对应于这两个顶点. 在这种情况下，因为 $\mathcal{T}_w(G,D)=\varnothing$ 对每个 $w\in V(D)-\{x,y\}$ 成立，故定义 $\mathrm{sgn}(T)=0$. 这样我们得到类似于定理 9.31 证明中的 (7)，

$$[E^-_{i_1,j_1},E^-_{i_2,j_2},\cdots,E^-_{i_m,j_m}]=\sum_{v\in V(D)}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_v(G,D)}\mathrm{sgn}(T)E_{D,v}\right)=\boldsymbol{O}\ .$$

这样一来就证明了对于 $m\geqslant 2n-2$，(S^-) 成立.

为了说明对于 $m\leqslant 2n-3$，(S^-) 一般不成立，我们利用定理 9.23 的 1) 有无穷多个非均衡的类型为 $(1,0;2)_{2n-3}$ 或 $(3,0;0)$ 的有向图 D，$n\in\mathbb{N}$. 另一方面，在 9.1.1 小节之前的讨论中已说明每一个非均衡的类型为 $(1,0;2)_{2n-3}$ 的 H 导出一个类型为 $(3,0;0)_{2n-3}$ 的非均衡有向图，并且反之亦然. 由命题 9.32 的 2)，一

① 在 B_n^- 的定义中，对 $E^-_{i,j}\in B_n^-$ 已假定 $i<j$. 因此，若 T 始于 $v_{j_{\ell_1}}$ 沿 $a_{i_{\ell_1},j_{\ell_1}}$ 前进，则 Π_{ℓ_1} 包含因子 $E^-_{i_{\ell_1},j_{\ell_1}}$ 而不含 $E^-_{j_{\ell_1},i_{\ell_1}}$. 这说明为什么不用像定理 9.31 的证明中使用的符号 $\Pi_{i_{\ell_1}}$，而是用 Π_{ℓ_1}. 这是包含了 T 的起始点的信息的矩阵 $E_{r_{\ell_1},s_{\ell_m}}$.

个非均衡的类型 $(3,0;0)_{2n-3}$ 的有向图 D 甚至不是弱均衡的. 用 $v_1,\cdots,v_n$ 标号 D 的顶点，不失一般性，假设 v_i 到 v_j 的弧 $a_{i,j}\in A(D)$ 蕴涵 $i<j$ (见注 9.6b))，联系每个这样的 $a_{i,j}$ 有一个矩阵 $E^-_{i,j}\in B^-_n$. 置 $E^*_m:=\{E^-_{i,j}\mid a_{i,j}\in A(D)\}$，由 (H) 得到 $D=H(E^*_m)$. 用 $A_1,\cdots,A_n$ 标号 $E^*_m(m=2n-3)$ 中的元素，我们断定 $[A_1,\cdots,A_m]\neq \boldsymbol{O}$，这是因为 D 是非均衡的. 如果在 D 中增加一条长为 p_0 的有向路 P，使得 P 的终点为 $v\in V(D)$ 且 $V(P)\cap V(D)=\{v\}$，则这样得到的有向图 D_1 是均衡的当且仅当 D 是均衡的. D_1 非均衡蕴涵着对

$$q_{D_1}=m_1=m+p_0=2n-3+p_0=2(n+p_0)-(p_0+3)=2p_{D_1}-(p_0+3)\ .$$

(S^-) 是不满足的. 定理证毕.

注意对偶数 n，定理 9.34 已出现在 [KOST58a, 定理 3.5]. 科斯坦特 (B. Kostant) 应用上同调理论，从 Dynkin 的公式导出了定理 9.31，也可以说作为一个延伸，他得到他的定理 3.5. 其次，他证明了定理 9.31 等价于基于交换群 $\mathcal{A}_m\subset\mathcal{S}_m$ 特征的 Frobenius 的一个定理. 作为定理 9.34 的考斯坦特的部分解的一个结果，[SMIT72a] 中猜想：考斯坦特的结果能推广到所有 $n>1$，并且 $m\geqslant 2n-2$ 是最好可能的. 事实上，胡迟逊和 L.H. Rowen (大约早一年发表了其结果) 独立地解决了这个猜想 [HUTC74a,75a, ROWE73a,74a]，而 F.W. Owen 最初在 [OWEN73a] 中通报了相同的结果，只发表了这样一个结果：对于 $m<2n-2$，(S^-) 不成立 [OWEN75a]①. 在每一篇文章中，图论都起着显著的作用. 然而，哈钦森的文章更近于纯图论，因此，9.1 节中的材料主要依赖于她的工作②. 最近，罗文用不同的方法重新证明了 [KOST58a, 定理 3.5]，并且得到关于标准恒等式的一些附加结果 [ROWE82a]. 还应注意对于矩阵的元素取于特征 $p>0$ 的域的情况，[ZALE85a] 包含一个类似于爱米秀-莱维茨基定理的结果.

[HUTC75a, ROWE74a] 中的另一个重要结果，可以用深入探索前述已建立的均衡混合图的理论得到，由于它的证明方法类似于定理 9.34 的证明方法，故把这个证明留作练习.

定理 9.35 设整数 $n>1$. 对于任意选取的 $A_1,\cdots,A_{m-1}\in M^-_n$，$A_m\in M^+_n$，关于 m 次标准恒等式 (S^*) 有下述结论：

1) 若 n 为奇数，则当 $m\geqslant 2n-2$ 时，(S^*) 成立；

2) 若 n 为偶数，则当 $m\geqslant 2n-1$ 时，(S^*) 成立.

另外，1) 和 2) 中 m 的下界是最好的.

在结束 9.1 节时，我们注意关于均衡图的一些结果，特别是定理 9.27，也可用于描述关于多项式恒等式的一些进一步结果 (或定义具有附加性质的多项式恒等

① 根据哈钦森的信，奥温关于定理 9.34 的证明有缺陷 (她涉及 Rowen 给出的一个注记).

② 本节相当多的内容是新的.

式，以及说明它们的存在性可以扩展到什么程度)，把这些内容作为练习.

9.2 计数初涉

为了下述讨论，我们从定理 6.33 开始，首先回顾一下：在一个 (弱) 连通欧拉有向图 D 中，给定一个以 v 为根的支撑入树 D_1，D 有一条欧拉迹 T 起始于 v，使得对每个顶点 $w \neq v$，T 最后一次离开 w 是沿 $A_w^+ \cap A(D)$ 中唯一元素离开的. 反之，对 D 中给定的起始于 v 的欧拉迹 T，对每个顶点 $w \neq v$，对 T 离开 w 的最后一条弧给予标记，则这些标记的弧构成一个以 v 为根的支撑入树. 因此，$\mathcal{T}_v(D)$ 能划分为一些类，使得每类恰由 $\mathcal{T}_v(D)$ 中这样一些元素组成，按上述弧标记过程，定义了一个具体的树. 但是，我们还需要定义一个概念，用以区分 D 的两条欧拉迹. 为此，回到定义 7.1，按这个定义，D 的两条欧拉迹 T_1 和 T_2 是不同的，若由 T_1 和 T_2 确定的转移系统满足不等式

$$X_{T_1} \neq X_{T_2} .$$

因此，初始顶点的选择，即研究 $\mathcal{T}_v(D)$ 以及在 A_v^+ 中初始弧的选择不作限制. 注意这一观点与前节开始讨论的观点之间的差别，所以我们面临两个问题：

1) 给定一个欧拉有向图 D，根为一个固定顶点的支撑入树有多少个？

2) 如果 $D - D_0$ 是一个支撑树入树，D 中有多少条 D_0- 偏好的欧拉迹？

这些问题是下面两节的基本内容.

9.2.1 矩阵树定理

下面的定理基于 [KAST67a] 中的证明①. 用 $\tau_v(D)$ 表示**以 v 为根的 D 的支撑出树的个数**. 此外，给定 D 的邻接矩阵 $A(D) = (a_{i,j})$，定义**基尔霍夫矩阵$A^*(D)$** $=(a_{ij}^*)(1 \leqslant i, j \leqslant p)$，其中 (假定 D 的顶点标号为 $v_1, \cdots, v_p$，$p = p_D$)

$$a_{i,j}^* = -a_{i,j}, i \neq j, \quad a_{i,i}^* = \mathrm{id}(v_i) - \lambda_{v_i} ,$$

进而设 $A_{k,k}^*(D)$ 是 $A^*(D)$ 的 (k,k)- 余因子. 最后，$D_1 \subseteq D$ 称为**以 v_i 为根的基本子图**当且仅当 $\mathrm{id}(v_i) = 0$ 且对于 $j \neq i$ 有 $\mathrm{id}(v_j) = 1$. 下面的引理刻画了基本子图的特征，证明留作练习.

① 这个证明实际上包含在 [TUTT48a] 和 [AARD51a] 中. 但是卡斯它林 (Kasteleyn) 和其他一些人把定理 9.37 (见下文) 归功于基尔霍夫 (Kirchhoff)，[KIRC47a]: 细心研究这篇文章表明，定理 9.37 实际上隐含在 [KIRC47a] 中 (也见 [BIGG76a, p133]，很遗憾，在这本精彩的著作中作者没有指出这一点). 另一方面，哈拉里 (Harary) 和帕尔姆 (Palmer) (见 [HARA73a, p25]) 把它归功于鲍特 (R. Bott) 和美柏里 (Mayberry)，并断定图的矩阵树定理 (见下文定理 9.38) 隐含在基尔霍夫的著作中. 定理 9.37 的一个简短的证明参见 [ZEIL85a]，那里也包含了其他一些证明的参考文献.

引理 9.36 以 v 为根的基本子图是弱连通的，当且仅当它是一个出树. 此外，若 D 是不连通，那么 D 的每个不含 v 的连通分支 D' 含一个圈.

下面证明众所周知的**有向图的矩阵树定理**.

定理 9.37 对任意一个有向图 D，$\tau_{v_i}(D) = \det \boldsymbol{A}^*_{i,i}(D)$.

证明 首先研究对应于基本子图 D_0 的基尔霍夫矩阵的行列式，不失一般性，设 D_0 是以 v_1 为根的. 因此，$\mathbf{A}^*(D)$ 的第一列是零向量. 同样地，关联于环的顶点对应的列也是零向量，其余的每一列恰含一个元素 1 和一个元素 -1，而其余为 0. 这是因为对于 $1 < j \leqslant p$，$\mathrm{id}(v_j) = 1$ 蕴涵着当 $(v_i, v_j) \in A(D_0)$ 时有 $a^*_{j,j} = 1$ 及 $-a_{i,j} = -1$，并且当 $i \neq j$，$(v_i, v_j) \notin A(D_0)$ 时有 $a^*_{i,j} = 0$. 其他情况下，$a^*_{j,j} = \mathrm{id}(v_j) - \lambda_{v_j} = 0 = a^*_{i,j}$.

现在假设 D_0 不连通，由引理 9.36，D_0 含有一个圈 C，它可以表示为弧序列的形式如下：

$$C = (v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \cdots, (v_{i_k}, v_{i_1}) ,$$

其中 $1 < i_j \leqslant p$，$j = 1, \cdots, k$. 于是我们已经隐含假定 C 不是一个环.

用 $\boldsymbol{b}_{i_j}$ 表示 $\boldsymbol{A}^*(D_0)$ 中对应于 v_{i_j} 的列向量，那么 $\boldsymbol{b}_{i_j}$ 列中非零元素为

$$b_{i_j,i_j} = a^*_{i_j,i_j} = 1, \quad b_{i_j,i_{j+1}} = a^*_{i_j,i_{j+1}} = -1, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \text{ 置 } k+1 = 1 .$$

因此，

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{b}_{i_j} = \mathbf{0}$$

(从现在起，$\mathbf{0}$ 表示零向量)，即 $\boldsymbol{A}^*_{1,1}(D_0)$ 的列向量是线性相关的，因此，

$$\det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(D_0) = 0 . \tag{1}$$

注意若 D_0 在 v_j 有一条环，由于 $\boldsymbol{b}_j = \mathbf{0}(j \neq 1)$，我们得到相同的结论.

现在假设 D_0 是弱连通的. 由引理 9.36，D_0 是以 v_1 为根的出树. 根据它们与 v_1 的距离，给 D_0 的顶点进行标号，即 $d(v_1, v_i) < d(v_1, v_j)$ 蕴涵 $i < j$①. 因此，$(v_r, v_s) \in A(D_0)$ 蕴涵 $r < s$，这也意味着对于 $i > j$ 有 $b_{i,j} = 0$. 也就是说，$\mathbf{A}^*_{1,1}(D_0)$ 是一个上三角矩阵，因此，假定 D_0 具有新的顶点标号时，则有

$$\det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(D_0) = 1 . \tag{2}$$

重新标号的过程，等于同时改变 $\boldsymbol{A}^*(D_0)$ 的行和列的次序，即若第 r 列变为第 s 列，那么第 r 行变为第 s 行. 因此，重新标号 D_0 的顶点，不影响 (2)，所以 (2) 可以认为是关于 D_0 连同于它的原顶点标号的等式.

① 从 v_1 到 v_k 的路 $P(v_1, v_k)$ 是唯一确定的，$k = i, j$.

现在讨论 $\boldsymbol{A}^*(D)$. 由它的定义，$\boldsymbol{a}_j := (a^*_{1,j}, \cdots, a^*_{p,j})$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a^*_{i,j} = 0$. 换言之，根据 $\boldsymbol{A}^*(D)$ 的定义，$\boldsymbol{a}_j$ 可以表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{d_j^-} \boldsymbol{a}_j^{(i)}, \quad d_j^- := \mathrm{id}(v_j) - \lambda_{v_j}, \\ \text{使得 } \boldsymbol{a}_j^{(i)} \text{ 的分量满足} \\ a_{j,j}^{(i)} = 1, a_{k,j}^{(i)} \in \{0, -1\}, k \neq j, \ \sum_{k=1}^{p} a_{k,j}^{(i)} = 0, i = 1, \cdots, d_j^- . \end{cases} \tag{3}$$

不失一般性，假定要确定 $\tau_{v_1}(D)$，反复应用 (3) (注意若删去第一个分量，(3) 的第一式成立)，我们得到

$$\det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(D) = \sum_{i_2=1}^{d_2^-} \sum_{i_3=1}^{d_3^-} \cdots \sum_{i_p=1}^{d_p^-} \det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(D_{i_2,i_3,\cdots,i_p}) \ , \tag{4}$$

其中 D_{i_2} 是把 D 中 $A^-_{v_2} \subset A(D)$ 中除一条弧外，所有弧都去掉而得到的有向图，D_{i_2,i_3} 是把 D_{i_1} 中的弧集 $A^-_{v_3} \subseteq A(D_{i_2})$ 中除一条弧外，所有都去掉而得到的有向图，以此类推. 换言之，对任意选择的 $i_j \in \{1, \cdots, d_j^-\}(2 \leqslant j \leqslant p)$，$D_{i_2,i_3,\cdots,i_p}$ 是以 v_1 为根的 D 的一个基本 (无环) 子图. 因此，(4) 中的右端只是 D 中使得 $\det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(D_0) \neq 0$ 的基本子图 D_0 的个数，即由 (1) 和 (2) 以及引理 9.36，(4) 中的多重和只是 $\tau_{v_1}(D)$. 由此和 (4)，以及同时改变行和列不改变行列式的值，从而定理得证 (注意有环的基本子图在 (3) 和 (4) 中被忽略了，由于在这种情况下 (1) 成立，所以忽略掉环是不失一般性的).

矩阵树定理的一个推广 (称为全子式矩阵树定理) 已发表在 [CHAI82a]①，由这个定理能计算出有向图中特殊类型森林的个数. 这一结果后来推广到符号 (有向) 图 (即每一条弧 (边) 给予一个正的或负的符号)，并且应用到拟阵论中. 另一方面，除了本书所叙述的一个应用外，定理 9.37 本身已有有趣的应用. 实际上，它已被用于求解一些线性方程组. 生物学家 T.L. Hill 将它用于各向同性的系统，而 S.R. Caplan 将这用于各向异性的系统 [HILL77a, CAPL82a]. 相反地，[CAPL82a] 中说明定理 9.37 是可以通过求解一组线性方程组而得到.

实际上，也存在**图 G 的矩阵树定理**②. 类似于定理 9.37，从邻接矩阵 $A(G) =$

① 这个定理此前已发表过 (见 S. Chaiken 的文章中的文献)，但 [CHAI82a] 中的证明似乎更初等些.

② 这个定理来源于 1860 年 [BORC60a]. 实际上，Borchardt 的证明中未提到树这个词，但是证明类似于有向图矩阵树定理的证明，他也对项 $a_{i,j}$ 的循环积和非循环积进行了区分. 但是应该注意 [KÖNI36a] 中未提及这篇文章. 我们也参见 J.W. Moon 的著作 [MOON70a]，其中含有这个定理的一些参考文献，并对这个定理的历史进行了说明.

$(a_{i,j})$ 出发，定义 $\boldsymbol{A}^*(G)=(a^*_{i,j})$，其中 $a^*_{i,j}=-a_{i,j}(i\neq j)$，$a^*_{i,i}=d(v_i)-\lambda_{v_i}(i,j=1,\cdots,p)$.

定理 9.38 对于任意图 G，G 的支撑树的个数 $\tau(G)$ 满足

$$\tau(G)=\det \boldsymbol{A}^*_{i,i}(G),\quad i=1,\cdots,p\ .$$

证明 为了导出 G 的支撑树数目的递推公式，首先注意由于以边取代弧，选取哪一个顶点为根无关紧要，即以 v 为根的支撑树集合与以 $w\in V(G)-\{v\}$ 为根的支撑树集合相同，但是为了对 $\tau(G)=\tau_{v_i}(G)(i\in V(G))$ 建立递推公式和应用归纳法，不失一般性，假定 $V(G)$ 的元素已标号，使得 $e:=v_1v_2\in E(G)$，并且以 Λ_e 表示 e 的平行边集合. 沿用定理 4.7 证明中的方法，我们讨论 $G-\Lambda_e$ 和 G_e. 在 G 中等同顶点 v_1 和 v_2，并标记它为 v_2，这样得到了 G_e. 我们这样做的原因是：G 的支撑树 T 可按满足 $E(T)\cap\Lambda_e=\varnothing$ 或 $E(T)\cap\Lambda_e\neq\varnothing$ 进行分类. 第一类里的支撑树与 $G-\Lambda_e$ 中的支撑树是一一对应的，而第二类中每一个支撑树对应于 G_e 的一个支撑树 T'. 由于 G_e 中有 $\lambda(e)(=a_{1,2}=a_{2,1})$ 个这样的树对应于 G_e 中同一个 T'，所以有

$$\tau(G)=\tau(G-\Lambda_e)+a_{1,2}\tau(G_e)\ . \tag{*}$$

我们用矩阵和行列式的术语重新解释式 (*). 纯粹为了实际目的，假设 $p\geqslant 2$，并注意对具有两个顶点 v 和 w 的图 G 有

$$\tau_v(G)=a_{1,2}=a_{2,1}=a^*_{1,1}=a^*_{2,2}=\det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(G)=\det \boldsymbol{A}^*_{2,2}(G)\ . \tag{**}$$

因此，只考虑 $p>2$ 的情况，置 $\boldsymbol{A}^*_{1,1}(G_e):=(\boldsymbol{M})$ (注意 G_e 的“第一个”顶点为 v_2)，使用这个符号后有

$$a_{1,2}\det(\boldsymbol{M})=\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & 0\ \cdots\ 0 \\ a^*_{3,2} & \\ \vdots & \boldsymbol{M} \\ a^*_{p,2} & \end{pmatrix}, \tag{***}$$

$$\boldsymbol{A}^*_{1,1}(G-\Lambda_e)=\det\begin{pmatrix} a^*_{2,2}-a_{1,2} & a^*_{2,3}\ \cdots\ a^*_{2,p} \\ a^*_{3,2} & \\ \vdots & \boldsymbol{M} \\ a^*_{p,2} & \end{pmatrix} \tag{****}$$

由于行列式是一个多重线性函数，即

$$\det(\boldsymbol{b}'_2+\boldsymbol{b}''_2,\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_p)=\det(\boldsymbol{b}'_2,\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_p)+\det(\boldsymbol{b}''_2,\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_p),$$

其中 $\boldsymbol{b}_2', \boldsymbol{b}_2'', \boldsymbol{b}_3, \cdots, \boldsymbol{b}_p$ 是相应矩阵的行向量，这一事实应用于 $(***)$ 和 $(****)$ 则得

$$\det \boldsymbol{A}_{1,1}^*(G) = \det \boldsymbol{A}_{1,1}^*(G - \Lambda_e) + a_{1,2} \det \boldsymbol{A}_{1,1}^*(G_1) \,. \tag{$\circ$}$$

其次，$\boldsymbol{A}^*(G_1)$ 的定义蕴涵 $\sum\limits_{i=1}^{p} \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$，其中 $\{\boldsymbol{a}_i \mid i = 1, \cdots, p\}$ 是 $\boldsymbol{A}^*(G_1)$ 的行向量集合，即由于行向量线性相关，所以 $\det \boldsymbol{A}^*(G_1) = 0$. 由此推出，若 G_1 不连通，则 $\det \boldsymbol{A}_{1,1}^*(G_1) = 0$，因为在这种情况下，$\boldsymbol{A}^*(G_1)$ 的行和列可重新排列 (即 G_1 的顶点重新标号)，使得

$$\boldsymbol{A}^*(G_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

其中对于分支 $G_2 \subset G_1$ 有 $(\boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{A}^*(G_2)$. 因此，$(\boldsymbol{A}_2)$ 的行向量线性相关蕴涵着 $\det \boldsymbol{A}_{1,1}^*(G_1) = 0$，由此及 $(**)$ 知，可以将归纳法用于特殊的 $G_1 = G - \Lambda_e$ 和 $G_1 = G_e$，以及得到

$$\tau(G - \Lambda_e) = \det \boldsymbol{A}_{1,1}^*(G - \Lambda_e), \quad \tau(G_e) = \det \boldsymbol{A}_{1,1}^*(G_1) \,. \tag{$\circ\circ$}$$

$(\circ\circ)$，$(\circ)$ 和 $(*)$ 导出了

$$\tau(G) = \det \boldsymbol{A}_{1,1}^*(G) \,.$$

定理证毕.

正如 Borchardt 沿着定理 9.37 的证明思路去证明定理 9.38 一样，定理 9.38 的方法原则上可以加以修改去证明定理 9.37. 换言之，考察 $v_1 \in V(D)$ 和固定的 $v_2 \in V(D)$，使得存在 $a \in A_{v_1}^+ \cap A_{v_2}^+$ (若不存在这样的 a，则 $\tau_{v_1}(D) = 0$). 对 D, D_a 和 $D - \Lambda_a$，类似于 $(*)$ 的一个式子也成立 (见定理 9.38 的证明). 因为当 G 是一个图时，我们没有应用 $A^*(G)$ 是对称的这一事实，所以此后关于矩阵和行列式的讨论也可以应用. 真正不同的是在定理 9.37 的证明中，v_1 *是明显的根*，而在定理 9.38 的证明中，v_1 *扮演着隐含根的角色*，这也说明为什么在修改定理 9.38 的证明以适合于定理 9.37 的证明中，人们必须用 v_1 和 v_2 分别标记 $(*)$ 和 $(\circ\circ)$ 中不同的项.

但是使定理 9.37 的证明适合于定理 9.38 的证明 (以及反之) 的可能性并不意味着对 $i \neq j$ 有 $\boldsymbol{A}_{i,i}^*(D) = \boldsymbol{A}_{j,j}^*(D)$ (只要取 K_2 的一个定向即可明白). 下面将看到若 D 是一个欧拉有向图，这样一个式子成立. 此外，定理 9.37 的证明与图的欧拉定向的讨论有关.

9.2.2 有向图和图的欧拉迹计数

本小节只考虑 (弱) 连通欧拉 (有向) 图，以便于确定 $|\mathcal{T}_v(D)|$ 和 $|\mathcal{T}_v(G)|$ 的值. 首先求 $|\mathcal{T}_v(D)|$，然后用对应的结果得到 $\mathcal{T}_v(G)$ 的公式. 观察到 $\mathcal{T}_v(D)$ $(\mathcal{T}_v(G))$ 的

任两个元素沿 $A_v^+(E_v)$ 的同一元素自 v 出发.

由定理 6.33，对每个 $T \in \mathcal{T}_v(D)$，T 在每个顶点 $w \in V(D)-\{v\}$ 的"最后"一条弧导出唯一的一个入树 $D_1 \subset D$. 反之，D_1 确定了 $(D-D_1)$- 偏好欧拉迹的全体集合 $\mathcal{T}_{D_1} \subseteq \mathcal{T}_v(D)$，其中每个都导出同一个入树 D_1，所以转到 9.2.1 小节前的问题 2)，我们如下进行：假设在构造 $T \in \mathcal{T}_{D_1}$ 的过程中，第一次到达 $w \in V(D)-\{v\}$，那么不用 $a \in A_w^+ \cap A(D_1)$ 离开 w 有 $\mathrm{od}(w)-1$ 种可能性；而第 2 次到达 w 后，再离开 w 有 $\mathrm{od}(w)-2$ 种可能性，如此等等；一般地，第 k 次到达 w，当 $k \leqslant \mathrm{od}(w)-1$ 时，那么不用 a 离开 w 有 $\mathrm{od}(w)-k$ 种可能选择的方式. 因此，对 $w \in V(D)-\{v\}$，构造一个 $T \in \mathcal{T}_{D_1}$ 有

$$(\mathrm{od}(w)-1)! \tag{1}$$

种可能性，因为对每个 $T \in \mathcal{T}_v(D)$，自 v 出发的初始弧是固定的，所以当 $w=v$ 时，上述结论也是对的. 因此，第 k 次回到 v 时，$k < \mathrm{id}(v)=\mathrm{od}(v)$，我们仍有 $\mathrm{od}(v)-k$ 种可能性构造 $\mathcal{T}_{D_1}$ 中一些元素，所以对于 $V(D)=\{v_1,\cdots,v_p\}$，$v=v_1$，对于每个以 $v=v_1$ 为根的入树 D_1，我们有

$$|\mathcal{T}_{D_1}| = \prod_{i=1}^{p}(\mathrm{od}(v_i)-1)!\ . \tag{2}$$

这回答了问题 2)，同时也说明了 $|\mathcal{T}_{D_1}|$ 与入树 D_1 的实际选取无关. 因此，如果用 $\tau'_{v_1}(D)$ 表示 D 中**以 v_1 为根的支撑入树的个数**，则有

$$|\mathcal{T}_{v_1}(D)| = \tau'_{v_1}(D)\prod_{i=1}^{p}(\mathrm{od}(v_i)-1)!\ . \tag{3}$$

为了便于应用定理 9.37，我们注意

$$\varphi(T)=T^{\mathrm{R}},\quad T\in\mathcal{T}_{v_1}(D)$$

定义了一个双射 $\varphi:\mathcal{T}_{v_1}(D)\to\mathcal{T}_{v_1}(D^{\mathrm{R}})$，由 (3) 可得

$$\tau'_{v_1}(D)=\tau_{v_1}(D)\ . \tag{4}$$

应用定理 9.37 以及 (3) 和 (4)，我们得到

$$|\mathcal{T}_{v_1}(D)| = \det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(D)\prod_{i=1}^{p}(\mathrm{od}(v_i)-1)!\ . \tag{5}$$

注意初始点 v_1 和初始弧 $a\in A^*_{v_1}$ 的选择只是为了方便而已，即

$$|\mathcal{T}_{v_1}(D)| = |\mathcal{T}(D)|$$

(因此，任意顶点 $v_i \in V(D)$ 均可以选为根). 由 (5) 可以导出下述经典结果：

定理 9.39 (拜斯特定理)　设 D 是一个弱连通欧拉有向图，$V(D)=\{v_1,\cdots,v_p\}$，并且设 $\boldsymbol{A}^*(D)$ 是 D 的基尔霍夫矩阵，那么对任意的 $i\in\{1,\cdots,p\}$ 有

$$|\mathcal{T}(D)|=\det \boldsymbol{A}^*_{i,i}(D)\prod_{j=1}^{p}(\mathrm{od}(v_j)-1)!\ .$$

由定理 9.39 直接可得下述结论：

推论 9.40　若 D 是弱连通欧拉有向图，则 D 的基尔霍夫矩阵满足 $\boldsymbol{A}^*_{i,i}(D)=\boldsymbol{A}^*_{k,k}(D)1\leqslant i,k\leqslant p_D$.

定理 9.39 的名称与 [AARD51a] 和 [TUTT41a] 的作者有关，这些作者是 N.G. de Bruijn、T.van Aardenne-Ehrenfest、C.A.B. Smith 和塔特. 实际上，[TUTT41a] 只给出了拜斯特定理的部分结果. 我们注意到拜斯特定理和双欧拉有向图的概念可用于导出 $|\mathcal{T}(D)|$ 的奇偶性结果，即*若 D 是欧拉有向图且 $V_2(D)=\varnothing$，则 $|\mathcal{T}(D)|\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ 当且仅当 D 是 2- 正则且双欧拉的*[BERM78b, 定理 3.2]. 这个结果的证明依赖于下述结果：在 2- 正则有向图 D 中，$|\mathcal{T}(D)|$ 的奇偶性与 D 的 1- 因子的数目的奇偶性相同 [BERM78b, 定理 3.1]. 由此及推论 9.30，推论 9.31 和拜斯特定理可推出上述奇偶性结果.

现在回到计算图的欧拉迹数目上. 为了实用的目的，假设以下所讨论的图和有向图都是无环的，除非特别说明. 从拜斯特定理来看，如下进行是有诱惑力的：

对连通欧拉图 G，考虑 $v_1\in V(G)=\{v_1,\cdots,v_p\}$，$e\in E_{v_1}$，设 $D_1,\cdots,D_k$ 是 G 的一些欧拉定向，使得对 $i=1,\cdots,k$ 有 $a_e\in A^+_{v_1}\cap A(D_i)$，并且对每个 D_i 应用拜斯特定理. 这样就得到

$$|\mathcal{T}(G)|=\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{2}d(v_j)-1\right)!\sum_{i=1}^{k}\det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(D_i)\qquad(+)$$

(注意对于 G 的任意一个欧拉定向 D_i 均有 $\mathrm{od}_{D_i}(v_j)=\dfrac{1}{2}d_G(v_j)$). 这个思想不是新的. 即使对于 K_{2s+1} 的情形，在 [PALM78a] 中已注意到“*这个问题的解可能依赖于 K_{2s+1} 的所有偶定向的行列式的值*”. 这没有什么惊奇的，因为在 (+) 中乘积项是一个常量，它与 $D_i(i=1,\cdots,k)$ 无关，而 (+) 中的和项是与 D_i 有关的. 图 4.3 已作了说明 (见定理 4.11 的讨论)，其中双三角形的不同的欧拉定向产生不同个数的有根出树. 因此，由定理 9.37 和推论 9.40，一般情况下，$\det \boldsymbol{A}^*_{r,r}(D_i)$ 随着 $i\in\{1,\cdots,k\}$ 的不同而变化. 但还不清楚这个行列式是怎样变化的，或者说，下述这些值多大？

$$\min\{\det \boldsymbol{A}^*_{r,r}(D_i)\mid i=1,\cdots,k\}\ ,$$

$$\max\{\det \mathbf{A}^*_{r,r}(D_i)\mid i=1,\cdots,k\}\ ,$$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\det \boldsymbol{A}^*_{r,r}(D_i)\ .$$

这仅仅是一个问题. 另一个问题是数 k，即如何确定 G 的欧拉定向数目 (如果不是集合)? 这些问题将在后面讨论. 我们暂时只简单地承认这些问题是正确的. 试图寻找 $|\mathcal{T}_G|$ 的公式过程中，我们不得不考虑这些事实. 目的是找到一个算子 ω，使得 $\omega(G)=|\mathcal{T}(G)|$ 或者至少对于 G 的一个定向 D_G 有 $\omega(D_G)=|\mathcal{T}(G)|$. 我们允许 ω 与实际输入 G 的数值参数有关. 在 [FLEI83a] 中已经这样做了，其出发点是 (+). 但是下一步要考虑包含给定弧 $a_e\in A^+_{v_1}$ 的 G 的所有定向 (见前面 9.2.1 小节的讨论). 恰有 2^{q-1} 个这种定向，$q=q_G$，当然，这些定向中大部分不是欧拉的. 对任意弱连通有向图 D，定义

$$\delta_D=\begin{cases}1, & D\ \text{是欧拉的},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

用 $D_1,\cdots,D_m$ 表示 G 的不同定向且满足 $a_e\in A^+_{v_1}\cap A(D_i)(i=1,\cdots,m,\ m=2^{q-1})$，则 (+) 变换为

$$|\mathcal{T}(G)|=\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{2}d(v_j)-1\right)!\sum_{i=1}^{2^{q-1}}\delta_{D_i}\det \boldsymbol{A}^*_{1,1}(D_i)\ . \qquad (++)$$

因此，寻求 ω 的问题，简化为对 G 的任意一个定向 D_i，数值地计算 $\boldsymbol{A}^*(D_1)$ 和寻求 δ_{D_i} 的公式的方法问题，而后一个问题是容易解决的. 设

$$\boldsymbol{j}_p=\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{e}_i\ ,$$

其中 $\{\boldsymbol{e}_i\mid i=1,\cdots,p\}$ 是欧几里得 p- 空间 E^p 中的标准基，不失一般性，假定向量 $\boldsymbol{e}_i$ 是列向量. 因此，$\boldsymbol{j}_p$ 是所有分量为 1 的列向量. 把 $\boldsymbol{j}_p$ 视为 $p\times 1$- 矩阵，并且把 $\boldsymbol{j}_p$ 记为 $\boldsymbol{J}_p$. 对弱连通有向图 D(不管有环还是无环)，观察 $\boldsymbol{A}^*(D)$，由这个矩阵的定义知，第 r 行的和为 $\mathrm{id}(v_r)-\mathrm{od}(v_r)$. 用 $|\boldsymbol{x}|$ 表示 $\boldsymbol{x}\in E^p$ 的长度，用 sgn 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上的符号函数，这样一来得到下述公式，证明留作练习:

引理 9.41 $\delta_D=1-\mathrm{sgn}|\boldsymbol{A}^*(D)\cdot\boldsymbol{J}_p|$.

由此我们还剩下如何产生上述这些定向 $D_1,\cdots,D_m$ 的问题，$m=2^{q-1}$. 为此目的，我们研究有向图 D 的关联矩阵 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D})$.

如果有向图 D_1 满足 $G_{D_1}=G_D$，那么对某个子集 $A_1\subseteq A(D)$ 有

$$D_1=(D-A_1)\cup A_1^{\mathrm{R}}\ ,$$

这个式子关于 $\boldsymbol{B}(D_1)$ 和 $\boldsymbol{B}(D)$ 有对应性. 换言之，若 $a_k\in A_1$ 是自 v_i 到 v_j 的弧，$\{v_i,v_j\}\subseteq V(D)$，那么 $\boldsymbol{B}(D)$ 的第 k 列满足

$$b_{i,k}=1,\quad b_{j,k}=-1,\quad b_{r,k}=0\ ,r\in\{1,\cdots,p\}-\{i,j\}.$$

而在 $\boldsymbol{B}(D_1)$ 中，对应的元素满足

$$b_{i,k}^{(1)}=-1,\quad b_{j,k}^{(1)}=1,\quad b_{r,k}^{(1)}=0,r\in\{1,\ldots,p\}-\{i,j\}.$$

因此，如果 $A_1=\{a_{i_1},\cdots,a_{i_s}\}$，则把 $\boldsymbol{B}(D)$ 中的第 i_1 列，……，第 i_s 列均乘以 -1，而其余列乘以 $+1$，这样就得到 $\boldsymbol{B}(D_1)$，所以若定义一个 $p\times q$ 矩阵 $\boldsymbol{C}(A_1)=(c_{i,j})$，使它有相同的行向量，并且它的元素满足

$$\text{当 } r=1,2,\cdots,s \text{ 时},\ c_{1,i_r}=-1;\ \text{否则},\ c_{1,i_j}=1\ .$$

那么用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的**阿达马积** (对应元素相乘，记为 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}$)，则上述 D 变换为 D_1 被表示为

$$\boldsymbol{B}(D_1)=\boldsymbol{B}(D)\circ\boldsymbol{C}(A_1)\ ,$$

其中 $A_1\subseteq A(D)$ 与在有向图的变换中所用的相同. 我们也注意到 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}')$ 的第 i 行的和为 $\mathrm{od}(v_i)-\mathrm{id}(v_i)(i=1,\cdots,p)$，其中 D' 是任意一个有向图且 $p=p_{D'}$. 这个观察和前述的讨论总结在如下引理中：

引理 9.41a　$\delta_D=1-\mathrm{sgn}|\boldsymbol{B}(D)\cdot\boldsymbol{J}_q|$.

引理 9.42　设 $D=D_0$ 是一个有向图，$A(D)=\{a_1,\cdots,a_q\}$，记 $\mathcal{P}(\{a_1,\cdots,a_q\})=\{A_0,\cdots,A_{m-1}\}$，$A_0=\varnothing$. 进一步，设 $D_i(i=1,\cdots,m-1,\ m=2^{q-1})$ 是在 D 中将 A_i 中元素反向后得到的有向图，那么有

$$\boldsymbol{B}(D_i)=\boldsymbol{B}(D_0)\circ\boldsymbol{C}(A_1),\quad i=0,\cdots,m-1\ ,$$

并且 $\boldsymbol{j}_p$ 是每个 $\boldsymbol{C}(A_i)$ 的第一列.

然而，应用拜斯特定理要求使用基尔霍夫矩阵，而不是关联矩阵. 下一个引理说明这个障碍是可以克服的. 不管 D 是否有环，把 $\boldsymbol{A}^*(D)$ 的主对角线上的元素 $\mathrm{id}(v_i)-\lambda_{v_i}$ 换为 $\mathrm{od}(v_i)-\lambda_{v_i}$，这样得到的矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{**}(D)$. 注意 $\boldsymbol{A}^{**}(D)=\boldsymbol{A}^*(D)$ 当且仅当 D 是欧拉的.

引理 9.43　设 D 是一个有向图，记 $\boldsymbol{A}^{**}:=\boldsymbol{A}^{**}(D)$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(D)$，则有

$$\boldsymbol{A}^{**}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\ .$$

证明　首先注意到

$$\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})\circ\boldsymbol{B}\ ,$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是 $p\times q$ 矩阵，它的所有元素均为 1. 因此，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 (i,k) 个元素 $\hat{b}_{i,k}$ 满足

$$\hat{b}_{i,k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}(1+b_{i,j})b_{i,j}b_{k,j} \ .$$

当 $i=k$ 时，上式和式中的每一项都满足

$$(1+b_{i,j})b_{i,j}^2 = \begin{cases} 0, & b_{i,j} \in \{-1,0\}, \\ 2, & b_{i,j}=1. \end{cases}$$

由此可得

$$\hat{b}_{i,i} = \mathrm{od}(v_i) = a_{i,i}^{**} \ .$$

现在假定 $i \neq k$，此时有

$$(1+b_{i,j})b_{i,j}b_{k,j} = \begin{cases} 0, & (b_{i,j}, b_{k,j}) \neq (1,-1), \\ -2, & \text{否则} \end{cases}$$

(注意 $\boldsymbol{B}(D)$ 的第 j 列恰有一个 $+1$ 和一个 -1，而其余元素为 0). 换言之，上述和中第 j 项不为 0 当且仅当 $a_j \in A_{v_i}^+ \cap A_{v_k}^-$. 由此及多个非零项可得出

$$\hat{b}_{i,k} = -|A_{v_i}^+ \cap A_{v_k}^-| = -a_{i,k} = a_{i,k}^{**} \ .$$

因此，引理中的等式是正确的.

把引理 9.42 和引理 9.43 结合起来，那么 $\boldsymbol{A}^{**}(D_i)$ 可以表示为下述形式:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{**}(D) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}(D_i)\circ\boldsymbol{B}(D_i)+\boldsymbol{B}(D_i))\cdot\boldsymbol{B}(D_i)^{\mathrm{T}} \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i)\cdot(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{T}} \\ &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}), \end{aligned}$$

其中 $D_i = (D_0 - A_i)\cup A_i^{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{B} := \boldsymbol{B}(D_0)$，$\boldsymbol{C}_i := \boldsymbol{C}(A_i)$，$i=0,\cdots,m-1$ (注意阿达马积是可交换的且 $\boldsymbol{C}_i\circ\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{I}$. 又因为 $b_{i,j}c_{i,j}b_{k,j}c_{k,j} = b_{i,j}b_{k,j}c_{i,j}^2 = b_{i,j}b_{k,j}$，故 $\boldsymbol{B}(D_i)\cdot\boldsymbol{B}(D_i)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$).

要完成对算子 ω 的构造，剩下的任务是定义不依赖于任意弧集的 $\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{C}(A_i)$，及产生只依赖于 $\boldsymbol{B}(G)$ 的矩阵 $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{B}(D_0) - G$ 的初始定向.

对于第一个任务，考虑 $\boldsymbol{C}_i$ 的第一行 $\boldsymbol{c}(i)$ ($\boldsymbol{C}_i$ 的任意两行相同). $\boldsymbol{c}(i)$ 和 $A_i \subseteq A(D)-\{a_1\}$ 的选取有关，确切地说，它与幂集 $\mathcal{P}(\{a_2,\cdots,a_q\})$ 的元素 A_i 的编号有关. 注意 $\boldsymbol{c}(i)$ 的第 j 个分量 $c_{1,j}$ 满足

$$c_{1,j} = \begin{cases} -1, & \text{当且仅当 } a_j \in A_i \ , \\ +1, & \text{否则} \ . \end{cases}$$

不失一般性，设指标 i 按这样一种方式选取，它的二进制表示式 $\boldsymbol{b}(i)$，写出作为 q- 维行向量，满足

$$b_j(i) = \frac{1}{2}(1 - c_{1,j}), \quad j = 1, \cdots, q \ ,$$

其中 $b_j(i)$ 表示 $\boldsymbol{b}(i)$ 的第 j 个分量. 由 $\boldsymbol{c}(i)$ 和 $\boldsymbol{b}(i)$ 的定义可得

$$\boldsymbol{c}(i) = \boldsymbol{b}(2^q - 1 - i) - \boldsymbol{b}(i) \ .$$

因此，我们找到了定义 $\boldsymbol{C}_i (i = 0, \cdots, 2^{q-1} - 1)$ 的方法，这个方法不必考虑实际集合 $A_i \subseteq A(D_0) - \{a_1\}$.

第二个任务是产生一个初始定向 $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{B}(D_0) = (b_{i,j})$，考虑 $\boldsymbol{B}(G) = (\tilde{b}_{i,j})$，定义 $\bar{\boldsymbol{B}}(G) = (\bar{b}_{i,j})$ 如下：

$$\bar{b}_{1,j} = 0, \quad j = 1, \cdots, q \ ,$$

$$\bar{b}_{i,j} = -2 \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{b}_{k,j}, \quad i > 1, \ j = 1, \cdots, q \ .$$

现在定义

$$\boldsymbol{B} := \boldsymbol{B}(G) + \boldsymbol{B}(G) \circ \bar{\boldsymbol{B}}(G) \ .$$

为了看出 $\boldsymbol{B}$ 确实对应于 G 的一个定向，首先注意 $b_{i,j} = 0$ 当且仅当 $\tilde{b}_{i,j} = 0$. 因为按 B 的定义，$\tilde{b}_{i,j} = 0$ 蕴涵 $b_{i,j} = 0$，而 $b_{i,j} = 0 \neq \tilde{b}_{i,j}$ 蕴涵着

$$0 = 1 + 1 \cdot \left(-2 \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{b}_{k,j} \right) \in \{1, -1\} \ ,$$

这是一个矛盾. 现在观察 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列中的非零分量 $b_{i_1,j}$ 和 $b_{i_2,j}$. 设 $i_1 < i_2$，由 $\bar{b}_{i,j}$ 的定义得到 $\bar{b}_{i_1,j} = 0$，并因此，$b_{i_1,j} = \tilde{b}_{i_1,j} = 1$，而 $\bar{b}_{i_2,j} = -2$ 且因此有 $b_{i_2,j} = 1 - 2 = -1 = -\tilde{b}_{i_2,j}$. 换言之，$\boldsymbol{B}$ 的非零元素在 $\boldsymbol{B}(G)$ 的相同位置上出现，并且 $\boldsymbol{B}$ 的每一列有一个元素 1 和一个元素 -1，即 $\boldsymbol{B}$ 是 G 的一个定向的关联矩阵，称这个定向为 G 的**基本定向**.

总结式 (++) 以下的讨论，得到如下公式：

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(G)| \ =& 2^{1-p} \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{2} d(v_j) - 1 \right)! \sum_{i=0}^{2^{q-1}-1} (1 - \operatorname{sgn}|\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C}_i \cdot \boldsymbol{J}_q|) \\ & \cdot \det \left((\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \right)_{1,1} \ . \end{aligned} \qquad (+++)$$

因此，对于 $p \in \mathbb{N}$，给定偶数 $d_j \ (= d(v_j))(j = 1, \cdots, p)$，给定 $q \in \mathbb{N}$，$(+++)$ 的右端可视为算子 ω，它的输入 $\boldsymbol{B}$ 可以是任意 $p \times q$ 矩阵. 对一个 p 阶 q 条边的

图 G，设它的次序列为 $(d_1,\cdots,d_p)$，那么对 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(G)+\boldsymbol{B}(G)\circ\bar{\boldsymbol{B}}(G)$，就能算出 G 的欧拉迹的数目. 然而必须假定 G 是假定无环的.

为了把 $(+++)$ 推广到有环的图上，我们注意如果把关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 限制在非环的弧上 (在 $\boldsymbol{A}^*(D)$ 和 $\boldsymbol{A}^{**}(D)$ 的定义中也忽略了环)，那么引理 9.43 仍成立. 换言之，必须用 $\boldsymbol{B}(G-\Lambda(G))$ 定义表示 $\boldsymbol{A}^{**}$ 的 $\boldsymbol{B}$. 不管怎样，环被考虑在因子 $\left(\frac{1}{2}d(v_j)-1\right)!$ 中，并且若环的定向认为只有一种方式，这就是 $(+++)$ 中包含有环的图是所需要的全部 (见拜斯特定理)，我们称它为**组合观点**. 定义 7.1 中已用了这一观点 (若一个环的两个半边是不加区别的). 可是从**拓扑观点**来看，一个环 v_jv_j 可以按两种方式定向. 如果不仅把图看成嵌入在一个曲面上 (如平面)，而且要求同胚图有相同数目的欧拉迹，则上述事实就变得明显了. 在这种情况下，$(+++)$ 必须乘以 2^λ，其中 $\lambda=|\Lambda(G)|$. 在把 $(+++)$ 式推广到有环的图时，为了同时包含这两种观点，我们定义

$$\delta(c,t)=\begin{cases}0, & \text{组合观点占优,}\\ 1, & \text{拓扑观点占优.}\end{cases}$$

总结式 $(+)$ 以下的讨论，我们对最一般情况叙述 $|\mathcal{T}(G)|$ 的计数公式.

定理 9.44 设 G 是 p 阶欧拉图，记

$$q=|E(G-\Lambda(G))|,\quad \lambda=|\Lambda(G)|\ .$$

对关联矩阵 $\boldsymbol{B}(G-\Lambda(G))=(b_{i,j})$，定义 $p\times q$ 矩阵 $\bar{\boldsymbol{B}}=(\bar{b}_{i,j})$，其中对一切 $j=1,\cdots,q$，$\bar{b}_{1,j}=0$，并且对 $i>1$，$\bar{b}_{i,j}=-2\sum\limits_{k=1}^{i-1}b_{k,j}$. 置 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(G-\Lambda(G))+\boldsymbol{B}(G-\Lambda(G))\circ\bar{\boldsymbol{B}}$，进而设 $\boldsymbol{J}_p$ 是 q 维列向量，其所有分量为 1. 如果 $\boldsymbol{b}(i)$ 为 i 的二进制表示，写作 q 维行向量，$i=0,\cdots,2^{q-1}-1$，设 $\boldsymbol{C}_i$ 是 $p\times q$ 矩阵，所有行向量相同，均为 $\boldsymbol{c}(i)=\boldsymbol{b}(2^q-1-i)-\boldsymbol{b}(i)$. 最后，设 $\delta(c,t)\in\{0,1\}$ 如上所定义，那么 G 的欧拉迹数目为

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}(G)|\ =&2^{1-p+\lambda\delta(c,t)}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{2}d(v_j)-1\right)!\sum_{i=0}^{2^{q-1}-1}(1-\mathrm{sgn}|(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i)\cdot\boldsymbol{J}_q|)\\ &\cdot\det\left((\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)_{1,1}\ .\end{aligned}$$

我们研究这个公式，不管 G 是以图的形式还是矩阵形式给出，参数 $p,q,\lambda,d(v_j)$ $(1\leqslant j\leqslant p)$ 和变量矩阵 $\boldsymbol{C}_i(0\leqslant i\leqslant 2^{q-1}-1)$，或者可明显地得到，或者至少很容易地求出，进而计算一个 n 阶矩阵的行列式可在 $O(n^3)$ 时间内完成 (在上述情况下，$n=p-1$). 因此，由拜斯特定理给出的公式，在 $|\mathcal{T}(D)|$ 可以在多项式时间内

计算出的意义上是“好的”. 同样，定理 9.44 的公式中和号的每一项也是多项式时间可求的. 然而这个和号下需要计算的项数为 2^{q-1}，从而这个公式就显得“差”. 因此，提出这样的问题，这些项数是否可以减少. 首先注意在大多数情况下，项数小于 $|\mathcal{T}(G)|$ 自身，这可由下述结果 (见 [FLEI76a, Satz 5]) 推出，证明留作练习：

命题 9.45　若 G 是 p 阶连通欧拉图且具有 q 条边，那么 G 的欧拉迹的数目满足不等式

$$2^{q-p}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{d(v_j)}{2}-1\right)! \leqslant |\mathcal{T}(G)| \leqslant 2^{p-q}\prod_{j=1}^{p}\frac{(d(v_j)-1)!}{\left(\frac{d(v_j)}{2}-1\right)!},$$

其中下界被达到当且仅当 G 的每个块是一个圈，而上界被达到当且仅当 G 是一个圈.

因此，若 $\delta(G)\geqslant 6$，则 $|\mathcal{T}(G)|\geqslant 2^q$，即当 $\delta(G)$ 足够大时，用定理 9.44 的公式计算 $|\mathcal{T}(G)|$ 至多需要 $O(|\mathcal{T}(G)|)$ 时间. 事实上，在计算公式中的和项时，不必总是计算行列式，而是通过因子 $1-\mathrm{sgn}|(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i)\cdot\boldsymbol{J}_q|$ 确定 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i$ 是否是 G 的一个欧拉定向的关联矩阵，即 $(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i)\cdot\boldsymbol{J}_q$ 是否是零向量. 这就引出了下述算法 [FLEI83a, 算法][①]：

算法 9.46　设 G 是 p 阶连通欧拉图，使得 $q=|E(G-\Lambda(G))|$，并且 G 的次序列为 $(d_1,\cdots,d_p)$. 设 D 是 $G-\Lambda(G)$ 的基本定向. 置 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(D)$，$\lambda=|\Lambda(G)|$.

第 0 步　置 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}''=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$. 置 $i=0$，$\sigma=0$.

第 1 步　计算 $\boldsymbol{C}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i:=\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i$，$\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{J}_q$.

第 2 步　若 $\boldsymbol{x}\neq 0$，转到第 3 步；若 $\boldsymbol{x}=0$，置 $\sigma=\sigma+\det(\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}'')_{1,1}$.

第 3 步　若 $i<2^{q-1}-1$，置 $i=i+1$，转到第 1 步；若 $i=2^{q-1}-1$，计算

$$|\mathcal{T}(G)|=2^{1-p+\lambda\delta(c,t)}\left(\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{2}d_j-1\right)!\right)\sigma.$$

第 4 步　$|\mathcal{T}(G)|$ 是 G 的欧拉迹的数目.

因此，计算 $|\mathcal{T}(G)|$ 所需的工作量，不像初看定理 9.44 所显示的那么大. 不管怎样，剩下的问题是如何能减少公式中和里的项数，达到这个目的的一个方法是，如果 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_i$ 是 $G-\Lambda(G)$ 的一个欧拉定向 D 的关联矩阵，那么对每个 $j(i<j\leqslant 2^{q-1}-1)$，若对应的弧集 $A_i,A_j\subset A(D)$ 满足 $A_i\subset A_j$ 且 $|A_j-A_i|=1$，则对应于 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}_j$ 的定向不是欧拉的. 此外，若 G 是简单的，即使 $|A_j-A_i|\leqslant 2$ 也有同样的结论. 用 $\boldsymbol{C}_i$ 的行向量 $\boldsymbol{c}(i)$ 表示，这就意味着可以略掉大于 i 的且 $\boldsymbol{c}(j)-\boldsymbol{c}(i)$ 恰有 1 (或者 2，当 G 是简单图时) 个非零项的一切 j.

① 这篇文章中算法与算法 9.46 略有不同. 在算法第 3 步 (算法 9.46 的第 2 步) 的第一部分中说“若 $\boldsymbol{x}\neq 0$，置 $i=i+1$，返回第 2 步.”若 $i=2^{q-1}-1$，这就产生了误解.

限制定理 9.44 中和号内的项数的另一个方法在下一节中讨论.

9.2.3 关于欧拉定向的数目

在定理 9.44 中，我们用 $G-\Lambda(G)$ 的基本定向作为初始定向，但在建立那个公式时所用的方法表明可以取 $G-\Lambda(G)$ 的任意一个定向 D_0. 因为若 D' 和 D'' 是 $G-\Lambda(G)$ 的两个定向且满足 $a_{e_1}\in A(D')\cap A(D'')$，那么

$$\{B(D')\circ \boldsymbol{C}_i \mid i=0,\cdots,2^q-1\}=\{B(D'')\circ \boldsymbol{C}_i \mid i=0,\cdots,2^{q-1}-1\}\,.$$

因为应用拜斯特定理只对 G 的欧拉定向感兴趣，所以我们也可以用 $G-\Lambda(G)$ 的一个欧拉定向作为初始定向 D_0. 由于 G 的一条欧拉迹 T 能在线性时间得到 (见下文算法一章)，所以这个 D_0 可以线性时间内由 T 得到. 人们所面临的问题是集合 $\{\boldsymbol{C}_i \mid \boldsymbol{B}(D_0)\circ \boldsymbol{C}_i$ 对应于 $G-\Lambda(G)$ 的一个欧拉定向 $\}$ 的规模. 要回答这个问题，先作如下观察:

引理 9.47 设 D_1 和 D_2 是欧拉图 G 的两个欧拉定向，那么 $D_0:=D_1-A(D_2)=(D_2-A(D_1))^{\mathrm{R}}$，并且 D_0 是欧拉有向图. 于是 $D_3=D_1\cap D_2$ 也是欧拉有向图.

证明 由定义，$a_e\in A(D_0)$，$e\in E(G)$，蕴涵 $a_e\notin A(D_2)$，因此，必有 $a_e^{\mathrm{R}}\in A(D_2)$，即 $D_1-A(D_2)=(D_2-A(D_1))^{\mathrm{R}}$. 对每个 $v\in V(D)$ 有

$$\mathrm{id}_{D_1}(v)=\mathrm{id}_{D_3}(v)+\mathrm{id}_{D_0}(v)=\mathrm{od}_{D_1}(v)=\mathrm{od}_{D_3}(v)+\mathrm{od}_{D_0}(v)\ ,$$

$$\mathrm{id}_{D_2}(v)=\mathrm{id}_{D_3}(v)+\mathrm{od}_{D_0}(v)=\mathrm{od}_{D_2}(v)=\mathrm{od}_{D_3}(v)+\mathrm{id}_{D_0}(v)$$

(注意 $\mathrm{id}_{D_0}(v)=\mathrm{od}_{D_0^{\mathrm{R}}}(v)$). 由于 $\mathrm{id}_{D_1}(v)=\mathrm{id}_{D_2}(v)=\frac{1}{2}d_G(v)$ 蕴涵 $\mathrm{id}_{D_0}(v)=\mathrm{od}_{D_0}(v)$. 于是 $\mathrm{id}_{D_3}(v)=\mathrm{od}_{D_3}(v)$. 因此，$D_0$ 和 D_3 都是欧拉有向图. 引理证毕.

因此，确定 G 的包含给定弧 a 的所有欧拉定向，等同于确定初始欧拉定向 D_0 的所有欧拉子有向图 D'，使得 $a\notin A(D')$，然后构成 $(D_0-A(D'))\cup(A(D'))^{\mathrm{R}}$. 另一方面，$D'$ 对应于 G 的欧拉子图 G'，但是 G 的欧拉子图一般未必对应于 D_0 的一个欧拉子有向图. 现在我们证明两个结果，这两个结果联合起来建立**含有指定弧的 G 的欧拉定向数目 $\mathcal{O}_E(G)$ 的上下界**. 为了下面的讨论，我们假设一个环有两种方式定向 (见 $\delta(c,t)$ 的定义). 我们也注意到 $\mathcal{O}_E(G)$ 与指定弧 $a_e(e\in E(G))$ 的选取无关. 这可由下述结果推出: 有向图 D 是欧拉的当且仅当 D^{R} 是欧拉的.

引理 9.48 (也见 [PALM78a, 定理 4.4]) 设 G 是具有 p 个顶点和 q 条边的连通图，则 G 的支撑欧拉子图的数目为 2^{q-p+1}.

证明 设 B 是 G 的支撑树，显然，它有 $p-1$ 条边，因此，$q_{G-B}=q-p+1$. 设 $E_0\subseteq E(G-B)$ 为任意选取的，允许 $E_0=\varnothing$. 记 $G=G_1$，G_p 是把 G 中的 B

收缩为一个顶点，然后去掉边集 $E(B)$ 而得到的图. 因此，$E(G_p) = E(G - B)$. 因为，E_0 是 G_p 的一些环的集合，故 E_0 导出 G_p 的支撑欧拉子图. 现在设 G_{p-1} 是把 G_p 的顶点分裂为 B 中两个相邻的顶点 v 和 w 且加上边 $vw \in E(B)$ 而得到的图. $e \in E(G) - E(B)$ 关联于 v (w)，当且仅当 e 关联于 $B - \{vw\}$ 的分支 $C_v \supseteq \{v\}$ $(C_w \supseteq \{w\})$ 中的一个顶点. 在 G_{p-1} 中，E_0 和 $E_0 \cup \{vw\}$ 中恰有一个导出唯一支撑欧拉子图. 重复这个过程，可推出对唯一确定的 $E' \subseteq E(B)$，$E_0 \cup E'$ 导出 G 的唯一的支撑子图 (在每一步可能不得不增加一个孤立顶点). 由于有 $2^{q_{G-B}} = 2^{q-p+1}$ 个这样的子集 E_0，故 G 有 2^{q-p+1} 个支撑欧拉子图.

引理 9.49 若 G 是 p 个顶点和 q 条边的欧拉图，则 $\mathcal{O}_E(G) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{q-p}$ ①.

证明 设引理对 G 不成立. 在所有使引理 9.49 不成立的 G 中，选取满足下述条件的 G，在含有 2 次顶点数目最小的情况下，再使得 $\sigma_G^* := \sum\limits_{v\in V(G)} (d(v) - 4) = 2q - 4p$ 最小. 我们分三种情形进行讨论.

1) G 有 2 次顶点 x. 如果 $E_x \subseteq \Lambda(G) \subset E(G)$，设 $G' := G - \{x\}$，那么对指定的弧 a_e，不管是否有 $\{e\} = E_x$，均有

$$\mathcal{O}_E(G) = 2\mathcal{O}_E(G').$$

但是由 G 的假设及 $p' = p - 1$ 和 $q' = q - 1$，由于 G' 满足引理，从而有

$$\mathcal{O}_E(G) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{q-p}. \qquad (\circ)$$

在平凡的情形下，$E_x = \Lambda(G) = E(G)$，即当 $p \geqslant q = 1$ 时有相同结论.

在其余情形下，把 x 压平而到 G'，G' 满足 $q' - p' = q - p$. 由此及 G 的选择得

$$\mathcal{O}_E(G') \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{q-p}.$$

但是，G' 的欧拉定向对应于 G 的欧拉定向，反之亦然. 因此，上述不等式可以重写为 $(\circ)$. 由此，由 G 的选择必有 $\delta(G) \geqslant 4$.

2) G 有 $2k(k > 2)$ 次顶点 w_0. 考虑 $E_{w_0}^* = \{e_1', \cdots, e_{2k}'\}$，用 $k - 2 \geqslant 1$ 个顶点 $w_1, \cdots, w_{k-2}$ 细分 e_1，使得 w_i 和 $w_{i+1}(0 \leqslant i \leqslant k-3)$ 相邻，并令 e_{2j}', e_{2j+1}' 与 $w_j(1 \leqslant j \leqslant k-2)$ 关联，这样 $w_i(0 \leqslant i \leqslant k-2)$ 变为 4 次顶点，这样得到的图记为 G'. 这样，e_{2k-2}, e_{2k-1} 和 e_{2k} 在 G' 中也关联于顶点 w_0 (图 9.9).

注意 $\sigma_{G'}^* < \sigma_G^*$，以及 G' 的任意一个欧拉定向对应于 G 的一个欧拉定向 (反之未必成立)，从而由 G 的选取可断定

① 因为允许有环，并且假定环有两种可能的定向，因此，[FLEI83a, 引理 6] 中对 $p - |V_2(G)| \geqslant 3$ 的要求是不必要的.

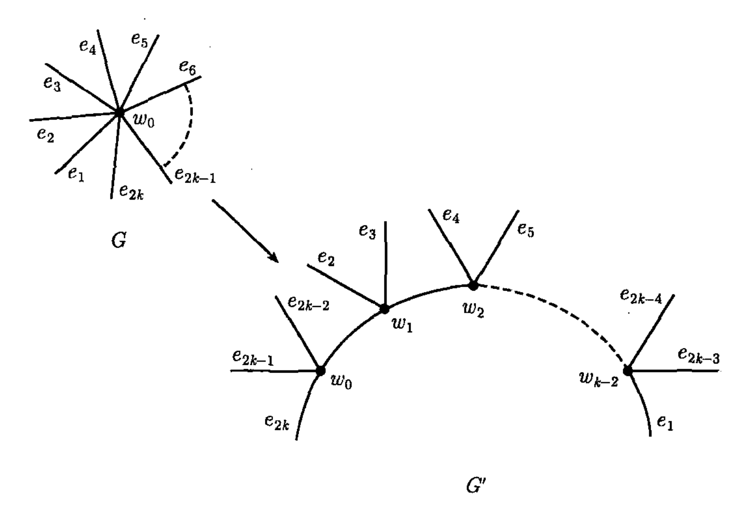


图 9.9 G' 是用 $k-1$ 个 4 次顶点 $w_0, w_1, \cdots, w_{k-2}$ 替换 G 中的一个 $2k$ 次顶点 w_0 而得到的图

$$\mathcal{O}_E(G) \geqslant \mathcal{O}_E(G') \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{q+(k-2)-(p+(k-2))} = \left(\frac{3}{2}\right)^{p-q},$$

即对 $k \geqslant 3$，G 有 $2k$ 次顶点的情况 (∘) 也成立. 由此可断定 $\sigma_G^* = 0$.

3) G 是 4- 正则的. 在这种情况，对 p 进行归纳证明. 若 $p=1$，则 $q = |\Lambda(G)| = 2$，因为假设环有两种可能的定向，故 $\mathcal{O}_E(G) = 2$. 因此，对这种情况，(∘) 成立.

假设 $p > 1$. 设 (v, w) 是一条给定的弧，它属于在 $\mathcal{O}_E(G)$ 中被计算的 G 的每一个欧拉定向，其中 $vw \in E(G)$ 且可能有 $v = w$. 形成 $G_{1,2}, G_{1,3}, G_{1,4}$，其中 $E_w^* = \{e_i' \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$，$e_1 = vw$. 假如 $G_{1,j}$ 不含有一个环的单一顶点的分支，那么压平 $G_{1,j}$ 的 2 次顶点后得到图 $G_{1,j}^0 (j = 2,3,4)$. 首先假设对每个 $j \in \{2,3,4\}$，$G_{1,j}$ 具有这个性质. 这样能断定 $G_{1,j}^0$ 是 4- 正则的，并且 $p_{G_{1,j}^0} = p-1$ $(j \in \{2,3,4\})$. 由 G 的选择和 $q = 2p$ 得

$$\mathcal{O}_E(G_{1,j}^0) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{p-1}, \quad j = 2,3,4,$$

这里假定由分裂 $e_1, e_j \in E(G)$ 而产生的 $e_{1,j} \in E(G_{1,j}^0)$ 作为 $G_{1,j}^0$ 的欧拉定向的指定弧的底边.

正如一个欧拉有向图的一个 4 次顶点可以用两种方式分裂为 2 次顶点而产生一个欧拉有向图一样，包含 (v, w) 的 G 的每一个欧拉定向在 $\mathcal{O}_E(G_{1,j_1}^0)$ 和 $\mathcal{O}_E(G_{1,j_2}^0)$ 中都被计算过，但是在 $\mathcal{O}_E(G_{1,j_3}^0)$ 中没有被计算，$\{j_1, j_2, j_3\} = \{2,3,4\}$. 这个讨论

与前述不等式结合起来，则有

$$2\mathcal{O}_E(G)=\sum_{j=2}^{4}\mathcal{O}_E(G_{1,j}^0)\geqslant 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{p-1}.$$

也就是说，由于对 4- 正则图 G 有 $q=2p$，则有

$$\mathcal{O}_E(G)\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{q-p}=\left(\frac{3}{2}\right)^{p}.$$

要完成引理的证明，必须假设至少有一个 $G_{1,j}(j\in\{2,3,4\})$，含有一个分支 C，使得 $p_C=q_C=1$，即在 G 中 w 关联于一个环. 若 $E_w\subseteq\Lambda(G)$ 确定一个 4- 正则图 $G^0:=G-\{w\}$；否则，设 G^0 是同胚于 $G-(E_w\cap\Lambda(G))$ 的 4- 正则图. 因为在任意情况下均有 $p_{G^0}=p-1$，所以有

$$\mathcal{O}_E(G^0)\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{p-1}.$$

另一方面，因为 $E_w\cap\Lambda(G)\neq\varnothing$，所以不管 vw 是否是环，都有

$$\mathcal{O}_E(G)=2\mathcal{O}_E(G^0)\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{p},$$

即在这种情况下，$\mathcal{O}_E(G)$ 也满足 (∘). 引理证毕.

下述是由前两个引理得到的一个结果.

定理 9.50　设 G 是具有 p 个顶点和 q 条边的连通欧拉图，$e\in E(G)$ 是被选定的边，G 的包含 a_e 的欧拉定向的数目满足不等式

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{q-p}\leqslant\mathcal{O}_E(G)\leqslant 2^{q-p}.$$

证明　显然，这个下界是引理 9.49，上界是引理 9.48 的一个结果. 事实上，由引理 9.48 的前面一段可知，$\mathcal{O}_E(G)$ 最多与 G 中不含指定边 $e\in E(G)$ 的欧拉子图的数目一样大. 换言之，$\mathcal{O}_E(G)$ 不大于 $G-e$ 的欧拉子图的数目. 而这后一个数为 $2^{(q-1)-p+1}=2^{q-p}$. 因此，$\mathcal{O}_E(G)\leqslant 2^{q-p}$. 定理证毕.

事实上，每个块都是一个圈的连通图恰好达到定理 9.50 的上界. 把这个结论的证明留作练习. 顺便注意这样一些欧拉图可以用下述性质刻画：每个强连通定向都是欧拉的 [OELL84a]. 定理 9.50 的下界是建立定理 9.44 中计数公式方法的理论论证，因为当 $V_2(G)=\varnothing$ 时，G 的欧拉定向的数目是随顶点数增加而指数级的增长. 特别地，当 $\delta(G)\geqslant 6$ 时，由 $2q\geqslant 6p$ 可推出 $\mathcal{O}_E(G)>2^p$. 回到帕尔姆 (E.M. Palmer) 的思想 (见推论 9.40 式 (+) 以下的讨论)，由定理 9.50 得到

$$\mathcal{O}_E(K_{2n+1})\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{n(2n+1)-(2n+1)}=\left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)(2n+1)}$$

这意味着随着 n 的增长，$|\mathcal{T}(K_{2n+1})|$ 以惊人的速度增长. 事实上，帕尔姆的思想来自于索罗钦 (V.A. Sorokin) 建立 $|\mathcal{T}(K_{2n+1})|$ 的公式的不成功的尝试 [SORO69a]. 李斯考维茨 (V.A. Liskovec) 首先指出了其中缺陷 [LISK71a]. 但对于较小的 n，姆凯 (B.D. McKay) 利用索罗钦的一些思想得到了 $|\mathcal{T}(K_{2n+1})|(1 \leqslant n \leqslant 5)$ 的精确值，[McKA82a]. 为了给读者关于 $|\mathcal{T}(K_{2n+1})|$ 增长速度的了解，我们指出 $|\mathcal{T}(K_{11})| > 257 \cdot 10^{29}$. 利用李斯考维茨的方法，姆凯给出了 $|\mathcal{T}(K_{17})|$ 的值 [McKA83a]. 这方面的内容参见 [WENI89a].

在继续讨论如何确定一个欧拉图 G 的 $\mathcal{O}_E(G)$ 之前，我们看一下关于简化定理 9.44 中和项所面临的其他一些障碍. 我们已在推论 9.40 的式 (+) 下面的讨论中指出，定理 9.44 的和中行列式随 G 的欧拉定向不同而不同. 这一事实在 [FLEI83a] 和 [McKA82a] 中均已指出，其中提到对 $n < 7$，对 K_{2n+1} 的任意一个欧拉定向 $D_{K_{2n+1}}$，$\det A^*_{i,i}(D_{K_{2n+1}})$ 是相同的，但这一结论对 $n \geqslant 7$ 不成立. 因此，提出下述问题: 对一个欧拉图的所有欧拉定向，是否存在一个结构不变量 (相对于数值不变量而言，如次序列等). 下面的结果说明这样的不变量存在 [FLEI83a, 引理 7][①].

命题 9.51 p 阶无环欧拉图 G 的任意一个欧拉定向 D，D 中以 v_1 为根的基本子图的个数 $\mathcal{N}_B(D)$ 由下式给出：

$$\mathcal{N}_B(D) = 2^{1-p} \prod_{v \in V(G)-\{v_1\}} d_G(v) .$$

证明 观察定理 9.37 证明中的式 (4) 和 (4) 以下的讨论. 在式 (4) 的右端包含 $D_{i_2,i_3,\cdots,i_p}$，它是以 v_1 为根的一个基本子图. 此外，(4) 中的多重和恰含 $\prod_{i=2}^{p} \mathrm{id}(v_i)$ 项. 因此，以 v_1 为根的基本子图的数目为

$$\mathcal{N}_B(D) = \prod_{i=2}^{p} \mathrm{id}(v_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \prod_{v \in V(G)-\{v_1\}} d_G(v) ,$$

从而命题成立.

换言之，一个欧拉有向图的基本子图的个数仅与它的 (欧拉) 基图的次序列有关.

当然，$\mathcal{O}_E(G)$ 有一个精确的公式，它可以由定理 9.44 提炼出来，即

$$\mathcal{O}_E(G) = 2^{q-1} - \sum_{i=0}^{2^{q-1}-1} \mathrm{sgn}|(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C}_i) \cdot \boldsymbol{J}_q| .$$

但是它不像定理 9.50 那样，这个公式没有显示出来关于 $\mathcal{O}_E(G)$ 的确切增长速度. 这个公式也适用于下述研究 (见 [KOTZ59a] 和 [BERM79c]，这里博曼 (K.A. Berman)

① 这篇文章中有一个小的缺陷，即 $i \geqslant 2$ 必成立 (这也适用于这篇文章中 193 页上的式 ($\circ$))，并且指数 p 必须改为 $p-1$.

似乎不知道科特齐格已发表的工作，故重复地发现了科特齐格的结果). 从研究欧拉图 G 的**迹分解集合** $\mathcal{TD}(G)$ 出发，简记为 $t(G) := |\mathcal{TD}(G)|$. 当然这里假定所有迹是闭的.

引理 9.52 若 G 是一个欧拉图，$V(G) = \{v_1, \cdots, v_p\}$，则

$$t(G) = 2^{-q}\prod_{i=1}^{p}\frac{d(v_i)!}{\left(\frac{1}{2}d(v_i)\right)!}.$$

易见，$t(G)$ 的公式只是命题 9.45 中的上界变形，由此即得引理 9.52 的证明.

对每个 $S_j \in \mathcal{TD}(G)$，记 $s_j = |S_j|(j = 1, \cdots, t(G))$，即 s_j 是 G 的迹分解 S_j 中迹的数目. 换言之，s_j 是对应于 S_j 的 G 的 2- 正则分拆中分支数. 每一分支是一个圈，并因此它可以按两种方式定向，即 S_j 导出 G 的 2^{s_j} 个欧拉定向. 另一方面，给定 G 的一个欧拉定向 D，D 有 $\prod_{i=1}^{p}\mathrm{id}(v_i)!$ 个转移系统，每个转移系统确定了 D 的一个迹分解，并因此也是 G 的一个迹分解，从而有

$$2\mathcal{O}_e(G) = \left(\prod_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{2}d(v_i)\right)!\right)^{-1}\sum_{j=1}^{t(G)}2^{s_j},$$

其中上式左端因子 2，是由于没有考虑预先指定弧的缘故. 因此，总结上述讨论可得下面的结果.

引理 9.53 对每个欧拉图 G 有

$$\mathcal{O}_E(G) = \prod_{i=1}^{p}\left(\frac{d(v_j)}{2}!\right)^{-1}\sum_{i=1}^{t}2^{s_j-1},$$

其中 $t = 2^{-q}\prod_{i=1}^{p}\frac{d(v_i)!}{\left(\frac{1}{2}d(v_i)\right)!}$ 且 $s_j = |S_j|$，$S_j \in \mathcal{TD}(G)$.

但是由定理 9.44 来看，$\mathcal{O}_E(G)$ 的这个公式比前面的那个公式 (见命题 9.51 下面的讨论) 更差. 因为这里要求确定数 s_j，而 s_j 能直接确定 $|\mathcal{T}(G)|$，即 $|\mathcal{T}(G)| = |\{j \mid 1 \leqslant j \leqslant t,\ s_j = 1\}|$. 事实上，科特齐格的思想引出了确定 G 的欧拉迹集合. 不管怎样，应用 $s_j \geqslant 1$ 和 t 的值，通过证明对一切 $k \in \mathbb{N}$ 有 $\frac{(2k)!}{(k!)^2} \geqslant 2\cdot 3^{k-1}$，那么人们很容易由引理 9.53 导出引理 9.49.

管梅谷和普里布兰克 (W. Pulleyblank) 发现关于一个图的所有欧拉定向集合的一个有趣的结构特征 [GUAN85b]. 他们定义了一个欧拉图的**欧拉定向图** $\theta(G)$ 如下：$V(\theta(G))$ 是 G 的所有欧拉定向 D 的集合 (因此，D 和 D^{R} 都是 $\theta(G)$ 的顶点)，并且 $D_1D_2 \in E(\theta(G))$，当且仅当 $\langle A(D_1 \cap D_2^{\mathrm{R}})\rangle$ 是一个圈 (或者等价地，当且仅当

$\langle A(D_1^{\mathrm{R}} \cap D_2\rangle$ 是一个圈). 关于 $\theta(G)$ 的下述结果成立 [GUAN85b, 定理 4.4]，本书不加以证明：

定理 9.54 若 G 是连通的欧拉图，那么 $\theta(G)$ 是一个 d- 维超立方图 (并因此是哈密顿的)，或者 $\theta(G)$ 是哈密顿连通的.

比较定理 9.54 和定理 7.28，我们不知道两个定理之间是否有密切的关系. 因为在连通欧拉图 G 中关于一条欧拉迹 T 的一段反向，可以解释为 D_T 的欧拉子有向图 (由 T 导出) 的定向改变了方向. 我们注意到 [GUAN85b] 的作者在研究带风向的邮递员问题 (WPP) 时，导致了对上述问题的研究. 事实上，由于 WPP 是 NP-完全的，所以人们只能试图找一些近似算法. 一种方法是对给定的图 G，定义新的费用函数 $c(e) := \frac{1}{2}(c_1(e) + c_2(e))(e \in E(G))$，然后解费用函数为 $c(e)$ 的 CPP 问题，其中 c_1 和 c_2 是关于 WPP 的费用函数. 这样人们得到一个欧拉母图 G^+. 然后，应用费用函数 c_1 和 c_2 求出 G^+ 的最小费用的欧拉定向 D^+ (见定理 8.100 和其后的 WPT- 算法). 但是要注意，如果 $c(D^+)$ 是关于 CPP 的所有解 G^+ 和所有最小费用的欧拉定向的极小值，D^+ 未必是 G 关于 c_1 和 c_2 的 WPP 的解. 因为 G 中的 WPT 可能有的边使用超过两次，但是刚刚描述的近似解不可能出现这种情况. 这一事实就是运行时间为 $O(p \cdot q^2)$ 的求出 G^+ 的最小费用欧拉定向的算法基础 [GUAN85b, p661].

在结束本小节时，需要指出 [SCHR83a, SCHR83b, LASV83a, LASV86a] 中，对 G 是 $2k$- 正则的情况下给出了 $\mathcal{O}_E(G)$ 的上下界. 实际上，应用通常据说的马丁多项式，拉斯卫格纳斯 (M. Las Vergnas) 给出了 $\mathcal{O}_E(G)$ 的一个显式 [LASV83a, 定理 5.2]①.

9.2.4 拜斯特定理的应用和推广

在本小节中，我们讨论涉及或推广拜斯特定理的有关计数问题的一系列文章. 实际上，[AARD51a] (包含拜斯特定理) 中的基本原理，是动力学 [MARM34a] 和数论 [GOOI46a, REES46a] 中的重要内容，并且可应用于电信中 (见 [BERG73a, p239~240] 和 [LIUC68a, p177，178]). 这些文章所研究的问题主要是：*给定一个字母表 $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$，是否存在一个码字 W (= 序列)，以及有多少个码字 W，使得 A 的每个有序 k- 元组 (重复或不重复) 在 W 中恰出现一次?* 这个问题能变换为一个有向图中欧拉迹的存在性问题 (见 [GOOI46a, BERG73a, LIUC68a]，其中用一个图表示了一个特殊情形，也见下面的讨论). 但在 [GOOI46a] 中，作者声称知道"对于解的数目没有简单的公式"②. 这个公式是由拜斯特定理给出的.

---

① 对 4- 正则图 G 的情形，G 的欧拉定向和塔特多项式 (若 G 是平面图)、马丁多项式 (若 G 嵌入在任意曲面上) 之间的关系，已在 [LASV88a, 定理 2.1 和 5.1] 中给出.

② 也见 [FLEI90d] 中 VI.26 页上的脚注.

在生物学中的脱氧核糖核酸分子研究中提出了类似于上文的问题，由于它们的特殊结构，这些分子可以像字母表上的码字一样对待. 在 [HUTC75b] 中给出了下述结果:

定理 9.55 给定字母表 $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 和两个函数 $m : A \to \mathbb{N}$, $p : A \times A \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. 设 $\mathcal{N}_W$ 表示字母表 A 上具有下述性质的形为 $W = a_{i_1}, \cdots, a_{i_q}$ 的码字的数目，每个字母 a_i 在 W 中恰出现 $m_i := m(a_i)(i = 1, \cdots, n)$ 次，并且 W 中 a_i 紧接的 a_j 的次数恰为 $p_{i,j} := p(a_i, a_j)(i, j = 1, \cdots, n)$，那么

$$\mathcal{N}_W = \left(\prod_{i=1}^{n}(m_i - 1)!\right)\left(\prod_{i,j=1}^{n} p_{i,j}!\right)^{-1} \det(m_i\delta_{i,j} - p_{i,j})_{i,j=1}^{n} ,$$

其中

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,i} + \delta_{i,i_1} - \delta_{i,i_q}, \\ m_i = \sum_{k=1}^{n} p_{k,i} + \delta_{i,i_1}, \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, n ,$$

$\delta_{i,j}$ 是克罗内克函数.

证明 考虑这样一个有向图 D，其中 $V(D) = A$，并且从 a_i 到 a_j 恰有 $p_{i,j}$ 条弧. 先假设 $a_{i_1} \neq a_{i_q}$， 在 D 中加一个新的顶点 a_0 和新弧 (a_{i_q}, a_0) 和 (a_0, a_{i_1})，记这样得到的图为 D_0. 由 D 的定义知，D_0 是欧拉的当且仅当定理中叙述的条件被满足，即形为 $W = a_{i_1}, \cdots, a_{i_q}$ 的码字存在，当且仅当数 m_i 和 $p_{i,j}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ 满足这些条件. 注意始于 a_0 的 D_0 的欧拉迹与始于 a_{i_1} 的 D 的开覆盖迹之间的一一对应性. 注意到 $m_{i_1} = \mathrm{od}_D(a_{i_1})$，而 $m_{i_q} = \mathrm{id}_D(a_{i_q})$，由此得出基尔霍夫矩阵 $\boldsymbol{A}^*(D_0)$ 满足下式:

$$\det \boldsymbol{A}^*_{00}(D_0) = \det(m_i\delta_{i,j} - p_{i,j})_{i,j=1}^{n} .$$

此式连同于拜斯特定理的应用可得

$$|\mathcal{T}_{a_0}(D_0)| = \left(\prod_{i=1}^{n}(m_i - 1)!\right) \det(m_i\delta_{i,j} - p_{i,j})_{i,j=1}^{n} .$$

但是在一个固定的 $T \in \mathcal{T}_{a_0}(D_0)$ 中，如果排列通过 a_i 到 a_j 的这 $p_{i,j}$ 条弧的次序，那么就得到 $p_{i,j}!$ 条不同的欧拉迹，对于固定的 $i, j \in \{1, \cdots, n\}$，它们对应于由 T 表示的同一个码字 W_T. 因此有

$$|\mathcal{T}_{a_0}(D_0)| = \mathcal{N}_W \cdot \left(\prod_{i,j=1}^{n} p_{i,j}!\right) ,$$

这就证明了 $a_{i_1} \neq a_{i_q}$ 情形下定理的正确性.

如果 $a_{i_1} = a_{i_q}$，那么在 D 中增加一个顶点 a_0 和一条弧 (a_0, a_{i_1}) 构成 D_0. 此时 D_0 有起始于 a_0 终止于 $a_{i_1} = a_{i_q}$ 的开覆盖迹当且仅当 D 是欧拉的，即当且仅当满足定理条件，并且 D_0 的开覆盖迹和 D 的起始于 a_{i_1} 的欧拉迹之间存在一一对应. 用在 $a_{i_1} \neq a_{i_q}$ 的情形下处理 D 的方法来处理 D_0，就可以完成定理的证明 (注意若 $a_{i_1} = a_{i_q}$，则 $m_i = \mathrm{id}_D a_{i_1} + 1 = \mathrm{id}_{D_0} a_{i_1}$).

对 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_v(D)$，若只要它们起始于不同的弧就认为是不同的，那么定理 9.55 的证明说明拜斯特定理可以怎样变形 (用整个基尔霍夫矩阵取代它的一个子式). 此外，如果我们承认定理 9.55，那么拜斯特定理可由定理 9.55 导出，并且其证明可由有向图的矩阵树定理给出 (定理 9.37). 这个推导留作练习.

对 $|A| \leqslant 4$，定理 9.55 的无向图形式在 [HUTC75b] 中已进行了讨论. 另外，在 [HUTC75c] 中定理 9.55 已被推广为：首先给定字母表 A 上的不同码字的集合 $\mathcal{W} = \{w_1, \cdots, w_r\}$，使得每个 w_i 的长度至少为 $s + 1 (s \in \mathbb{N})$，并且没有一个 w_i 是 w_j 的首序列，$i, j = 1, \cdots, r$，$i \neq j$，进而给定一个函数 $m := \mathcal{W} \to \mathbb{N}$ (置 $m_i := m(w_i) (1 \leqslant i \leqslant r)$). 问题是

求具有下述性质的码字 W 的个数 $\mathcal{N}_W$：w_i 作为 W 的子序列的次数恰为 m_i 次，并且 w_i 和 w_j (在 W 中) 或者不相交，或者恰有 s 个字母重叠 (若 $m_i > 1$，则 $i = j$ 可能成立). (P)

对应于这个问题的有向图 D 定义如下：D 的顶点是长度恰为 s 的这样一些不同的子序列 v_t，其中每一个子序列是一个 $w_j \in W$ 的首段或尾段. 易见 $t \leqslant 2r$. 定义 $p_{i,j} = \sum\limits_{k \in K_{i,j}} m_k$，其中 $K_{i,j}$ 是起始于 v_i，终止于 v_j 的 w_k 的指标集合. 对所有 $i, j \in \{1, \cdots, r\}$，定义 $p_{i,j}$，然后在 D 中由 v_i 到 v_j 引进 $p_{i,j}$ 条弧，并且对每个 $k \in K_{i,j}$，把这 $p_{i,j}$ 条弧中的 m_k 条弧附上标号 w_k. 因此，(P) 中描述的码字 W 存在当且仅当 D 或者是弱连通欧拉有向图，或者 D 至少有一条开覆盖迹. 应用定理 9.55 和它的证明，就可以直接建立 $\mathcal{N}_W$ 的公式，具体证明留作练习.

本小节前言中所阐述的问题，可以作为问题 (P) 及其解的特殊情况来回答. 实际上，n 个字母表 A 上，一个循环序列中如果每 k 个字母构成的码字恰好出现一次，那么这个循环序列是 k- 狄布鲁因序列 (参见 [DAYH84a], [JUNG87a, p41], [EVEN79a, p8])，并且

n 个字母表上 k- 狄布鲁因序列的个数等于

$$\frac{(n!)^{n^{k-1}}}{n^k} \tag{B}$$

(见 [AARD51a]). 对应于 k- 狄布鲁因序列的有向图 D 是对应于 (P) 的有向图的一种特殊情况：D 的顶点恰是 n^{k-1} 个 $(k-1)$ 个字母构成的码字 w，而 D 的弧对

应 k 个字母的构成码字 $a_1a_2\cdots a_k$，它是自顶点 $a_1a_2\cdots a_{k-1}$ 到顶点 $a_2a_3\cdots a_k$ 的弧，$a_i\in A(i=1,\cdots,A)$. 由此推出 D 是弱连通 n- 正则有向图，并因此它总有欧拉迹. 在 [DAYH84a] 中称这个 D 为(k,n)- **模型有向图** (注意 $a(D)=\sum\limits_{w\in V(D)}\mathrm{od}_D(w)=n^k$，这与有 n^k 个 k 个字母构成的码字一致). (k,n)- 模型有向图也常称为狄布鲁因–古德图或者狄布鲁因图 D_n^k.

我们再讨论问题(P)和由(P)中的数据构造的有向图 D. 在最坏的情况下，$\mathcal{N}_W=0$，即 D 没有 (开的或闭的) 覆盖迹. 然而，人们可能提出下述问题：如果从任一个函数 $m_0:\mathcal{W}_0\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ 出发，其中 $\mathcal{W}_0\subseteq W$ 充分小，然后把 m_0 扩充到 $m:\mathcal{W}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$，是否有可能得到 $\mathcal{N}_W>0$. 这个问题在 [DAYH84a] 中进行了研究，其中 $\mathcal{W}_0$ 被称为**独立的规定码字集合**，而 $\mathcal{W}$ 是 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 上的所有 k 个字母的码字集合，$k\geqslant 2$，$n\geqslant 2$. 变换成图论问题就是在 (k,n)- 模型有向图 D 中，确定那样一些弧集 $A_0=\{w_{i_1},\cdots,w_{i_r}\}$，使得按照下述运算总能由 D 得到一个具有覆盖迹的有向图 D_1：首先，用与 w_{i_j} 有相同起始和终止点的 m_{i_j} 条弧替换 $w_{i_j}\in A_0$，其中 $m_{i_j}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 是任意选取的，$j=1,\cdots,r$，称这样得到的有向图为 D'. 其次，对每个 $w\in A(D)-A_0\subset A(D')$，对于值 $m(w)$，用 $m(w)$ 条与 w 有相同起始和终止点的弧替换 w， 这样得到具有覆盖迹的有向图 D_1. 当然，每个 $\{w\}(w\in A(D))$ 是独立的规定码字的一个集合，这可由 D 有欧拉迹 (见上文) 这一事实推出. 因此，人们可能会问独立规定码字的最大集有多少个元素，以及这样的最大集合有多少个. 下述的结论 (几乎完全地) 回答了这些问题，证明 (见 [DAYH84a, 定理 3.7, 引理 3.8, 定理 4.3 和定理 6.11]) 省略.

定理 9.56 设 $A_n=\{a_1,\cdots,a_n\}(n\geqslant 2)$ 是一个字母表，设 $A_{0,k}$ 是任一极大独立规定 k- 字母码字的集合，$\mathcal{A}_{0,k}$ 是所有 $A_{0,k}(k\geqslant 2)$ 的集合. 记 $m_{n,k}=\max\{n,k\}$，下式成立：

$$1)\ |A_{0,k}|=\begin{cases} n^k-n^{k-1}, & m_{n,k}>2\ ,\\ n^k-n^{k-1}+1=3, & m_{n,k}=2\ ;\end{cases}$$

$$2)\ |\mathcal{A}_{0,k}|=\begin{cases} \dfrac{(n!)^{n^{k-2}}}{n^{k-1}}, & n>2\ \text{且}\ (k,n)\neq(2,3)\ ,\\ \dfrac{7\cdot 2^{2^{k-2}}}{2^{k-1}}, & n=2\ \text{且}\ k\geqslant 5\ .\end{cases}$$

定理 9.56 的证明部分依赖于如下事实：如果 $n\geqslant 2$ 且 S 是任意 $(k-1)$ 狄布鲁因序列，那么不是 S 中的一段的所有 k 个字母的码字构成最大的 k 字母码字的独立规定集. 此外，若 $n>2$，则 $|\mathcal{A}_{0,k}|=|\mathcal{T}_v(D)|$，其中 D 是 $(k-1,n)$ 模型有向图，它的欧拉迹数目为 $(n!)^{n^{k-2}}/n^{k-1}$ (见结论 (B))，它是拜斯特定理的一个特殊情形. 定理 9.56 的主要部分可以由哈密顿有向图的一个更一般的定理得出

([DAYH84a, 定理 5.1]). 我们也注意到文章 [PATT73a]，其中拜斯特定理作为一个等价的方法，更直接地用于琨纽尔 (Quenuille) 转换设计的计数. 最后，我们提一下，文章 [DAWS57a] 把引出定理 9.55 的一些讨论以及此后的一些概率论的考虑结合起来，而文章 [BAUM66a] 应用拜斯特定理直接计数有向图中的所谓的循环模式. 涉及狄布鲁因图的文章见参考文献 (用 + 作了标记).

下面讨论推广拜斯特定理的一种途径，这个途径已在 [JACS79a] 中讨论过，与上述类似，它是从研究字母表上的码字出发 (见定理 9.55 以及其后的讨论). 但是这些文章得到的结果没有用到拜斯特定理，确切地说，拜斯特定理 (还有其他一些计数公式)，可以作为这些结果的一种特殊情况被导出.

设字母表 A 具有形式 $A=\{1,\cdots,n\}$，A^* 是 A 上序列的半群，二元运算为连接 $A^*\times A^*\to A^*$，ε 表示空序列，它也是 A^* 的幺元，记 $A^+=A^*-\{\varepsilon\}$. 设函数 m 和 p 为定理 9.55 中所定义的，进而设 $\{v_{i,j}\mid i,j=1,\cdots,n\}$ 和 $\{x_i\mid i=1,\cdots,n\}$ 是不确定集合. 为简短起见，我们引进一些符号. 对上述集合和函数，设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$ 是对角矩阵，它的第 (i,i) 个元素是 x_i，关于函数 $m:A\to\mathbb{N}$，相应地，定义 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{M}$. 设 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别表示矩阵，它们的第 (i,j) 个元素分别为 $p_{i,j}$ 和 $v_{i,j}$. 定义

$$\boldsymbol{V}^P:=\prod_{i,j=1}^{n}v_{i,j}^{p_{i,j}}\ ,\quad \boldsymbol{x}^m:=\prod_{i=1}^{n}x_i^{m_i}\ ,$$

$$\boldsymbol{P}!:=\prod_{i,j=1}^{n}p_{i,j}!\ ,\quad \boldsymbol{m}!:=\prod_{i=1}^{n}m_i!\ ,$$

进而对每个 $w\in A^+$，定义

$$\varphi(w)=\boldsymbol{x}^m\boldsymbol{V}^P\ ,$$

其中 m_i 和 $p_{i,j}$ 分别表示 i 和 ij 在 w 中出现的次数，$i,j\in A$. 由此得到 [JACS79a, 命题 2.1] 如果 w 起始于 i_1，终止于 i_q，则

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{V}):=\sum_{w\in A^+}\varphi(w)$$

是 A^+ 的生成函数，其中 m_i 和 $p_{i,j}$ 满足定理 9.55 所叙的条件 (其中函数 m 和 p 随 $w\in A^+$ 的变化而不同). 事实上，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{V})$ 可以写为形式

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{V})=\sum_{i=1}^{n}y_i\ ,$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ 对应于下述线性方程组的唯一解：

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\ ,$$

参见 [JACS79a, 引理 2.2]. 这篇引文的主要结果 [JACS79a, 定理 3.1] 给出了 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{V})$ 的显式形式的幂级数展式

$$y_r=\sum_{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x}^m\boldsymbol{V}^P\det(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{P})(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}})!(\boldsymbol{P}!)^{-1}\ , \tag{$*$}$$

其中和号是对所有使得

$$m_j=\sum_{j=1}^{n}p_{i,j}+\delta_{r,j}\ ,\quad j=1,\cdots,n \tag{$**$}$$

的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 求的，这里假设存在 $s\in A$，使得

$$m_i=\sum_{j=1}^{n}p_{i,j}+\delta_{i,s}\ ,\quad i=1,\cdots,n, \tag{$***$}$$

($\boldsymbol{J}\in\mathbb{R}^n$ 表示分量全为 1 的列向量).

拜斯特定理可由 ($*$) 如下导出：注意 ($**$) 和 ($***$) 把 y_r 归类为 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{V})$ 的幂级数展式中这样一部分，这部分对应于 A^+ 中起始于 $r\in A$，终止于 $s\in A$ 的元素. 由此得到对于满足 ($**$) 和 ($***$) 的固定的 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{x}^m\boldsymbol{V}^P$ 的系数是 A 上这样一些码字 W 的数目 $\mathcal{N}_W$，其中 $W=r\cdots s$，而 s 是由 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 确定的一个数. 这样由式 ($*$) 得出

$$\mathcal{N}_w=(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}})!(\boldsymbol{P}!)^{-1}\det(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{P})\ .$$

然而，对 $a_i=i$，$i_1=r$ 和 $i_q=s$，这个公式就是定理 9.55 的公式. 因为 ($**$) 和 ($***$) 成立，所以定理 9.55 的条件是满足的. 换言之，在不使用拜斯特定理的情况下，由 [JACS79a, 定理 3.1] 可得到定理 9.55. 在定理 9.55 的证明后面的讨论中 (见练习 9.20)，定理 9.55 加上有向图的矩阵树定理就能得到拜斯特定理. 我们注意到式 ($*$) 也可用于确定一个有向图中哈密顿圈的个数 [JACS79a, 推论 4.2]. 但是高尔顿 (I.P. Goulden) 和杰克逊 (D.M. Jackson) 提出所谓色树的计数方法，这一方法连同于有向图的矩阵树定理，就得到拜斯特定理的另一个证明 [JACS81b]. 把这一方法推广到有根标号树的计数，上述作者能导出有向图的矩阵树定理 [GOUL82a]，这又导致拜斯特定理的另一个证明和有向图中哈密顿圈的计数 [GOUL81b].

9.2.5 其他说明

我们已经讨论了有向图和图中欧拉迹的各种计数方法，在这个讨论中，拜斯特定理可以说是一个柱石. 可是在第 6 章中我们已经讨论了满足一些限制的各种类型的欧拉迹. 因此，提出了特殊类型的欧拉迹如何计数的问题.

2- 连通外平面图的 A 迹的计数公式在 [REGN76a, Satz4.1.3] 中已经给出，它建立在定理 6.87 的基础上，这里仅叙述这个定理，而不加证明.

定理 9.57 设 G 是简单的 2- 连通外平面欧拉图，它的一个 2- 面着色满足 G 的外面 F_∞ 是 1- 面. 设 $F_1,\cdots,F_n$ 是 G 中不同于 F_∞ 的 1- 面，并且记 $V^{(i)}:=V(\mathrm{bd}(F_i))$. 设 $\mathcal{P}_n$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有划分 P 的集合，那么

$$|\mathcal{T}_A(G)|=\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\prod_{I\in P}\left|\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\notin I}(V^{(i)}-V^{(j)})\right|$$

$$=\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\prod_{I\in P}\left|\bigcap_{i\in I}V^{(i)}-\bigcap_{j\notin I}V^{(j)}\right|.$$

在被嵌入曲面 $\mathcal{S}$ 上的 4- 正则图 G 的情况下，拉斯卫格纳斯 (M. Las Vergnas) 研究了 G 的迹分解 S，使得 X_S 或者只包含非交叉转移，或者对每个 $v\in V(G)$，$X(v)$ 是一对交叉转移. 在后一种情况下，称 S 中的元素是**交叉迹**. [LASV81a, 命题 5.2] 给出下述结果:

定理 9.58 设 G 是嵌入曲面 $\mathcal{S}$ 上的 4- 正则图，设 $s_k(G)$ 是使得 $|S|=k$ 的迹分解 S 的数目，并且 X_S 是非交叉转移系统，进而设 $\mathrm{crt}(G)$ 表示 G 的交叉迹的个数，则

$$|\mathcal{T}_A(G)|=\frac{1}{2}\left(\sum_{k>1}(-2)^k s_k(G)-(-1)^{p_G}(-2)^{\mathrm{crt}(G)}\right).$$

注意在 $\mathcal{S}$ 是球面或者射影平面或者环面的情况下，多项式①

$$\sum_{k\geqslant 0}s_{k+1}(G)(x-1)^k$$

和 G_1 的塔特多项式是密切相关的，其中 G_1 是由 $M(G_1)=G$ 定义的 (见 [LASV81a, 命题 4.1]. 嵌入在一个曲面上的简单图 G_1 的**中图** $M(G_1)$ 定义如下: $V(M(G_1))=E(G_1)$，并且 $e,f\in V(M(G_1))$ 在 $M(G_1)$ 中是相邻的当且仅当 e,f 在 $O^+(v)$ 中是相邻的，其中 $v\in V(G_1)$ 且 $e,f\in E_v$).

当然，在平面 3- 连通欧拉图 G 中，A- 迹的个数等于伴随超图 M_i 的支撑超树 T_i 的个数. 但是由于确定 M_i 是否有这样的 T_i 问题是 NP- 完全问题，所以建立 $|\mathcal{T}_A|$ 的一个计数公式可能是一个相当困难的任务 (见定理 7.14 证明之后的讨论). 在任意情况下，不可能希望得到类似于拜斯特定理那样的结果 (因为那个公式可以在多项式时间内计算).

至于有向图 D 的欧拉迹计数，等同于 G_+^- 的欧拉迹计数，其中 G_+^- 是 D_+^- 的基图. 在这种情况下，定理 9.44 提供一个 (虽然不很实际的) 计数公式. 相比之下，

① 对于任意欧拉有向图 D 的情况，如果不限制 X_S，考虑任意迹分解 S，这个多项式恰恰是 D 的马丁多项式. 在 G 是图的情形下，G 的马丁多项式，除 -1 用 -2 替换外，用相同的方式定义.

若 $D_1 = D - D_0$ 满足定理 6.34 的假设，有向图 D 的 D_0- 偏好欧拉迹计数是容易的. 因此，把建立这一个公式的任务留作练习. 最后，计算 $P(G)$- 相容欧拉迹的数目是另一个未解决的问题.

[SHIS68a] 中给出了不同于定理 9.44 的一种图的欧拉迹的计数方法. 作者们已注意到，他们的方法是完全图中塔里 (Tarry) 的欧拉计数方法的推广 (见 [LUCA94a, p125~151]，其中讨论了所谓的多米诺问题). 这个方法相继地对每个满足 $d(v_i) = 2k_i > 2$ 的 $v_i \in V(G)$，用所有可能的方式，用 k_i 个 2 次顶点替换 v_i，并建立了一个线性方程组，其解就是 $|\mathcal{T}(G)|$. 在下一章中，应用这个替换方法的一个改进形式，建立了求 $\mathcal{T}(G)$ 的一个算法.

9.3 习　　题

练习 9.1　证明推论 9.4 (提示: 在 (混合) 图 H 的情况下，对 H 的欧拉定向进行操作).

练习 9.2　a) 证明注 9.6 的结论 d);　b) 证明推论 9.7a .

练习 9.3　从定义 9.9 出发，证明下述事实:

a) 旋转等价性确定了 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 上一个等价关系 RE，并因此在 RE 下 $\mathcal{T}_v(G,H)$ 有一个等价类的划分 $\mathcal{P}_{\text{RE}}(v)$;

b) 如果 $T, T' \in C \in \mathcal{P}_{\text{RE}}(v)$，那么 $X_T = X_{T'}$，但是反之，一般不成立;

c) 对于每个 $C \in \mathcal{P}_{\text{RE}}(v)$ 有 $|C| = \frac{1}{2}d(v)$.

练习 9.4　证明引理 9.14.

练习 9.5　证明推论 9.16 和推论 9.17 (用推论 9.12 证明推论 9.17 的 2)).

练习 9.6　详细补充定理 9.21 的证明.

练习 9.7　证明下述各命题的等价性 (注意只要有可能就避免使用定理 9.27):

a) $H(0,1;0)_{2p}$ 是 f- 均衡的当且仅当 $H(0,1;0)_{2p}$ 是 f- 均衡的;

b) 对 $j \in \{0,1\}$，$H(2,j;0)_{2p}$ 是 t- 均衡的当且仅当 $H(2,j;2)_{2p}$ 是 t- 均衡的;

c) $H(3,0;0)$ 是均衡的当且仅当 $H(3,0;2)$ 是 f- 均衡的;

d) $H(0,0;0)_{2p}$ 是 t- 均衡的当且仅当 $H(0,0;2)_{2p}$ 是 t- 均衡的.

练习 9.8　证明推论 9.28~ 推论 9.30.

练习 9.9　把推论 9.29 推广到型为 $(3,1;2)$ 的混合图.

练习 9.10　说明有无限多个非均衡的型为 $(2,1;0)_{2p-2}$ 的混合图，以及无限多个型为 $(3,0;0)_{2p-3}$ 的混合图 (见推论 9.30 之后的讨论).

练习 9.11　扩充定理 9.27，使其包含推论 9.28~ 推论 9.30 中的新结论.

练习 9.12　对于 $A_1, \cdots, A_m \in \boldsymbol{B}_n^*$，证明 (A*) 中的迹为零，当且仅当伴随的 (混合)(有向) 图或者是弱均衡的或者它有奇次顶点.

练习 9.13　证明命题 9.32，并且把 1)~3) 中每一个叙述都变换为关于 m 阶标准恒等式的叙述，对命题 9.33 也进行这一变换.

练习 9.14　证明定理 9.35.

练习 9.15 除了在 9.1.1 小节中叙述的结果外，证明类似于 (S) 的各结论，考虑均衡混合图的结果，它们不同于定理 9.31 和定理 9.34 的证明中所使用的结果.

练习 9.16 证明引理 9.36.

练习 9.17 证明引理 9.41.

练习 9.18 证明命题 9.45 (提示：下界的证明应用分裂引理).

练习 9.19 对连通图，证明 $\mathcal{O}_E(G) = 2^{q-p}$ 当且仅当 G 的每一个块是一个圈.

练习 9.20 证明拜斯特定理可以利用矩阵树定理由定理 9.55 和它的证明导出.

练习 9.21 应用定理 9.55 和它的证明，建立更一般问题 (P) 的 $\mathcal{N}_W$ 的公式，其中 (P) 是定理 9.55 证明之后的讨论中所描述的.

练习 9.22 设 $D_1 \subset D$，其中 D 和 D_1 都是有向图，设 $D_0 = D - D_1$，证明判断 D_1 是否满足定理 6.34 的假设和结论 2)，有多项式时间算法，进而如果 D 有 D_0- 偏好欧拉迹，建立 D 的 D_0- 偏好欧拉迹的计数公式.

第 10 章　欧拉迹和圈分解的算法及迷宫搜索算法

在本章，我们提出几个算法，并在一定程度上讨论它们的复杂性. 至今已经提出的那些算法将不讨论.

10.1　欧拉迹的算法

我们的出发点是导出一些特殊类型的欧拉迹算法的分裂引理. 因为这些算法能够从下面一般的算法导出，故我们将简要地讨论前者，并且把它们的明显推证留作练习. 给出的讨论基本上沿着 [FLEI83b, 第 6 节] 的线索.

算法 10.1　分裂算法.

第 0 步　给出一个规模为 $q>0$ 的连通图 G，选一个初始点 $v_0 \in V(G)$，并令 $T_0 = v_0$ 是初始迹. 令 $H = G$，$i = 0$.

第 1 步　假设 $T_i = v_0, e_1, v_1, \cdots, e_i, v_i$ 是通过一系列 (可能是空的) 分裂边对的方法构成的，使得 T_i 表现为一条 (H 中的) 路，其内点在 H 中是 2 次点[①]. 若 $i = 0$，任选 $e_1 \in E_{v_0}$，转向 (1.2)；若 $i \neq 0$，令 $f_1 = e_i$.

(1.1) 如果 $d_H(v_i) > 2$，选 $f_2, f_3 \in E_{v_i} \cap (E(H) - E(T_i))$. 对于 $j = 2, 3$，通过分裂边 f_1 和 f_j 形成 $H_{i,j}$. 如果 $H_{1,2}$ 是连通的，定义 $H = H_{1,2}$；否则，定义 $H = H_{1,3}$. 如果 $d_H(v_i) = 2$，H 保持不变.

(1.2) 不在 T_i 中，并且在 H 中与 v_i 关联的边记作 $e_{i+1} = v_i v_{i+1}$. 定义 $T_{i+1} = T_i, e_{i+1}, v_{i+1}$ (可能有 $v_{i+1} = v_i$).

(1.3) 置 $i = i + 1$.

第 2 步　如果 $i \neq q$，转到第 1 步；否则，转到第 3 步.

第 3 步　T_q 是 G 的一条欧拉迹.

正如我们后面将看到的，这个算法不是最快的. 可是它的优点在于它能作为一系列算法的基础，在执行时间是多项式界的意义下这些算法是好的. 事实上，下述算法能看成算法 10.1 的直接结果. 它是关于欧拉迹的最老的算法之一 (早期的描述见 [LUCA94a, p134-135]).

算法 10.2　弗莱瑞算法 (Fleury's Algorithm).

第 0 步　给出一个规模为 $q>0$ 的连通图 G，选一个初始点 $v_0 \in V(G)$，并且 $T_0 = v_0$ 是初始迹.

---

① 对一条路 P，如果 $d_P(v) = 2$，则 $v \in V(P)$ 称为内点.

第 1 步 假设已经选取迹 $T_i = v_0, e_1, v_1, \cdots, e_i, v_i$. 令 $G_i = G - E(T_i)$.

(1.1) 选出 $e_{i+1} \in E_{v_i} \cap E(G_i)$，使得 e_{i+1} 不是 G_i 的桥，除非它是 G_i 的一条悬挂边.

(1.2) 记 $e_{i+1} = v_i v_{i+1}$，定义 $T_{i+1} = T_i, e_{i+1}, v_{i+1}$.

(1.3) 置 $i = i + 1$.

第 2 步 如果 $i \neq q$，转到第 1 步；否则，转到第 3 步.

第 3 步 T_q 是 G 的一条欧拉迹.

算法 10.1 和算法 10.2 之间的区别在于算法 10.1 相断产生的图 H 的 2 次点数目随之增加，而在算法 10.2 中迹 T_i 分离储存，使得 G_i 的边数严格减少. 因此，与分裂算法相比较，从实际的观点来看，弗莱瑞算法似乎更合适. 然而，在算法 10.2 的第 1 步 (1.1) 中，如果 e_{i+1} 不是 G_i 的悬挂边，则 e_{i+1} 的选择相当于应用分裂引理. 这样，如果把算法 10.1 中的 H 看成算法 10.2 中的 T_i 和 G_i 的边不交的并，那么 $H_{1,j}$ $(j \in \{2,3\})$ 是不连通的，当且仅当 f_j 是 G_i 的一个桥而不是悬挂边. 另一方面，如果 $H_{1,2}$ 不连通，分裂引理保证了 $H_{1,3}$ 是连通的. 这样算法 10.2 第 1 步 (1.1) 中 e_{i+1} 的选择总是可能的，并且因此分裂引理保证了*分裂算法*和*弗莱瑞算法*都是可行的. 因为 e_{i+1} 的选择，在算法 10.2 中构造的迹 T_i 通常称为*地峡边–回避的* (见 [TUTT66b, p40，41]).

尽管分裂算法在实用上有缺点，但能容易地修改它，得到求 $P(G)$- 相容欧拉迹的一个算法 (因此，也是有向图中欧拉迹的算法)，或得到求嵌入在一个曲面上的图 G 的不相交欧拉迹的一个算法 (因此，如果 $\Delta(G) \leqslant 4$，得到求 A- 迹的算法). 它所需要的一切是适当地限制分裂算法第 1 步 (1.1) 中 f_2, f_3 的选择. 因此，把导出这样的一些算法留作练习.

然而，建立在欧拉有向图 D 中求 $X(D)$- 相容欧拉迹的算法需要应用双分裂引理 (见推论 6.15 和它的证明). 至于建立一个求混合图 H 的欧拉迹的算法，人们可以首先产生 H 的一个欧拉定向图 D_H (它能用多项式时间完成，见基于流理论的定理 4.11 的证明概述)，然后找出 D_H 的一条欧拉迹. 我们把建立求混合图中的 $X(D)$- 相容欧拉迹和欧拉迹的算法也留作练习.

至于分裂算法的复杂性 (还有弗莱瑞算法的复杂性，见上面讨论的这两个算法之间的关系)，它的执行时间至多是 $O(p \cdot q)$. 因为确定一个图的连通性能用 $O(p)$ 时间完成. 这和分裂引理一起保证了 $H \in \{H_{1,2}, H_{1,3}\}$ 的连通性能用 $O(p)$ 时间确定. 因为分裂运算只有在 $d(v) > 2$ 时才应用，并使得 $d(v)$ 减少 2，因此，确定连通性至多执行 $\sum\limits_{v \in V(G)} \dfrac{1}{2}(d(v) - 2) = q - p$ 次. 这就给出了上面的界 $O(p \cdot q)$. 于是从分裂算法导出的更特殊算法的执行时间也不比 $O(p \cdot q)$ 差. 然而，使用并行处理能够

改进这个上界 (见下文). 至于混合图中的 $X(D)$- 相容欧拉迹和欧拉迹，相应算法复杂性研究见练习 10.2 和练习 10.3.

当对欧拉有向图运用弗莱瑞算法时，我们注意到它的一个有趣的特点，它将弗莱瑞算法与定理 6.33 联系起来.

定理 10.3 设 D 是弱连通欧拉有向图，对 D 使用弗莱瑞算法 (分别用 b_i 和 D_i 代替 e_i 和 G_i)，并且设 v_0, T_i 为弗莱瑞算法中所定义的，则下面的结论成立:

1) 如果 $b_i \in A(D_i) \cap A_{v_i}$ 是桥 (即使它是一个悬挂弧)，则 $b_i \in A_{v_i}^+$ 且 b_i 是唯一确定的;

2) 对每个 i，如果 b_i 是 D_i 的桥，我们标记 $b_i \in A(D_i) \cap A_{v_i}$，则 D 中被标记的弧导出一个根在 v_0 的入树 B (注意同一条弧可能被标记不止一次)，进而在对弧标记过程中 B 的弧出现在用弗莱瑞算法构造的欧拉迹的“最后的弧”中.

定理 10.3 的证明留作练习. 我们注意定理 10.3 和定理 6.33 提供了对弗莱瑞算法的一个结构性的洞察，并且提供了为什么这个算法可行的另一个解释. 另一方面，定理 6.33 能作为有向图 D 中欧拉迹算法的一个基础: 第 1 步，必须构造一个以所选 $v_0 \in V(D)$ 为根的支撑入树 D_0，而在第 2 步，中构造 $(D - D_0)$- 偏好欧拉迹.

下面的算法基于赫拉兹的原始文章 (见第 2 章). 事实上，这篇文章可看成算法的概述，这也是为什么称之为*赫拉兹算法*的原因①. 因为它执行起来比前面两个算法都快. 在这里提出这个算法的两种表述: 第一种表述遵循前面算法所用的风格，第二种更形式化，以便更好地估计算法的复杂性.

算法 10.4 赫拉兹算法.

第 0 步 给定一个连通欧拉图 G，选一个起点 $v_0 \in V(G)$.

第 1 步 从 v_0 开始在每一步经过任一条还没有经过的边产生一条闭迹 T_0. 因为 G 是欧拉的，T_0 在 v_0 终止有 $E_{v_0} \subseteq E(T_0)$. 令 $i = 0$.

第 2 步 如果 $E(T_i) = E(G)$，转到第 4 步.

如果 $E(T_i) \neq E(G)$，选择 $v_{i+1} \in V(T_i)$，使得 $E_{v_{i+1}} - E(T_i) \neq \varnothing$ (因为 G 是连通的，这样的 v_{i+1} 存在). 在 $G - E(T_i)$ 的含 v_{i+1} 的分支中从 v_{i+1} 开始像第 1 步一样产生一条闭迹 T_i' (因为 $G - E(T_i)$ 是欧拉的，T_i' 存在).

第 3 步 产生一条闭迹 T_{i+1}，使得 $E(T_{i+1}) = E(T_i) \cup E(T_i')$. 其方法是从 v_0 开始进入 T_i 到 v_{i+1}，分叉进入 T_i' 并且贯穿 T_i'，在 T_i' 中最后一次到达 v_{i+1} 后，结

① 可能我是第一个这样称这个算法的 [FLEI83b]，但是我肯定不是唯一的 [JUNG87a, p39~41]. 相反地，雷得 (R.C. Read) (我非常感谢他给出了赫拉兹算法的更形式化的优美的阐述) 曾把这个算法归于欧拉，因为当时还不知道欧拉的原始文章 [READ62b, p51]. 但是，这个错误观点在讲德语的和匈牙利的以外国家的大多数图论学家中似乎一直延续到 20 世纪 80 年代.

束贯穿 T_i ①.

置 $i=i+1$ 并转到第 2 步.

第 4 步 T_i 是 G 的一条欧拉迹.

可是算法 10.4 的表述对于判别这个算法是否比分裂算法好不是特别充分的. 理由在于算法 10.4 的第 2 步的第二部分，其中没有说明如何找 v_{i+1}，使得 $E_{v_{i+1}} - E(T_i) \neq \varnothing$. 事实上，它完全依赖于怎样储存图和如何使用指针 (有效地搜索给定数据的一个常用的工具)②.

设 G 是简单连通欧拉图③. 假定 "图作为一些邻接表被储存，对每个顶点各有一个表列出其邻接顶点". 用 $L(x)(x \in V(G))$ 表示这些表. 一个子迹 T_i 从 u 到 v 通过一条边 $e=uv$ 等价于在 $L(u)$ 中删去 v，在 $L(v)$ 中删去 u (见算法 10.4). 对这个消去程序，"只要用这个表 [分别为 $L(u)$，$L(v)$] 中的最后一个顶点覆盖这项 [分别为 $L(u)$ 中的 v 和 $L(v)$ 中的 u] 就足够了，然后表的长度减少 1，即顶点的次减少 1". 至于同时消去 $L(v)$ 中的 u，"这必须有一个指针指向 v- 表中的 u- 项，反之亦然". 用这些给出的结构，我们给出有关赫拉兹算法的雷得的拟-algol 语言描述.

算法 10.4′ u 是 G 的任意顶点. HEAD 和 TAIL 是堆. 开始 HEAD=$\{u\}$，TAIL=$\varnothing$.

```
While HEAD≠ ∅ do
  begin
    While 堆的顶部点 u 的次 > 0, do
      begin
        设 v 是与 u 相邻的一个顶点.
        把 v 加到 HEAD (v 变为新的 u).
        从 G 中消去边 uv.
        u 和 v 的次减少 1.
      end.
    While HEAD≠ ∅ 并且 HEAD 的顶部点 u 的次为 0, do
      begin
        从 HEAD 中除去 u.
        把 u 加到 TAIL.
      end.
  end.
```

① 即 T_{i+1} 源于包括 T_i 的第一个转移和 T_i' 的最后一个转移的 κ- 吸收.

②对于下面，我基于雷得的信，其中他建立了下面的 "……[赫拉兹] 算法的 "拟 -algol" 列表……"(这和其他引号中的说法取自于雷得的信). 对于赫拉兹算法的另一个说明，见 [EVEN79a, p7, 8].

③ 因为 $S(S(G))$ 对任意图 G 是简单图，这个假定不含实际限制.

欧拉迹在 TAIL 中.

为了看出这个算法的时间和空间复杂性是 $O(q)$，首先注意搜索 $v \in N(u)$ 是容易的，只要取 $L(u)$ 的第一项即可. 在任一步中，$L(u)$ 的第一项是顶点 v，对于它 uv 还未被通过，进而从 v 开始继续子迹 T_i 不要求任意搜索程序，这是因为 v 在堆 HEAD 的顶部 (这样 HEAD 在任意给定的时间至多含 q 个对象)，并且 $L(v)$ 是立即可达的. 其次，如果已完成了 T_i 的构造，即如果用完了 $L(u)$ 的所有项后，T_i 在起点 u 结束，则顶点 u 作为这个堆的顶部点从 HEAD 中除去，并且放到堆 TAIL 的顶部. 然后按下述方法反向追踪 T_i：相继将 HEAD 顶部点堆放到 TAIL 的顶部，直到 HEAD 的一个顶部点 w 使得 $d(w) > 0$. 这是算法仅有的消耗不必要的时间的部分. 因为在这个反向的追踪过程中，必须检查 HEAD 的每个顶部点 x 是否有 $d(x) = 0$ 或 $d(x) > 0$，并且如果必须首先搜索 $d(x)$，这可能花费时间 (因为 G 是简单的，$d(x) = |L(x)|$). 但是如果分别给 x 和 $L(x)$ 一个合适的储存，则可立即达得到 $d(x)$，以便于执行比较 $d(x) = 0$ 或 $d(x) \neq 0$. 在上面 $d(w) > 0$ 的 w，T_i' 的追踪开始和结束. 然后把 w 放在 TAIL 的顶部 …… 因此，在任意给定的时刻，TAIL 也至多含 q 个对象. 最后，一个欧拉迹 T 是用相反的次序读进 TAIL 的 ("相反" 是指算法第一次用该边时导出的定向). 这样在 TAIL 中，从顶部到底部读 T，这条欧拉迹表现为一条序列，它的定向与构造对应的 T_i 时由通过的边给出的定向是一致的. 这个事实能用来修正关于有向图的算法 10.4′，把它留作练习.

综合上述关于算法 10.4′ 的讨论，我们能说考虑每条边不多于三次：第一次是在产生含 e 的对应的子迹 T_i；第二次在反向追踪程序中搜索具有 $d(w) > 0$ 的 w (如果这样的 w 存在)；第三次是在 TAIL 中从顶到底读取 T. 此外，赫拉兹算法的第 3 步，即对 T_i 和 T_i' 应用 κ- 吸收得到 T_{i+1}，不需要任何特殊的努力，这是因为这个 κ- 吸收隐含在反向追踪的程序中，并且以 T 的一些节 (段) 的方式堆在 TAIL 中. 事实上，这个分析说明了算法 10.4′ 是线性的，进而埃得蒙斯–约翰逊的文章 [EDMO73a] 研究了与*迷宫–搜索算法*相结合的*下一点算法*，在内容上，它与赫拉兹算法基本上是一致的. 这对于在那篇文章中建立的*终止–配对算法*同样是成立的. 注意迷宫–搜索算法的一个推广在下一节中研究.

然而，算法 10.4′ 只是对简单图表述的 (由前面的脚注，这是不失一般性的). 如果不用细分图又要避免这个约束，则可用关联表代替邻接表来修改算法 10.4′，把它留作练习.

我们顺便提醒，在 [SYSL77a, p12] 中的黄堆 (Hoang Thuy) 算法能看成赫拉兹算法的特殊情况，它首先构造圈 C_i 代替子迹 T_i，并且相继应用 κ- 吸收以便形成一条欧拉迹. 显然，因为它用圈代替子迹，这个算法不像算法 10.4′ 那样快.

塔克 (A. Tucker) 提出了构造欧拉迹的另一个算法 [TUCK76a]. 它能看成分裂算法和赫拉兹算法的结合 (或者说，处于埃得蒙斯–约翰逊的终止–配对算法与黄堆

算法之间). 这个思想是，首先通过对任意的 $v \in V(G)$ 任意配对 E_v^* 的元素以产生连通欧拉图 G 的一个迹分解 $S = \{T_1, \cdots, T_k; k \geqslant 1\}$，然后通过对 G 有一个公共顶点，并由 S 的子集导出的连通子图对使用一系列 κ- 吸收产生一条欧拉迹.

算法 10.5 塔克算法.

第 1 步 给定一个连通欧拉图 G，只要可能，就分裂邻接半边对形成 2- 正则分拆图 G_1. 用与 G 中对应的顶点相同的符号标记 G_1 的顶点. 令 $i = 1$，并设 c_i 表示 G_i 的分支数.

第 2 步 如果 $c_i = 1$，令 $T_i = G_i$，转到第 4 步.

如果 $c_i \neq 1$，找 G_i 的两个分支 T_i 和 T_i'，使得 $v_{i+1} \in V(T_i) \cap V(T_i')$ 存在. 通过在 v_{i+1} 对 T_i 和 T_i' 应用 κ- 吸收形成一条闭迹 T_{i+1}.

第 3 步 将 T_{i+1} 看成一个图，定义 $G_{i+1} = (G_i - (T_i \cup T_i')) \cup T_{i+1}$. 令 $i = i+1$，并转到第 2 步.

第 4 步 T_i 是 G 的一条欧拉迹.

应该注意到，一旦 c_1 确定，则确定 $c_i(i > 1)$ 不需要费力，因为由第 2 步和第 3 步中 G_{i+1} 的定义，得到 $c_{i+1} = c_i - 1$. G_1 也能立即被构造，并且在 $c_{i+1} \neq 1$ 的情况，只需要保留第 3 步中构造的 T_{i+1}，及找一个 T_{i+1}'，使得 v_{i+2} 存在. 然而，搜索 v_{i+2} 能够再一次用指针避免，在构造 G_1 的过程中能很容易地安放这些指针. 这样算法 10.5 也是线性的. 把详细论证和用类似由算法 10.4 推导算法 10.4′ 的方法给出算法 10.5 的一个更形式的描述留作练习.

我们顺便指出，[ABRA67a]中有一个黄堆算法的特殊版本. 它从 K_p 的一个含 $\frac{p-1}{2}$ 个哈密顿圈的分解出发，在 K_p 中构造欧拉迹，其中 p 是素数. 但是从赫拉兹算法开始，所有这些算法在构造欧拉迹方面有以下公共的基本思想，即

给出连通欧拉图 G 的一个迹分解 S，并且考虑交图 $I(S)$ 的一个支撑树 B，能够通过一组 κ- 吸收从 S 构造 G 的一条欧拉迹，这些 κ- 吸收中的每一个均对应于 B 的一条边，并且反之亦然. (TE)

作为 [AWER84a, 主要定理] 本质的结论 (TE) 是本书提出的并行算法的基础. 这个算法需要 q 个处理机，用并行连通算法，执行时间为 $O(\log(q))$. 这个算法的表述以及关于它的评论，都来自于引文.

算法 10.6 设 D 是弱连通的简单欧拉有向图.

第 1 步 对每个 $a^- \in A_v^-$ 选一个 $a^+ \in A_v^+$ $(v \in V(D))$，使得如果 $a_1^- \neq a_2^-$，则 $a_1^+ \neq a_2^+$，用此方式产生 D 的一个迹分解 S.

第 2 步 通过指定每个 $a \in A(D)$ 所属的 $T_i \in S$，描述 S 的元素.

第 3 步 确定如下定义的图 G_κ 的一个支撑树 B: $V(G_\kappa) = S$，对每个 $a, b \in A_v^+$，$v \in V(D)$，如果 $a \in V(T_i)$，$b \in V(T_j)$，引进一条形如 $T_iT_j \in E(G_\kappa)$ 的边，其

中 $T_i, T_j \in S$，可能有 $T_i = T_j$.

第 4 步　对每个 $e \in E(B)$ 执行对应于 e 的 κ- 吸收.

在实施算法 10.6 中，D 由列出所有 $v \in V(D)$ 的 A_v^+ 和 A_v^- 给出，进而使用 $q = q_D$ 处理机，对每个 $a \in A(D)$ 指派一个处理机，它执行与 a 有关的运算. 设 $L_v^+ = (a_1^+, \cdots, a_k^+)$ 和 $L_v^- = (a_1^-, \cdots, a_k^-)$ 分别表示对应 A_v^+ 和 A_v^- 的表，其中 $k = \mathrm{od}(v) = \mathrm{id}(v)$. 在执行第 1 步中，定义 $t_i(v) = \{a_i^+, a_i^-\}$ $(i = 1, \cdots, k)$. 对所有的 $v \in V(D)$ 和 A_v^+ 的所有元素能同时完成，这是因为有 q 个处理机可用. 因此，第 1 步的执行时间为常量. 于是可以得到用上面的 $t_i(v)$ 定义的迹分解 S 的一个转移系统 X_S. 在执行第 2 步的过程中，首先产生一个辅助图 G，定义为

$$V(G) = A(D), a_1a_2 \in E(G) \leftrightarrow \{a_1, a_2\} \in X_S,$$

从而 G 的分支与 S 的元素一一对应 (练习 10.8). 这样，应用 $O(\log(q))$ 执行时间的并行连通算法，对每个 $a \in A(D)$ 就知道对应的满足 $a \in T_i$ 的 $T_i \in S$.

然而，在执行第 3 步时，因为 $O(q_{G_\kappa})$ 能和 $O(p_D^3)$ 一样大，所以当处理整个 G_κ 时，可能产生困难. 另一方面，因为我们只需要 G_κ 的一个支撑树，所以只要处理 G_κ 的一个边数 $\tilde{q}$ 较小的连通子图 $\tilde{G}$ 就够了，其中 $\tilde{q} = |E(\tilde{G})|$. 我们首先注意对转移 $t_i(v), t_j(v) \in X_S(v)$，以如下方式定义的一组新的在 v 的转移 $X^*(v)$:

$$X^*(v) = (X_S(v) - \{t_i(v), t_j(v)\}) \cup \{\{a_i^+, a_j^-\}, \{a_j^+, a_i^-\}\},$$

对应于一个 κ- 吸收当且仅当对 $T_\ell \supseteq t_i(v)$ 和 $T_m \supseteq t_j(v)$，$T_\ell T_m \in S$ 有 $l \neq m$. 换言之，G_κ 的环恰好是那些对应于 κ- 分拆的边. 现在定义

$$\tilde{G} = \left\langle \bigcup_{v \in V(G)} \{T_jT_\ell \in E(G_\kappa) \mid t_i(v) \subseteq T_j, t_{i+1}(v) \subseteq T_\ell,\ i \in \{1, \cdots, \mathrm{od}(v) - 1\}\} \right\rangle.$$

把证明 $\tilde{G}$ 是 G_κ 的一个连通支撑子图留作练习 (G_κ 的连通性从 D 的强连通性可得). 现在 $\tilde{q} = \sum\limits_{v \in V(D)} (\mathrm{od}(v) - 1) = q_D - p_D$. 借助于并行连通算法，则能用 $O(\log(\tilde{q}))$ 时间找出支撑树 $B \subset \tilde{G} \subseteq G_\kappa$. 最后，因为在第 4 步，$D$ 的每条弧至多涉及转移的两个变化，于是第 4 步的执行时间为常量，即如果 $t_{i_1}(v), \cdots, t_{i_r}(v)$ $(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant \mathrm{od}(v))$ 涉及定义 B 的边的转移，则 $t'_{i_j}(v) = \{a_{i_j}^+, a_{i_{j+1}}^-\}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ (令 $r + 1 = 1$) 是对应于在 v 的一系列 κ- 吸收的转移 (在 v 的其他转移保持不变). 因此，第 4 步能在每个 $v \in V(D)$ 同时执行. 把这一结论的详细证明和说明如何执行第 4 步产生 D 的一条欧拉迹留作练习.

算法 10.6 能推广到图 G，作法如下，首先用对数并行时间找 G 的一个欧拉定向 D_G，然后对 D_G 应用算法 10.6 (见 [AWER84a, 4.0 和 4.1]).

为了得到产生一个连通欧拉图的所有欧拉迹的算法，我们使用分裂算法. 当然，由于欧拉迹的数目 $N_E := |\mathcal{T}(G)|$ 是指数增长的 (见命题 9.45)，我们不能期望得到一个快的算法. 无论如何，回忆对一个图 H，$H_{1,j}$ 表示从 H 通过在 v 分裂 e_1 和 e_j 所得的图，$j = 2, \cdots, d(v)$.

算法 10.7 所有迹算法. 设 D 是无环连通的欧拉图.

第 1 步 令 $\mathcal{T}_E = \{G\}$.

第 2 步 如果不存在 $H \in \mathcal{T}_E$，使得 $\Delta(H) \neq 2$，转到第 6 步；否则，在 H 中选 v 具有 $d(v) \neq 2$. 设 $e_1, \cdots, e_{2k}$ 是与 v 关联的边，对 $j = 2, \cdots, 2k = d(v)$，形成 $H_{1,j}$.

第 3 步 设 j_0 是最小的 j (如果存在)，使得 $H_{1,j}$ 是不连通的. 如果不存在这样的 j，定义 $M(H) = \{H_{1,j} \mid j = 2, \cdots, 2k\}$，并且转到第 5 步.

第 4 步 定义 $M(H) = \{H_{1,j} \mid j = 2, \cdots, 2k; j \neq j_0\}$.

第 5 步 令 $\mathcal{T}_E = \mathcal{T}_E \cup M(H) - \{H\}$，转到第 2 步.

第 6 步 $\mathcal{T}_E$ 是 G 的所有欧拉迹的集合.

为了保证在第 2 步不需要搜索程序，只要注意如果一个 $H_{1,j}$ 是圈，则所有允许的 $H_{1,j}$ (即两个) 也是圈 (在这种情况下，第 3 步中所定义的 j_0 存在). 在这种情况下，将这两个 $H_{1,j}$ 放在表示 $\mathcal{T}_E$ (见第 5 步) 的表的最后. 检验 $H_{1,j}$ 是否是一个圈，通过与 H 联系的参数 $\sigma(H) = \Sigma(d_H(v) - 2) = 2(q_H - p_H)$ 是容易执行的，其中和取遍所有的 $v \in V(H) - V_2(H)$，从而 $\sigma(H_{1,j}) = \sigma(H) - 2$. 此外，如果 $H = H_{1,j}$ 不是圈，那么用类似于算法 10.4′ 的方法借助于指针能瞬间选取 $v \in V(H) - V_2(H)$. 这样，或者 $\mathcal{T}_E$ 的第一个元素有一个顶点不是 2 次的，或者 $\mathcal{T}_E$ 是 G 的所有欧拉迹的集合 (第 6 步). 于是消耗时间只是第 3 步. 尽管应用分裂引理于欧拉图告诉我们，如果 j_0 存在，对 $j \neq j_0$，$H_{1,j}$ 是连通的，但是如果这样的 $H_{1,j}$ 真的存在，我们却不知道对哪些 j，$H_{1,j}$ 是不连通的. 然而，借助于并行处理构造图 $H_{1,j}$ 和检验它是否连通能够同时进行，这样第 2 步和第 3 步能用 $O(\log(q))$ 时间执行 (见算法 10.6 第 3 步的讨论). 于是关于算法执行时间的仅有的决定因素是 $\mathcal{T}_E^0 = \mathcal{T}_E - \{H \in \mathcal{T}_E \mid \Delta(H) = 2\}$ 的规模. 下面我们讨论集合 $\mathcal{T}_E$.

实际上，最后得到的集合 $\mathcal{T}_E$ (严格地说) 不是欧拉迹的集合，它只是 G 的所有连通 2- 正则分拆的集合. 但是重要的是对 $H, H' \in \mathcal{T}_E$，G 的导出的转移系统 $X_H \neq X_{H'}$，即不仅通过这样一个 2- 正则 H 描绘了 G 的一条欧拉迹，而且由于定义 7.1 和最后集合 $\mathcal{T}_E$ 的构造，我们有 $|\mathcal{T}_E| = |\mathcal{T}(G)|$. 因此，如果我们通过这两个 2- 正则图 $H_{1,j} \in M(H)$，并且在第 5 步中把对应的序列加到 $\mathcal{T}_E$ 中代替在第 4 步中所定义的 $M(H)$，算法 10.7 可以得到它所承诺的结果. 因为 2- 正则图 $H_{1,j}$ 被放在 $\mathcal{T}_E$ 的表的最后 (见上文)，当反复使用第 2 步时，这些序列就可以构造出来. 为了降低 $\mathcal{T}_E$ 的规模，可引进另一个集合 $\mathcal{S}_T$，把产生的 $\mathcal{T}_E$ 的 2- 正则元素一步步

加到 $\mathcal{S}_T$ 中，这最终导致了 $|\mathcal{T}_E|$ 的减少而 $|\mathcal{S}_T|$ 增加. 为了避免 $|\mathcal{S}_T|$ 的增加，$\mathcal{S}_T$ 可作为实际描绘对应于 2- 正则 $H_{1,j} \in \mathcal{T}_E$ 的欧拉迹，然后把它打印出来. 尽管用了这个修正，$\mathcal{T}_E$ 仍可能指数地增长 (见第 2 步)，这与分裂运算被执行的各种顶点 $v \in V(H) - V_2(H)$ 的选择有关. 进一步分析说明，增长集合 $\mathcal{T}_E$ (只要第 2 步的第二部分被执行) 在任意阶段可解释为 G 的欧拉迹集合 $\mathcal{T}(G)$ 的一个划分，即如果我们用 X^H 表示由第 2 步中执行的各种分裂运算和由 G 产生 H 而引起的转移的集合，则 H 对应于满足 $X^H \subseteq X_T$ 的所有欧拉迹的集合 $\mathcal{T}(G, X^H) \subseteq \mathcal{T}(G)$. 因此，$M(H)$ 对应于 $\mathcal{T}(G, X^H)$ 的一个划分. 总之，由算法 10.7 产生的集合 $\mathcal{T}_E$ 的序列对应由 $\mathcal{T}(G)$ 的子集的包含关系产生的偏序 $\mathcal{O}$，其极小元素为 $\mathcal{T}(G)$，极大元素为 $\{T\}$ $(T \in \mathcal{T}(G))$，并且其中 $\mathcal{T}(G, X^H)$ 紧前于 $\mathcal{T}(G, X^{H'})$ 当且仅当 $X^H \subset X^{H'}$，并且 $|X^{H'} - X^H| = 1$.

用这种结构观点，人们能修正第 2 步中 $v \in V(H) - V_2(H)$ 的选择，使之减少 $\mathcal{T}_E^0$ 的增长，即选择一个初始点 v_0，并且像在分裂算法或弗莱瑞算法中那样构造 T_{i+1}，而且也根据算法 10.7 的第 2 步，在每一个到达的顶点构造附加的 $H_{1,j}$，并且也执行这个算法的第 3~5 步. 若 T_{i+1} 的构造停止，即 $T_{i+1} = T \in \mathcal{T}(G)$，则算法 10.7 的第 5 步中相应的集合 $\mathcal{T}_E'$ 含 2- 正则图 T 和所有的 H'，根据这个算法的第 2,3 步，这些 H' 紧接构造 T 中产生的任意 H. 用上面讨论的偏序 $\mathcal{O}$ 的术语，这意味着对应于 $\mathcal{T}_E'$ 的偏序 $\mathcal{O}'$ 是由对应于 (最后的)$\mathcal{T}_E$ 的偏序 $\mathcal{O}$ 导出的. 注意 $\mathcal{O}$ 的结构蕴涵着哈塞 (Hasse) 图 $D(\mathcal{O})$ 是一个根在 $\mathcal{T}(G)$ 的出树，从而 $D(\mathcal{O}') \subset D(\mathcal{O})$ 也是一个根在 $\mathcal{T}(G)$ 的出树，并且 $D(\mathcal{O})$ 的属于 $D(\mathcal{O}')$ 的 (两个) 汇之一是 $\{T\}$. 此外，连接 $\mathcal{T}(G)$ 到 $\{T\}$ 的一条路 $P := P(\mathcal{T}(G), \{T\}) \subset D(\mathcal{O}')$ 是 $D(\mathcal{O}')$ 中的一条控制路，并且如果 $\mathcal{T}(G, X^{H'}) \in V(D(\mathcal{O}))$ 在 $D(\mathcal{O})$ 中邻接于一个 $\mathcal{T}(G, X^H) \in V(P)$，则 $\mathcal{T}(G, X^{H'}) \in V(D(\mathcal{O}'))$. 这就分别完全刻画了 $D(\mathcal{O}')$ 和 $\mathcal{O}'$，并且对 $2k_i = d(v_i) =: d_i$ $(v_i \in V(G)$，$i = 1, \cdots, p)$，证明了

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{T}_E'| &\leqslant \sum_{i=1}^{p}((d_i - 2) + (d_i - 4) + \cdots + 2) + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{p} 2((k_i - 1) + (k_i - 2) + \cdots + 1) + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{p}(k_i^2 - k_i) + 1 = \sum_{i=1}^{p}(k_i^2) - q + 1, \qquad (*)
\end{aligned}
$$

即 $\mathcal{T}_E'$ 是具有多项式规模的.

注意 $D(\mathcal{O})$ 的属于 $D(\mathcal{O}')$ 的另一个汇 $\{T\}'$ 也表示 G 的一条欧拉迹. 我们现在能沿 P 反向追踪，在 $\mathcal{T}(G, X^{H''}) \in V(P)$ 分叉，其中 $d(\mathcal{T}(G, X^{H''}), \{T\}) = 2$ (d 表示在 $D(\mathcal{O})$ 中的距离函数). 这相当于首先形成 $\mathcal{T}_E'' = \mathcal{T}_E' - \{T, T', H_0\}$，其中

$(\mathcal{T}(G,X^{H_0}),\{T\})\in A(P)$，然后考虑在 $D(\mathcal{O}')-\{\{T\},\{T'\},\mathcal{T}(G,X^{H_0})\}$ 中极小长度的路 $P'=P(\mathcal{T}(G),\mathcal{T}(G,X^{H_1}))\supset P(\mathcal{T}(G),\mathcal{T}(G,X^{H''}))$，并且用 $D(\mathcal{O})$ 中两个可能的弧之一扩充 P' (注意 $|V(H_1)-V_2(H_1)|=1$ 和 $\Delta(H_1)=4$，并且一般地，对任意的 $T_1,T_2\in\mathcal{T}(G)$，$d(\mathcal{T}(G),\{T\})=d(\mathcal{T}(G),\{T_2\})=q-p$). 因此，为了得到 $\mathcal{T}_E'''$，首先用 H_1，然后用 $\mathcal{T}(G)$ 的两个元素扩充 $\mathcal{T}_E''$，其中 $|\mathcal{T}_E'''|=|\mathcal{T}_E'|$. 重复这个反向追踪程序直到 $\mathcal{T}(G)$ 的所有那些包含起初构造的 T 的第一个转移 t_1 的元素被生成；这个转移对应于 $P(\mathcal{T}(G),\{T\})$ 的第一条弧. 现在只需要继续在 $D(\mathcal{O}-\mathcal{O}')$ 上构造欧拉迹 T^*，其起点在 v_0 且第一个转移 $t_1^*\neq t_1\cdots\cdots$ 因此，从 (*) 我们可以得出，在任一阶段只考虑至多 $\sum\limits_{i=1}^{p}k_i^2-q+1$ 个图的集合，进而能够在两方面使用并行处理：第一是在产生各欧拉迹 T 连同于偏序 $\mathcal{O}'$，第二是导出各集合 $\mathcal{T}_E'''$ 的反向追踪程序 (见上文).

根据算法 10.7 建立一个新的求所有欧拉迹的算法并对它们进行讨论，把它留作练习.

10.2 圈分解算法

注意到如果 $q\neq 0$，则每个欧拉图 G 有一个非平凡的圈 C，并且 $G-C$ 也是欧拉的，因此，可得到下面对于任意简单欧拉图的圈分解算法.

算法 10.8 设 G 是简单欧拉图. 令 $S=\varnothing$ 和 $H=G-V_0(G)$. 假设 G 作为邻接表 $L(v)(v\in V(G))$ 的集合给定，并且如在算法 10.4′ 中一样用指针.

第 1 步 如果 $q_H=0$，转到第 3 步，否则，设 $v_0\in V(H)$ 是任意选定的点，并且构造一条起点在 v_0 终点在 w 的迹 T_0，其中 w 是第一个第二次到达的顶点，$T_0=v_0,\cdots,w,T_w,w$ (可能 $v_0\doteq w$). 令 $C=w,T_w,w$.

第 2 步 令 $S=S\cup\{C\}$，$H=H-C$，$q_H=q_H-\ell(C)$. 转到第 1 步.

第 3 步 S 是 G 的一个圈分解.

当然，总的来说，算法的执行时间依赖于 T_0 中路 $v_0,\cdots,w$ 的长度和第 1 步中构造的圈的长度，进而为了简化算法的表述，C 是用顶点和边的交错序列代替仅是边的序列来表示的.

对有向图改写算法 10.8，只需要调整邻接表和指针. 至于对混合图 H 采用这个算法，能够产生 H 的一个欧拉定向 D_H (如果这样的 D_H 存在)，然后对 D_H 应用算法 10.8 调整后的形式.

用在算法 10.5 中同样的基本思想能够导出另一种算法，即从欧拉图 G 的任意迹分解 S 开始，执行 κ- 分拆直到 (新的迹分解) S 的每一个元素仅包含不同的顶点为止. 把给出这个算法的细节和它的修正形式留作练习.

下面我们提出一个基于定理 4.1，并且能看成算法 10.8 的特殊化的一个算法. 开始是构造连通欧拉图 G 的一条欧拉迹 T，通过遍历 T，以删去 T 的一些段，在 "剥掉" 一个圈后再 "剥掉" 圈 C，并且使 T 剩下的部分构成 $G-C$ 的一条欧拉迹.

算法 10.9　迹–一致算法.

第 0 步　设 T 是连通欧拉图 G 的一条在 $v_0 \in V(G)$ 起始并终止于此的欧拉迹. 令 $S=\{\varnothing\}$.

第 1 步　如果 $\Delta(G)=0$，转到第 3 步；否则，从 v_0 出发遍历 T，设 w 是第一个第二次到达的顶点，并且起始和终止均在 w 的这段 C 上，任意其他一个顶点至多出现一次.

第 2 步　令 $G=G-C$，$S=S\cup\{C\}$，$T=T-C$ (对于 $T=v_0,\cdots,e_{w,1},C,e_{w,2},\cdots,v_0$ 有 $T-C=v_0,\cdots,e_{w,1},w,e_{w,2},\cdots,v_0$). 转到第 1 步.

第 3 步　$S\cup\{T\}$ 是 G 的一个圈分解.

我们注意到在第 1 步中构造的 C 借助于指针至多 q 步可以找到 (一步是通过一条边). 因为 $T-C$ 是 $G-C$ 的欧拉迹，并且构造 T 至多需要 $O(q)$ 时间 (见上文)，所以算法 10.9 的执行时间至多是 $O(q^2)$. 然而，可以把构造 T 和 "剥掉" 圈的程序结合起改进算法的执行时间 (练习 10.13). 通过只把 "剥掉" 圈的程序和基于穿过边而不是给定转移系统的构造迹分解的方法结合起来，得到的较快的算法可看成算法 10.8 的修正. 我们也注意到一旦选 v_0 为通过 T 的起点，算法 10.9 产生唯一的 S，选另一个起点 v_0' 可以产生一个圈分解 $S'\neq S$. 在算法 10.9 第 1 步中所描述的 w 的选择对于找 T 和一段 C，使得 C 是圈且 $T-C$ 是 $G-C$ 的一条欧拉迹是非本质的，因为我们可以任取 C，只要 C 的真子段不是 T 的段. 即能用许多方法 "剥掉"C，使得 $T-C$ 是 $G-C$ 的欧拉迹. 因此，这个 "剥掉" 程序作为构造圈分解的一般方法，将多个圈分解联系到一条欧拉迹. 把这个观察应用于**撒比达斯相容性猜想** (给定没有 2 次顶点的连通欧拉图 G 的一条欧拉迹 T，存在一个圈分解 S，使得 $X_T\cap X_S=\varnothing$) 产生了解决这个猜想的一个途径，即从一个与 T 相容的欧拉迹 T' "剥掉" 一些圈子，得到与 T 相容 (但是不与 T' 相容) 的一个圈分解 S'. 如果上面的猜想成立，这样的 T 存在，这将在处理相容性问题中证明. 与 T 相容的欧拉迹 T' 的存在性已得到肯定 (推论 6.5)，注意不是每个与 T 相容的 T' 都产生与 T 相容的 S' (这里可以如上面描述得到 S'). 我们以例子说明，当一个与 T 相容的圈分解 S 存在时，没有完全不相交圈的子集 S_0 有如下性质：在 $G-\bigcup_{C\in S_0}E(C)$ 中用 T 导出的转移系统确定这个图的一条欧拉迹. 因此，除非推广**撒比达斯猜想**，否则借助与 T 相容的 T' 的 "迂回"(几乎) 是不可避免的.

我们简短地描绘构造一个欧拉图 G 的所有圈分解集合 $\mathcal{S}(G)$ 的一个算法来结束

本节 [LING82a]. 首先，假定 G 的边标号为 $e_1,\cdots,e_q$，选任意的 $e\in E(G)$，$e=e_{i_1}$. 第一个子程序按字典序 (对边标号而言) 产生所有含 e 的圈集 $\mathcal{C}(e)$，第二个子程序对 $C_i\in\mathcal{C}(e)$ 产生 G 的含 C_i 为公共元的所有圈分解的集合 $\mathcal{S}_i$. 这可通过确定 $\mathcal{S}(G-C_i)$ 和形成

$$\mathcal{S}_i=\{\{C_i\}\cup S_{C_i}\mid S_{C_i}\in\mathcal{S}(G-C_i)\}$$

而达到. 注意 $\mathcal{S}_i\cap\mathcal{S}_j=\varnothing$ ($i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant|\mathcal{C}(e)|=\gamma_e$)，从而有

$$\mathcal{S}(G)=\bigcup_{i=1}^{\gamma_e}\mathcal{S}_i.$$

不幸的是，[LING82a] 不含有复杂性的研究，看起来主要问题是类似于命题 9.45 的对 $|\mathcal{S}(G)|$ 的估计似乎不知道. 注意对每个块是圈的连通图，我们有 $|\mathcal{S}(G)|=1$，同时 $|\mathcal{T}(G)|$ 能任意大. 另一方面，由上面的算法的实际结构，它是一个好的例子，其中并行处理可以从本质上缩短执行时间. 对于 2- 连通 2k- 正则无环简单图估计数 $\min\{\gamma(e)\mid e\in E(G)\}$ 也许是一个有价值的研究问题.

10.3 迷　宫

迷宫和曲径的历史及第一个逃出算法的建立至少和希腊神话本身一样古老. 像故事中所说的，提修斯 (Theseus)①用阿雷顿 (Ariadne) 给他的一根线跟踪曲径中“吃人”的怪兽，并且杀死它之后又找到了出来的路②.

当然，迷宫 (曲径) 可以用不同的方法定义. 例如，在 “实际生活” 中的陵墓，在数学上既可作为欧几里得平面中的单位正方形 (见 [SEND72a, DÖPP71a])，也可作为其他的几何构型. 可是为了我们的目的，一个迷宫是一个图 G (有向图 D, 混合图 H)，它有一条覆盖途径 W. 这样，G (D,H) 必须是 (强) 连通的. 事实上，**迷宫搜索问题** 能够用下面的方法系统地阐述 (除非另外说明，否则，此后只限于图)：

> *描述一个一般算法，它构造一个连通图的一条闭覆盖途径 W，使得在构造 W 的过程中，这个算法只能运用在 W 到达的顶点上的有效局部信息.*
>
> (MSP)

也就是说，如果我们双倍 G 的边，在新图 $\tilde{G}$ 中构造一条欧拉迹 T，使得 T 对应于 G 中的一条双迹 W，则分裂算法和弗莱瑞算法应用于 $\tilde{G}$ 都是不合适的. 这是因为它们都需要确定导出图是否连通 (这是只对 G 有效的整体信息). 然而，像我

---

① 最早的超人之一.

② 对于最早的各种迷宫的说明见 [LUCA82a, p41～55]，它也含有特雷马斯 (Trémaux) 的算法 (见算法 10.11). 对于迷宫的另一些参考文献见 [ROSS82a, p789]，它详细讨论了法国塞思特–昆廷 (Saint-Quentin) 的曲径. [KÖNI36a, p35] 含有几篇将迷宫当成数学娱乐问题的文献.

们在下面将看到的，赫拉兹算法确实能够看成解 (MSP) 的关键之一，另一个关键是定理 6.33.

有三种经典算法，它们分别归功于维纳、特雷马克斯和塔里. 它们随着可用的局部信息的不同而不同，我们遵循 [KÖNI36a] 来表示它们. 但是在这里，这些算法只是用描述方式给出.

算法 10.10 维纳算法①. 这个算法基于提修斯用阿雷顿的线的途径. 因此，操作方法如下：

假设 在途径 W 到达的顶点 $v \in V(G)$，集 $E_v \cap E(W)$ 已知 (W 算法表出达到 v 的途径)，进而假设能找到 W^{-1} (这对应于使用阿雷顿的线)②.

第 0 步 令 $i = 0$ 且选 $v_0 \in V(G)$. 令 $W = v_0$.

第 1 步 在 $v_i \in V(G)$ 开始的途径沿着任意边 $e_i \in E_{v_i} - E(W)$③. 令 $W = W, e_i, v_{i+1}$ ($e_i \in E_{v_{i+1}}$). 令 $i = i + 1$.

第 2 步 假设 $W = v_0, e_0, \cdots, e_{i-1}, v_i$ 已被构造. 如果 v_i 不是悬挂点且 $v_h \neq v_i$ ($0 \leqslant h < i$)③，转到第 1 步；否则，转到第 3 步.

第 3 步 考虑满足 $E_{v_j} - E(W) \neq \varnothing$ 的极大 $j < i$④. 如果 j 不存在，令 $W = W, W^{-1}$，并转到第 5 步.

第 4 步 定义 $e_{i+k-1} := e_{i-k}$ 和 $v_{i+k} := v_{i-k}$ ($k = 1, \cdots, i-j$). 令 $W = W, e_i, \cdots, e_{2i-j-1}, v_{2i-j}$. 令 $i = 2i - j$，并转到第 1 步.

第 5 步 W 是 G 的闭覆盖途径.

为了看出算法结束时得到 G 的一条闭覆盖途径，我们考虑 $G_1 := \langle E(W) \rangle_G$，其中 W 是算法构造的最后途径. 如果 $E(G_1) \neq E(G)$，则 G 的连通性蕴涵对一个 i 有 $E_{v_i} - E(W) \neq \varnothing$. 选取具有这种性质的最大的 $j = i$，从第 2 步和第 3 步得第 1 步能再一次被执行 (或直接或间接地经第 4 步，这取决于 v_j 在 W 中的位置和它以前是否被 W 到达过). 这样 $G_1 = G$ 必定成立，即 W 是 G 的一条覆盖途径. 现在假定 W 不是闭途径，从而 W 通过 G 的所有边至少一次后 $v_i \neq v_0$ 被 W 达到，即在第 3 步中反向追踪 W 说明了对每个 $v \in V(G)$，有 $E_v - E(W) = \varnothing$，但是这样第 3 步中 $W = W, W^{-1}$ 的定义产生了 G 的一条闭覆盖途径. 于是这个算法得到

---

① 根据柯尼希的观点，维纳是第一个用数学观点处理迷宫的人. 根据历史记载，我们也注意到维纳的文章 [WIEN73a] 是在赫拉兹的工作出版前不久. 这是根据赫拉兹的演讲. 维纳在赫拉兹去世后整理并提交 (见 [FLEI90d,p.II.20]).

② 为了找 W^{-1}，可以只标 W 中的半边如下：如果 $e \in E_x \cap E_y$ 是在 W 中通过的第 i 条边，并且是从 x 到 y 通过，则用 i 标 $e(x)$，并用 i' 标 $e(y)$，这样隐含着给 e 指派了一个定向 (并且在一定程度上，这是维纳最初描述他的算法时所用的方式，即 "因此，人们标记所通过的路包括所通过的方向"). 然而，这种标记半边的方法产生了比阿雷顿线更局部的信息. 如果考察下面特雷马克斯和塔里的算法中的局部信息，这一点变得更清楚.

③ 给出假设的第一部分，这是可以确定的.

④ 借助于假设的第二部分，然后借助于它的第一部分能够确定 j.

了一条闭覆盖途径.

然而，维纳算法不是很有效的. 因为最终的 W 对边的利用甚至可能多于两次[①]. 事实上，另外的两个算法 (分属于特雷马克斯和塔里，并在下面给出) 比维纳的算法快.

算法 10.11 特雷马克思算法. 这个算法仅用局部信息执行，没有假设 W 由算法构造后，W^{-1} 也知道.

假设 在构造途径 W 期间达到的任意顶点 $v \in V(G)$，对每个 $e \in E_v$ 知数 $\lambda_W(e)$ 已知. 不必知道一个边被通过时的方向[②].

第 0,1,2 步 同算法 10.10 一样[③].

第 3 步 (v_i 是悬挂点或对 $j < i$ 有 $v_i = v_j$) 如果 $\lambda_W(e_{i-1}) > 1$，转到第 4 步. 如果 $\lambda_W(e_{i-1}) = 1$，定义 $e_i := e_{i-1}$，$v_{i+1} := v_{i-1}$，并且令 $W = W, e_i, v_{i+1}$. 令 $i = i+1$，并且转到第 4 步.

第 4 步 如果对每个 $e \in E_{v_i}$，$\lambda_W(e) > 1$，转到第 5 步; 否则，选 $e \in E_{v_i}$，使得 $\lambda_W(e)$ 极小. 定义 $e_i := e$ 和 $v_{i+1} := y$，其中如果 e 是环 $y = v_i$; 否则，$e \in E_y \cap E_{v_i}$. 令 $W = W, e_i, v_{i+1}$ 和 $i = i+1$. 转到第 2 步.

第 5 步 W 是 G 的双有向双迹.

为了看到特雷马克斯算法中最终的 W 是双有向双迹，我们首先注意

W 使用 G 的每条边不多于两次; (*)

这直接从第 4 步可得. 另一方面，第一次执行第 3 步时有 $\lambda_W(e_{i-1}) = 1$. 这样从 (*) 得到最终的 W 是下面的形式:

$$W = \cdots, e_{i-2}, v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, e_i, v_{i+1}, e_{i+1}, \cdots,$$

其中 $v_{i-1} = v_{i+1} =: x$，$e_{i-1} = e_i =: e$. 因此，

$$W_1 = \cdots, e_{i-2}, x, e_{i+1}, \cdots$$

是 $G_1 := G - e$ 中的一条途径. 从第 2~4 步得到 W_1 是 G_1 中最后的途径，而 G_1 是根据特雷马克斯算法构造出来的 (详细论证留作练习). 注意这个算法只要 G 是一个圈或是一条路，都产生一条双有向双迹，并且应用归纳法，我们得出 W_1 是一个双有向双迹. 由上面的构造，W_1 是双有向的当且仅当 W 也是双有向的. 因此，我们可以得出结论: 特雷马克斯算法一般产生 G 的一条双有向双迹.

我们注意到 [TRAC63a] 中提出的特洛奇坦布洛特 (Trachtenbrot) 算法与特雷马克斯算法基本上是相同的. 仅有的不同是一找到怪兽，算法就结束了，即它在提

① 显然，维纳没有用最经济的方法使用赫拉兹的工作. 尽管维纳没有说他的工作受到赫拉兹的影响，但很难相信这一点.

② 这恰好是用阿雷顿线时固有的局部信息.

③ 在第 1 步和第 2 步中用的局部信息能从假设确定. 关于下面的第 3 步和第 4 步同样成立.

修斯事先一无所知的情况下，在一个特殊顶点 $x \neq v_0$ 停止. 也就是说，如果 G 是不连通的，并且 v_0 和 x 分别属于不同的分支 C_1 和 C_2，则特洛奇坦布洛特算法与特雷马克斯算法以同样的方法作用在 $C_1 \supset \{v_0\}$ 上. 我们指出，特雷马克斯和特洛奇坦布洛特算法之间的这种相似性已经在 [ROSS71a] 中讨论了.

算法 10.12 塔里算法. 这个算法也仅用局部信息执行.

假设 在构造途径 W 期间到达的任意顶点 $v \in V(G)$，知道从 v 已经通过的边集 $E^0_{v,W} \subseteq E_v$，进而 v 第一次到达的边 $e_{\text{in}}(v)$ 已知. 对于 W 的起点 v_0，我们令 $\{e_{\text{in}}(v_0)\} = \varnothing$.

第 0 步 令 $i = 0$，并选 $v_0 \in V(G)$. 令 $W = v_0$.

第 1 步 从 $v_i \in V(G)$ 开始，沿任一 $e_i \in \tilde{E}_{v_i} := E_{v_i} - (E^0_{v_i,W} \cup \{e_{\text{in}}(v_i)\})$. 令 $W = W, e_i, v_{i+1}$ $(e_i \in E_{v_{i+1}})$. 令 $i = i + 1$.

第 2 步 假设已构造了 $W = v_0, e_0, \cdots, e_{i-1}, v_i$. 如果 $\tilde{E}_{v_i} \neq \varnothing$，转到第 1 步；否则，转到第 3 步.

第 3 步 如果 $\{e_{\text{in}}(v_i)\} \subseteq E^0_{v_i,W}$，转到第 4 步；否则，令 $e_i = e_{\text{in}}(v_i)$，$W = W, e_i, v_{i+1}$ $(e_i \in E_{v_{i+1}})$ $(i = i + 1)$，转到第 2 步.

第 4 步 W 是 G 的双有向双迹.

为了看出最终的 W 是一条双有向双迹，我们按下面的方法应用定理 6.33 和它的证明技巧: 设 D_G 是 G 的定向，使得对 $e \in E(W)$，$a_e \in A^+_x \cap A^-_y \subset A(D_G)$ 当且仅当 W 从 x 到 y 第一次通过 $e \in E_x \cap E_y$. 而当 $e \notin E(W)$ 时，设 a_e 是 e 的两个可能定向中的一个 (在两种情况下，如果 e 是环，设 a_e 是 e 中两个定向中的一个，这里我们假定以拓扑的观点看待环). 定义强连通欧拉有向图

$$D = D_G \cup D^{\mathrm{R}}_G,$$

并且对最终的 W 考虑

$$\begin{aligned} D_{\text{in}} &:= \langle\{a_e \in A(D_G) \mid e = e_{\text{in}}(v), v \in V(W)\}\rangle , \\ D_W &:= \langle\{a_{e_i} \mid e_i \in E(W)\}\rangle , \\ D_1 &:= \langle\{a^{\mathrm{R}}_e \in A(D^{\mathrm{R}}_G) \mid a_e \in A(D_{\text{in}})\}\rangle = D^{\mathrm{R}}_{\text{in}}, \end{aligned}$$

其中 a_{e_i} 的定向由 W 通过 e_i 的方向确定，并且 $|A(D_W)| = \ell(W)$. 用 T_W 表示 D^{R}_W 用自然方法对应于 W^{-1} 的覆盖迹.

因为第 1 步和第 3 步，对每个 $e \in E(G)$ 有 $\lambda_W(e) \leqslant 2$. 同理，对 $e = e_i = e_j$ $(i \neq j)$，$\lambda_W(e) = 2$ 蕴涵 $\{a_{e_i}, a_{e_j}\} = \{a_e, a^{\mathrm{R}}_e\}$. 这样 $D_W \subseteq D = D^{\mathrm{R}} \supseteq D^{\mathrm{R}}_W$，进而从塔里算法得

W 是一条在每个方向使用每条 $e \in E_{v_0}$ 一次的闭途径. (*)

因此，D_W 和 D^{R}_W 是弱连通的欧拉有向图，并且 $T_W \in \mathcal{T}_{v_0}(D^{\mathrm{R}}_W)$. 我们要说明 $D_W = D$，并且 D_1 是 $D^{\mathrm{R}} = D$ 以 v_0 为根的支撑入树.

由 D_{in} 和 D_1 的定义并因为第 3 步 (其中 $\tilde{E}_{v_i} = \varnothing$，这是因为第 2 步的第二部分)，$D_1$ 是由 T_W 的 "最后的" 弧导出的有向图 (见定理 6.33 的证明)，因此

D_1 是 D_W^{R} 的以 v_0 为根的支撑入树，并且因此 D_{in} 是 D_W 的以 v_0 为根的支撑出树. (**)

因此，只需说明 $D_W^{\mathrm{R}} = D$. 这将蕴涵着 $D_W = D$，这就将 W 分类为 G 的一条双有向双迹.

假设 $D_W^{\mathrm{R}} \neq D$. 因为 $D_W^{\mathrm{R}} \subset D$ 及 D_W^{R} 和 D 都是弱连通的欧拉有向图，从而 $\bar{D} := D - D_W^{\mathrm{R}}$ 是欧拉的并且 $A(\bar{D}) \neq \varnothing$，进而因为 (*) 和 (**)，从而对 $v \in V(D_W) - \{v_0\} = V(D_W^{\mathrm{R}}) - \{v_0\}$ 有 $A_{v,\bar{D}}^- \neq \varnothing$. 在这个 v 的所有可能的选择中，设 v^* 使得 $d_{D_1}(v^*, v_0)$ 最小. 这个选择蕴涵路 $P(v^*, v_0) \subseteq D_1$ 和 $P(v_0, v^*) \subseteq D_{\text{in}}$ 属于 D_W^{R}. 但是这和 $A_{v^*,\bar{D}} \neq \varnothing$ 一起意味着在 G 中有边 $e \in E_{v^*} - \{e_{\text{in}}(v^*)\}$ 还没有被最终覆盖 W 从 v^* 通过，同时 W 关于 $e = e_{\text{in}}(v^*)$ 也如此. 这就违背了塔里算法的第 2 步 (在 W 从 v^* 通过 $e_{\text{in}}(v^*)$ 之前达到 v^* 时，$\tilde{E}_{v^*} \neq \varnothing$). 因此，我们可以得到 $D = D_W^{\mathrm{R}}$. 这样塔里算法的确产生了 G 的一条双有向双迹.

特雷马克斯算法的情况可以应用类似的论述. 因为如果我们删去那些不是悬挂边，但 (最终的)W 会在那里产生一个回缩的边，并且如果我们根据 W 第一次通过的方向定向其余的边，则得到如上面所讨论的塔里算法中同样的有向图 D_{in}. 然而，这并不令人吃惊，因为仔细地分析特雷马克斯算法说明了下面结果的有效性. 它的证明留作练习 (也见 [KÖNI36a, p43，44]).

命题 10.13　如果 W 是由特雷马克斯算法构造的 G 中的最终覆盖途径，则对任意的 $v \in V(G) - \{v_0\}$，W 从 v 通过的最后的边是 W 到达 v 的第一条边 (即用 D_{in} 中的一条弧表示这条边)，即可以认为 W 是用塔里算法构造的.

但是，用塔里算法构造的 W 一般未必能用特雷马克斯算法得到. 因为比较塔里算法的第 1 步和特雷马克斯算法的第 3 步中 $\lambda_W(e_{i-1}) = 1$ 的情形知，塔里算法比特雷马克斯算法有更多的机动性.

用两条不同的线 (如一条红线和一条白线) 修改的维纳算法也会产生一条双有向双迹，即在反向追踪程序中 (维纳算法的第 3 步和第 4 步) 替换阿雷顿的 (白) 线. 对应的段用红线覆盖，并且规定红段必须不再通过. 这样在摆放红线中，人们用与原来摆放白线相反的方向通过边. 因为在第 3 步中 j 的选择，没有边被漏掉. 所有的白线在结束途径时被除去，从而得到一条双有向双迹. 把这个想法应用到欧拉图，并且规定在算法的任一步，只要有可能就应该通过还没有用过的边，这样就得到了赫拉兹算法. 上面用两种类型线的思想能在 [LIEB70a, 2.3.2, 2.3.3] 中找到. 但如果根据维纳的原始思想 (见有关维纳算法假设的脚注)，我们可以不用线操作，但是可以改用定向操作. 下面的算法应用这个思想，并且能看成前面三个算法的结合.

算法 10.14 这个算法根据途径 W 第一次穿过边 e 的方向给每边指派一个定向.

假设 我们同时用特雷马克斯和塔里的假设来操作. 因此，在 W 到达 v 时定义的

$$E_{W,i} := \{e \in E_v \mid \lambda_W(e) = i\}$$

满足 $E^0_{v,W} \cap E_{W,1}$，$E_{W,0}$ 和 $E^{\text{in}}_{v,W} := E_{W,1} - E^0_{v,W}$ 已知，并且 $E^{\text{in}}_{v,W}$ 是进入 v 而不是从 v 出来所通过的边集.

第 0~4 步 如在塔里算法中定义，仅有的不同是在第 1 步中选 e，使得 $\lambda_W(e)$ 极小.

因为在第 1 步中关于 e 的选择的限制没有副作用，因此，塔里算法的可行性保证了算法 10.14 的可行性，即最终的 W 是 G 的一条双有向双迹. 算法 10.14 适用于欧拉图，下面的结果说明了这一点. 根据命题 10.13 和算法 10.14，塔里算法的法则或它们的修正覆盖了所有产生双有向双迹的迷宫搜索算法 (这一点由洛森斯蒂尔 (P. Rosenstiehl) 给我指出).

定理 10.15 设 G 是一个连通欧拉图，并且设 W 是 G 中应用算法 10.14 所产生的一条双有向双迹. 设

$$T = e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_q}$$

是根据 G 的边在 W 中第二次出现的次序列出的 W 的子序列，从而 T 是 G 的一条欧拉迹.

证明 定理的关键在于算法 10.14 第 1 步中 e 的选择及隐含地应用定理 6.33.

我们断言，如果用 $W^{(i)}$ 表示 (最终的)W 由第一次穿过的各边定义的段，则 $\{W^{(i)} \mid i = 1, \cdots, k\}$ 是 G 的迹分解，并且由第一次穿过的每条边 $e \in E(G)$ 定义的 G 的定向 D_G 是欧拉的. 事实上，在 v_0 开始，设 $W^{(1)} \subseteq W$ 是通过 E_{v_0} 的每个元素恰好一次后在 v_0 结束的一段，算法 10.14 第 1 步中 e 的选择不仅保证了 $W^{(1)}$ 是有定义的，而且 $W^{(1)}$ 是一条闭迹 (在 v_0 开始并结束). 此外，由 W 在 $E(W^{(1)})$ 上由第一次通过的各元素导出的定向是由 $W_1 := W^{(1)}$ 在 $G_1 := \langle E(W_1)\rangle$ 导出的定向 D_1，因此，是欧拉的. 因为构造 W 到这个时候，对每个 $e \in E_{v_0}$ 有 $\lambda_{W_1}(e) = 1$，从而从算法 10.14 的第 1 步得到，W 继续从 v_0 按相反方向 (对于 D_1 的方向) 通过 G_1 的边直到它到达 $v^{(1)} \in V(G)$，使得 $E_{W,0} \neq \varnothing$，如果这样的 $E_{W,0}$ 存在. 假设它存在. 设 $T_1 = T(v_0, v^{(1)})$ 表示 W 的这一部分，因为 W 是一条双有向双迹，T_1 是一条迹. 第 1 步中，$e \in \tilde{E}_{v^{(1)}}$ 的选择又一次保证: ① W 追踪了一条在 $v^{(1)}$ 开始并结束的闭迹 $W^{(2)}$; ② 每条边 $f \in E(W^{(2)})$ 是第一次通过的边; ③ 序列 $W_2 := W^{(1)}, T_1, W^{(2)} \subset W$ 含每个 $e \in E_{v^{(1)}}$ 至少一次. 现在 W 在 $G_2 := \langle E(W_2)\rangle$ 中追踪了一条从 $v^{(1)}$ 到 $v^{(2)}$ 的迹 T_2，如果存在这样的 $v^{(2)}$，则 $E_{W,0} \neq \varnothing$. 因为

W 是一条双有向双迹并且 T_2 也是第二次用过的边的序列，因此，在任何情况下，我们有 $E(T_1) \cap E(T_2) = \varnothing$. 注意 T_1 的终点是 T_2 的起点，从而 T_1, T_2 是在 v_0 开始并在 $v^{(2)}$ 结束的一条迹. 一般来说，如果在 $v^{(j-1)}$ 开始并结束的 $W^{(j)}$ $(j \geqslant 2)$ 已经被构造了，则它是一条只含第一次用边的闭迹，使得 W 在 v_0 开始在 $v^{(j-1)}$ 结束的子序列 $W_j := W^{(1)}, T_1, W^{(2)}, T_2, \cdots, T_{j-1}, W^{(j)}$，用 $E_{v^{(j-1)}}$ 的每个元素至少一次. 这样 $\{W^{(1)}, \cdots, W^{(j)}\}$ 是 $G_j := \langle E(W_j) \rangle$ 的一个迹分解，如果 $G_j \subset G$，则 $T_1, T_2, \cdots, T_{j-1}$ 是 G_j 的一条开迹.

然而，如果 $G_j \subset G$，则根据算法 10.14 的第 1~3 步构造的 T_j 将在 $v^{(j)}$ 结束，对于它，$E_{W,0} \neq \varnothing$ (如果这样的 $v^{(j)}$ 存在). 这个事实成立的理由是定理 6.33，它被隐含地使用于算法的定义中. $\langle \{e_{in}(v) \mid v \in V(G)\} \rangle$ 定义了 D_j 的一个以 v_0 为根的出树 B_j，D_j 是由 $W^{(1)}, \cdots, W^{(j)}$ 定义的 (连通图) G_j 的一个定向，并且因为 $W^{(t)}(1 \leqslant t \leqslant j)$ 是闭迹，由构造 (即由第 1 步中 e 的选择) 知，$E(W^{(s)}) \cap E(W^{(t)}) = \varnothing$ $(1 \leqslant s < t \leqslant j)$，故它是欧拉的. 因此，$B_j^{\mathrm{R}}$ 是 D_j^{R} 中以 v_0 为根的入树，并且 $T_1, \cdots, T_{j-1}$ 对应于 D_j^{R} 的一条迹 $T^{(j)}$，由算法第 3 步，$T^{(j)}$ 能扩充为 D_j^{R} 的一条欧拉迹. 如果 $T_1, \cdots, T_{j-1}$ 用 $E_x \subseteq E(G)$ $(x \in V(G_j))$ 的所有边，则最后用的边恰好是 $e_{\mathrm{in}}(x)$，即 $T^{(j)}$ 离开的最后的弧是属于 B_j^{R} 的 x 的出弧.

现在得到如果对 $k \geqslant 1$ 有 $G_k := \langle E(W_k) \rangle = G$，并且 $W_k = W^{(1)}, T_1, W^{(2)}, T_2, \cdots, T_{k-1}, W^{(k)}$，则 $\{W^{(1)}, \cdots, W^{(k)}\}$ 是 G 的一个迹分解，并且 $T_1, \cdots, T_{k-1}$ 是 G 的一条迹，这条迹可通过连续应用算法 10.14 扩充为 G 的一条欧拉迹，即定理中定义的 T 是 G 的一条欧拉迹. 这是需要证明的.

比较算法 10.14 和 [EDMO73a] 中的迷宫–搜索算法可知，后者是前者的特殊情况. 因为含在算法 10.14 假设中的局部信息能从迷宫–搜索算法用的表中得到. 于是在它们应用于欧拉图时，我们注意到迷宫–搜索算法也满足定理 10.15，但是所得到的欧拉迹也许会不同，尽管对应的迹分解是相同的. 迷宫–搜索算法相当于构造 T_j 中的反向追踪程序. 这是由于通过在 $v \in V(G)$ 产生一个第一次用过的边的表，并用它进入 v 而产生一个 $W^j(1 \leqslant j \leqslant k)$ 的转移的隐含储存. 这样迷宫–搜索算法也隐含地产生 $\langle \{e_{\mathrm{in}}(v) \mid v \in V(G_j)\} \rangle$ 和树形图 B_j 以及如前定理证明所定义的 B_j^{R}. 于是这个算法得到的 T 最后一次离开 $v \in V(G)$ 也是沿 $e_{\mathrm{in}}(v)$. 另一方面，如果执行算法 10.14，它将不仅列出 $E_{v,W}^0$ 的元素代替进入边 (除了对 $e_{\mathrm{in}}(v)$)，而且产生更大的自由度来选择产生 $T_j(1 \leqslant j \leqslant k)$ 时的下一个出边. 但是这对于两个算法的复杂性的关系是没有意义的，二者的执行时间都是 $O(q)$. 这两个算法的实际区别在于它们对欧拉图的应用：迷宫–搜索算法以赫拉兹算法作为出发点，而作为算法 10.14 的基础的是定理 6.33. 此外，定理 10.15 一方面说明了特雷马克斯和塔里算法之间的相似，另一方面说明了欧拉迹的算法构造. 这种相似看来至今并未引起注意.

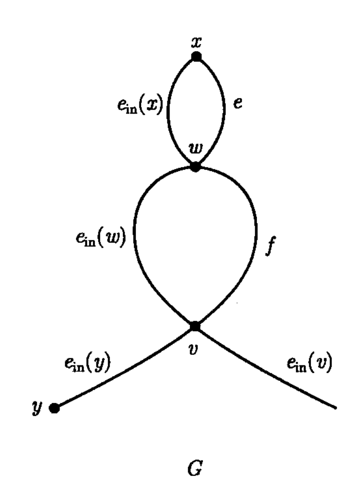


图 10.1 在塔里算法中，根据它们第二次出现列出的边序列可以形如 $T = \cdots, e_{\text{in}}(y), e, e_{\text{in}}(x), f, e_{\text{in}}(w), e_{\text{in}}(v), \cdots$，其中 $e_{\text{in}}(z)$ 是从 z 被通过，$z \in \{v, w, x, y\}$，e 从 w 且 f 从 v 被通过. T 不是 G 的一条欧拉迹

回忆定理 6.33 已经用于说明塔里算法的正确性，并且同样能用于说明特雷马克斯算法 (见命题 10.13 前面的一段) 的正确性. 类似于刚才所描述的相似性也是特雷马克斯和塔里算法固有的. 正是这种使用定理 6.33 的可能性导致了算法 10.4 和定理 10.15，但是如果只依赖于特雷马克斯算法或塔里算法，这个定理将不再成立，即如果对一个欧拉图 G 分别应用这两个算法，根据它们第二次出现于最终的 W 时所列出的边序列不必定义 G 的一条欧拉迹. 对于特雷马克斯算法这是立即可以看到的，只要考察这个算法第 3 步的第二部分即可. 对于塔里算法的情况，这显示在图 10.1 中. 原因是塔里算法的第 1 步，其中当 W 第二次穿过边 e 时是从 $v_i = w$ 通过的，而 $f \in E_w$ 还从来没有被通过.

顺便提及，对于平面树的情况，产生一条双有向双迹不需要局部信息，而一个称为 "右手墙" 法则的简单法则，就足够了①.

虽然算法 10.11，算法 10.12 和算法 10.14 中的每一个的运行时间都为 $O(q)$，基于连通图存在双有向双迹提出问题：人们是否能够解决 (MSP)，使得每条边通过至多两次. 当与在已知图中构造双迹比较时，这个问题类似于 CPP. 事实上，如果除了算法 10.14 的局部信息外，有人用一个计数器 (如铅笔和纸) 操作，算法 10.14 就能被改进. 这在 [FRAE70a, FRAE71a] 中已经做了.

算法 10.16 (弗伦科算法 (A.S. Fraenkel's Algorithm)) 这个算法如同算法 10.14 一样也给没有穿过的边优先选择.

假设 除了算法 10.14 的假设外，我们假定给出一个函数 (计数器) $c: \{W\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$，其中 $\{W\}$ 表示算法产生的途径的集合，使得 $c(v_0) = 1$，并且对 W 和 $W' = W, e_i, v_{i+1}$，我们有 $|c(W) - c(W')| = 1$②. 我们也用算法 10.14 假设中定义的集合.

这样，这个算法依照下面的法则结合算法 10.14 和计数器 c.

规则 1 只要 $c(W) > 0$，就如算法 10.14 进行.

规则 2 根据在 $W' = W, e_i, v_{i+1}$ 中关于 v_{i+1} 的性质定义 c 的变化.

① 允许左撇子沿左手墙走.

② 因为弗伦科把 v_0 看成附在原始起点上的一个悬挂点，故定义 $c(v_0) = 0$，并以 v_0 开始的途径.

a) 如果 $v_{i+1} \neq v_j (0 \leqslant j \leqslant i)$，令 $c(W') = c(W) + 1$.

b) 如果对 $j < i+1$ 有 $v_{i+1} = v_j$，并且如果 $|E_{v_{i+1}} - E(W)| \geqslant 1$，而对同一个 v_{i+1} 有 $|E_{W',0}| \leqslant 1$，则令 $c(W') = c(W) - 1$.

c) 如果 a) 和 b) 都不适用，令 $c(W') = c(W)$.

规则 3　假设 $c(W) = 0$. 如果在 v_i 处，$E_{W,0} \neq \varnothing$，则如算法 10.14 进行；否则，如果 $v_i \neq v_0$，令 $e_i = e_{in}(v_i)$，而对于 $v_i = v_0$，算法终止.

输出　最终的 W 是一条闭覆盖途径，使对每个 $e \in E(G)$，$\lambda_W(e) \leqslant 2$. 如果对于 $e \in E(G)$ 有 $\lambda_W(e) = 2$，则 W 在两个方向用 e.

我们现在解释为什么算法产生所需要的结果. 首先，计数计 c 是一个如假设中所描述的函数. 如果 (最终的)W 第一次访问 $v \in V(G)$，则 c 增加 1. 对这个 v，如果最后一次有 $E_{W,0} \neq \varnothing$，则 c 减少 1. 换言之，在离开 v 后，E_v 中所有边至少穿过一次，则 c 在 v 不再改变. 因此，在每个顶点，c 增加 1 和减少 1 恰好一次，如果 $d(v) \leqslant 2$，则 c 的这个增加和减少是同时的，从而 $c(W)$ 总是非负整数.

现在假设对在 v_0 开始并在 $v \in V(G)$ 结束的 W，$c(W) = 0$，可能 $v_0 = v$. 如果在 v 有 $E_{W,0} \neq \varnothing$，从上面可得没有 $e \in E_{W,0}$ 连接 v 到任意的 $x \in V(W)$；否则，c 在 x 不减少，这就蕴涵着在 v，$c(W) \neq 0$，矛盾. 类似地，$G_0 := \langle E(W) \rangle$ 对每个 $x \in V(G_0) - \{v\}$ 是一个满足 $E_x \subset E(G_0)$ 的导出子图. 这样 (规则 1 和规则 3)，仅当通过 G 的所有边之后，算法 10.16 才偏离算法 10.14. 此时，如果 $\{e_{in}(v)\} = \varnothing$ (即 $v = v_0$)，算法停止；否则，经过满足 $E(P(v, v_0)) \subseteq \{e_{in}(v) \mid v \in V(G)\}$ 的唯一的路 $P(v, v_0)$ 到达 v_0，从而算法 10.16 构造了一条闭覆盖途径，使得两次穿过的边在两个方向使用.

当然，算法 10.16 一般不产生 CPP 的解. 但是这不应该奇怪，因为解 CPP 需要构造最短路，一般来说，这应该看成是涉及整个图的事情. 然而，人们可以通过把图限制到这些算法的应用范围，试图寻找一些快速算法. 例如，这种方法在 [RYTT82a] 中被选用了，其中作者研究了他称之为*棱锥迷宫*的图 (大体上说，这些图由几层平面图组成，它们随放置的高度而减少规模，并且只有相邻的两层才用一些边连通). 把迷宫表示为平面上格点的一个特殊的集合，通过这样一个迷宫的途径长度的上界已在 [SEND72a] 中建立 (“长度” 是指在迷宫对偶图中的一个途径①).

处理迷宫问题也有一种代数方法，我们将只给出描述，即将迷宫 G 的边用字母按下面的方法标号：对边 $e \in E(G)$，指派一个定向和一个字母 α_e，并对 e 的反向指派字母 α'_e. 这样 G 的一条途径 W 作为字母表 $\mathcal{A} := \{\alpha_e, \alpha'_e \mid e \in E(G)\}$ 上的一个码字 w 出现. 设 G 中途径的集合用 $\mathcal{A}$ 上对应的码字集合 $\mathcal{L}$ 表示. 空序列代表只

① 如果我们把迷宫看成是由整数格点的点和边构成的，这些点和边至少和属于定义迷宫的一个方格，并且把方块看成面，对偶图就是有定义的. 事实上，这个迷宫的对偶图是二部平面图.

有一个顶点的平凡的迹，而对于两条途径 W_1, W_2，W_1 在 W_2 的起点结束，W_1W_2 用 $w_1w_2 \in \mathcal{L}$ 表示[①]. 假设，对每个 $e, f \in E(G)$，当 $e \neq f$ 时有 $\alpha_e \neq \alpha'_e$，并且 $\{\alpha_e, \alpha'_e\} \cup \{\alpha_f, \alpha'_f\}\} = \varnothing$. 这种处理迷宫的方法在 [ROSS71a, ROSS73a] 中研究过. 在第一篇文章中，洛森斯蒂尔 (P. Rosenstiehl) 提出了他称为 MINIREPLI 的算法，并且对连通欧拉图 G [ROSS71a, 定理 VIII] 证明了由 G 中第二次穿过的边所对应的字母形成的码字对应于 G 的一条欧拉迹. 换言之，洛森斯蒂尔的算法也产生一个满足定理 10.15 的双有向双迹. 然而，这不奇怪. 尽管洛森斯蒂尔算法用码字操作类似于威纳算法用途径操作，但是仔细考察前面的算法和埃得蒙斯及约翰逊的迷宫-搜索算法可以发现，这两个算法是等价的，即不仅迷宫-搜索算法的局部信息能从洛森斯蒂尔算法产生的码字中提炼出来，反之亦然，而且这两个算法在 G 中产生同一个双有向双迹，因此，当应用于连通欧拉图时就产生了相同的欧拉迹.

下面附加的评论是我与洛森斯蒂尔在 1990 年夏天讨论的结果. 特雷马克斯算法是深度优先搜索方法的根源，而它是研究算法的最基本的方法之一. 这个方法的中心法则是*尽可能快地退回*，即当碰到已经访问过的点或到达一个悬挂点 (见特雷马克斯算法的第 3 步) 就退回来. 这与算法 10.14 和分别由埃得蒙斯和约翰逊，以及洛森斯蒂尔由算法导出的算法相反，因为在那里的支配法则是*尽可能晚地退回*，这是最基本的法则. 此外，当应用于欧拉图时，算法 10.14 能使人们产生关于由相应的边集 $\{e_{in}(v) \mid v \in V(G)\}$ 导出的给定的出树的所有欧拉迹的集合 (见定理 6.33 和定理 10.15 的证明后面的讨论). 根据洛森斯蒂尔的观点，大约在 10 年前，塔加 (R.E. Tarjan) 对他指出这个最一般的程序是在算法 MINIREPLI 中固有的. 最后，在定理 10.15 的证明中得到的迹分解 $\{W_1^{(1)}, \cdots, W^{(k)}\}$(由第一次穿过的边导出) 能看成通过归纳地收缩 $W^{(i)}$ 得到一个顶点 $v(W^{(i)})$，产生以 $v(W^{(i)})$ 为起点和终点的 $W^{(i+1)}$ $(i = 1, \cdots, k-1)$ 而得到.

在另一种方法 [KOEG67a, THAL68a, SCHÜ72a] 中，应用于平面简单图的威纳算法的一个修正版本已经与产生二元序列 σ_W 相结合；对应于最终途径的二元序列称为**提修斯码字**. 根据右手法则构造 W. 在 v_0 沿一条特殊的边 e_0 开始，假设沿 e'_i 已经达到 v $(O^+(v) = (e'_1, \cdots, e'_i, \cdots, e'_{d(v)})$. 如果 v 以前已经达到，回到用 $e_i = vw$ 定义的 w；否则，沿 e'_{i+1} 继续. 退回 $e_i = f_i$ $(O^+(w) = (f'_1, \cdots, f'_j, \cdots, f'_{d(w)})$ 之后，如果 f_{j+1} 已经通过，继续沿 $e_{i-1} = f_{i-1}$ 退回；否则，沿 f_{j+1} 继续. 在任何一步，将一个途径 $W = e_1, e_2, \cdots, e_j, \cdots, e_{i-1}, e_i$ 与一个长为 i 的二元序列 σ_W 相联系，使得如果 e_j 被 W 第一次通过，则 σ_W 的第 j 位为 1，否则，σ_W 的第 j 位为 0. 于是这样的提修斯码字一般对应非同构平图. 但是若平面 2- 连通图 G_1, G_2 有相同的提修斯码字，则 $G_1 \simeq G_2$[KOEG67a]. 如果 G_1 和 G_2 是树，同样能这样说

① 我们能将 $w \in \mathcal{L}$ 看成阿雷顿的多重染色线.

[THAL68a, Satz 1]. 此外，对一个对应于一个平面图 G 的提修斯码字，存在一个平面树 T 有同样的提修斯码字 [SCHÜ72a, Staz 1]，并且 G 能从 T 通过一个等同过程得到 [SCHÜ72a, Satz 2].

最后，如果人们走累了或者老鼠罢工，可以试图让一个自动机通过迷宫. 在这种情况必须处理的问题如下：

定义一个确定性有限自动机，它有能力穿过任意一个迷宫. (AMSP)

道普 (K. Döpp) 研究了由平面整数格子上的方形集合定义的迷宫 (AMSP)，[DÖPP71a, DÖPP71b]. 他假定一个自动机有一个初始状态，并且它的储存能力仅仅是由它的 (内部) 状态集合定义的，即格子的各种方形不影响自动机的储存. 事实上，参考其他人解决 (AMSP) 的努力，道普等猜想 (AMSP) 没有肯定的解，而对于特殊类型的迷宫及具有扩充储存能力的自动机，(AMSP) 有肯定的解，道普不能解一般情况的 (AMSP). 然而将迷宫考虑为一个图，马勒 (H. Müller) 证明了对每个有限状态自动机 (其中输入和输出字母表可以和正整数集一样大)，存在一个只有次为 1 和 3 的点的连通平面图 G，使自动机到达不了 G 的每一个点 [MÜLL71a, Satz]. 对 2 正则有向图的一个类似的结果在 [RICD82a] 中证明了. 对于砾石自动机搜索迷宫 (其中砾石是用来标记顶点的)，参见 [HOFF82b, HOFF84a]，它们含有关于这个课题的进一步的参考文献. 最后，我们引用研究自动机搜索迷宫的 [HEMM85a, RICD83a, ROSS72a].

最后说明　关于迷宫的参考文献是不完全的. 事实上，许多重要文献被省去了，能够在所引文章的参考文献中找到它们. 一般地，只要讨论闭途径而不是欧拉迹 (在第 5 章和第 8 章)，我就没有试图去搜集全部的重要文章. 然而，只要讨论欧拉迹，我都努力去达到这样一个目的，我希望我没有漏掉关于欧拉迹课题的太多的有意义的文章. 有关于圈分解、圈覆盖、计数 (不同于第 9 章中研究的) 和欧拉子图等问题将在其他的书中研究.

10.4 习　题

练习 10.1　利用分裂算法

a) 如果 $P(G)$ 满足定理 6.12)，导出求 $P(G)$- 相容欧拉迹的算法；

b) 导出求有向图中欧拉迹的算法；

c) 如果 G 嵌入在一个曲面上 (或者如果 $\{O^+(v) \mid v \in V(G)\}$ 给定)，导出一个求不相交欧拉迹的算法.

练习 10.2　假设具有给定的转移系统 $X(D)$ 的弱连通欧拉有向图满足 $\delta(G) > 6$. 用分裂引理和双分裂引理，建立一个执行时间是多项式界的求 $X(D)$- 相容欧拉迹的算法.

练习 10.3　建立一个执行时间是多项式界的求混合图欧拉迹的算法 (提示：用流理论确

定一个给定的混合图是否有欧拉定向).

练习 10.4　1) 采用弗莱瑞算法来得到求有向图中欧拉迹的算法;

2) 证明定理 10.3.

练习 10.5　对有向图采用算法 10.4′.

练习 10.6　重新阐述算法 10.4′ 使得它适合于任意连通欧拉图.

练习 10.7　说明算法 10.5 可以形式化为一个线性算法.

练习 10.8　设 S 是简单图 (有向图、混合图) H 的一个迹分解. 定义 G 如下: 令 $V(G)=E(H)\cup A(H)$ (其中 $E(H)$ 或 $A(H)$ 可以是空集) 和 $xy\in E(G)$ 当且仅当 $\{x,y\}\in X_S$. 证明 G 的分支 K_i, 迹 $T_i\in S$ 之间存在一个双射 φ, 使得

$$\varphi(K_i)=T_i\leftrightarrow V(K_i)=E(T_i)\cup A(T_i).$$

练习 10.9　证明 $\tilde{G}$ 是 G_κ 的一个连通支撑子图 (对于 G_κ 和 $\tilde{G}$ 的定义见算法 10.6 算法之后的讨论).

练习 10.10　说明在算法 10.6 的叙述后所描述的第 4 步的执行时间为常量, 并且能够产生 D 的一条欧拉迹.

练习 10.11　a) 用类似于从算法 10.4 导出算法 10.4′ 的方法, 导出算法 10.7 的一个 “拟-algol” 形式.

b) 基于用算法 10.1 或算法 10.2 构造出的一条欧拉迹, 结合在算法 10.7 的第 5 步中构造的由集合 T_E 定义的偏序集的讨论中的反向追踪程序, 导出一个新的求所有迹的算法.

c) 对于使用 (不用) 并行处理的情况, 研究这些算法的复杂性.

练习 10.12　从 G 的任意一个迹分解 S 开始并且应用 κ- 分拆到 S 的不是圈的元素, 导出构造欧拉图 G 的一个圈分解的算法. 在使用 (不用) 并行处理的假定下, 确定这个算法的复杂性.

练习 10.13　把构造欧拉迹 T 和确定由 T 的段组成的圈 C 结合起来, 改进算法 10.9.

练习 10.14　说明如果 W 是由特雷马克斯算法构造的一条最终的途径, 并且在 v_i 有一个 $e_{i-1}=e_i$ 的回缩, 则根据应用于 $G_1=G-e_i$ 的特雷马克斯算法, $W_1=\cdots,e_{i-2},v_{i-1}(=v_{i+1}),e_{i+1},\cdots$ 是一条最终的途径.

练习 10.15　证明命题 10.13.

参 考 文 献

[注] 原书 part1, volume1(第 8~10 章) 的参考文献.

[AARD51a] van Aardenne-Ehrenfest, T.; de Bruijn, N,G.; *Circuits and Trees in Oriented Linear Graphs*, Simon Stevin 28 (1951) 203–217.

[ABRA67a] Abramson, H.D.; *An Algorithm for Finding Euler Circuits in Complete Graphs of Prime Order*, in: Theory of Graphs, Int. Sympos., Rome, 1966 (Dunod, Paris, 1967) 1–7.

[*ABRH88a] Abrham, J.; Kotzig, A; *On the missing value in a graceful numbering of a 2-regular graph*, in: Proc. of the Nineteenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Baton Rouge, LA, 1998). Congr. Numer. 65 (1988), 261–266.

[AMIT50a] AMitsur, A.S.; Levitzki, J.; *Minimal Identities for Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 449–463.

[ASAN80a] Asano, T.; Nishizeki, T.; Watanabe, T.; *An Upper Bound on the Length of a Hamiltonian Walk of a Maximal Planar Graph*, J. Graph Theory 4 (1980) 315–336

[AWER84a] Awerbuch, B.; Israeli, A.; Shiloach, Y.; *Finding Euler Circuits in Logarithmic Parallel Time*, Proc. 16th Ann. Symp. on Theory of Computing, Washington D.C., May 1984 (1984) 249–257.

[BANG80a] Bange, D.W.; Barkauskas, A.E.; Slater, P.J.; *Conservative Graphs*, J. Graph Theory 4 (1980) no.1, 81–91.

[BARA87a] Barahona, F.; Pulleyblank, W.R.; *Exact arborescences, mathcing and cycle*, Discrete Appl. Math. 16 (1987), no.2, 91–99.

[BARA88b] Barahona, F.; *On Some Applications of Chinese Postman Proplem*, in: Combinatorics & Optimization, Res. Report CORR 88–55, Fac. of Math., Univ. of Waterloo (1988).

[BARA88c] Barahona, F.; *On Via Minimization*, in: Combinatorics & Optimization, Res. Report CORR 88-10, Fac. of Math., Univ. of Waterloo (1988).

[BARA88d] Barahona, F.; *Reducing Matching to Polynomial Size Linear Programming*, in: Combinatorics & Optimization, Res. Report CORR 88-51, Fac. of Math., Univ. of Waterloo (1988).

[BAUM66a] Baum, L.E.; Eagon, J.A.; *The Number of Circular Patterns Compatible with a*

Pseudo-Symmetric Connected Graph, Canad. J. Math. 18 (1996) 237-239.

[BEHZ79] Behzad, M.; Chartrand, G.; Lesniak-Foster, L.; *Graphs and Digraphs*, (Prindle, Weber & Schmidt Int. Series, Boston, Mass., 1979).

[BEIN78a] Beineke, L.W.; Wilson, R.J.; (eds.); *Selected Topic in Graph Theory*, (Academic Press, New York, 1978).

[BELL69a] Bellman, R.; Cooke, K.L.; *The Königsberg Bridges Problem Generalized*, J. Math. Anal. Appl. 25 (1969) 1–7.

[BERG62a] Berge, C.; Ghouila-Houri, A.; *Programme, Speiele, Transportnetze*, (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967).

[BERG66a] Berge, C.; *The Theory of Graphs and Its applications*, (Methuen & Co.Ltd, London, 1966).

[BERG73a] Berge, C.; *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland Math. Library, Vol.6 (North-Holland Publ., Amsterdam-London, 1973).

[BERM78b] Berman, K.A.; *Aneulerian Digraphs and the Determination of those Eulerian Digraphs Having an Odd Number of Directed Eulerian Paths*, Discrete Math. 22 (1978) 75–80.

[BERM79c] Berman, K.A.; *On the Number of Balanced Orientations of Even Graphs*, in: Proc. of the Tenth Southeastern Conf. on Comb., Graph Theory and Comput., (Boca Raton, Fla., 1979), Vol. I, Congr. XXIII (1979) 193–198.

[BERO75c] Bermod, J.C.; Sotteau, D.; *Graph Decompositions and G-Designs*, Proc. 5th British Comb. Conf. 1975, Univ. Aberdeen, Aberdeen, Congr. Numer. XV (1975) 53–72.

[BIGG76a] Biggs, N.L.; Lloyd, E.K.; Wilson, R.J.; *Graph Theory 1736–1936*, (Clarendon Press, Oxford, 1976).

[*BLOO85a] Bloom,G.S.; Hsu, D.F.; *On Graceful Directed Graphs That Are Computational Models of Some Algebraic Systems*, Graph Theory With Applications to Algorithm and Computer Science (Kalamazoo, Mich., 1984), Wiley-Intersci. Publ. (Wiley, New York, 1985) 89–102.

[BODE76a] Bodendiek,R.; Schumacher, H.; Wegner, H.; *Über eine spezielle Klasse graziöser Eulerscher Graphen*, Mitt. d. Math. Ges. Hamburg 10, 4 (1976) 241-248.

[BODE77a] Bodendiek,R.; Schumacher, H.; Wegner, H.; *Über graziöser Graphen*, Math.-Phys. Semesterber. 24, 1 (1977) 103–126.

[*BODE77b] Bodendiek,R.; Schumacher, H.; Wegner, H.; *Über graziöser Numerierungen von Graphen*, El. d. Math. 32, 3 (1977) 49–58.

[BOGN87a] Bognár, M.; *Walking in finite directed graphs*, Studia Sci. Math. Hungar. 22 (1987), no.1-4, 305–313.

[BOLL79a] Bollobás, B.; *Graph Theory, An Introductory Course*, (Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1979).

[BOND72a] Bondy, J.A.; *Balanced Colorings and the Four Colour Conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972) no.2, 241–244.

[BOND76a] Bondy, J.A.; Murty, U.S.R.; *Graph Theory with Applications*, (The Macmillan Press Ltd, London, 1976).

[+BONJ88a] Bond, J.; Peyrat, C.; *Diameter vulnerability of some large interconnection networks*, Nineteenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Baton Rouge, LA, 1988), Congr. Numer. 66 (1988) 267–282.

[BORC60a] Borchardt, C.W.; *Über eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante*, J. Reine Angew. Math. 57 (1860) 111–121.

[BOUC78a] Bouchet, A.; *Triangular Imbedding into Surfaces of a Join of Equicardinal Independent Sets Following an Eulerian Graph*, in: Alavi, Y.; Lick,D.R. (eds.); Theory & Applications of Graphs, Proc., Michigan 11-15, 1976, Lencture Notes in Math. 642 (Springer, Berlin-New York, 1978) 86–115.

[BOUC82c] Bouchet, A.; *Constructing a Covering Triangulation by Means of a Nowhere-Zero Dual Flow*, J.Combin. Theory, Ser. B 32 (1982) 316–325.

[BOUC83b] Bouchet, A.; *Nowhere-Zero Integral Flows on a Bidirected Graph*, J. Combin. Theory, Ser. B 34 (1983) 279–292.

[BROE88a] Broersma, H.J.; Göbel, F.; *k-Traversable Graphs*, preprint.*

[BRUC81a] Brucker, P.; *The Chinese Postman Problem for Mixed Graphs*, in: Proc. Int. Workshop, Bad Honnef, 1980; Lecture Notes in Comput. Sci. 100 (1981) 354–366.

[CAPL82a] Caplan, S.R.; Zeilberger, D; *T.L. Hill's Methed for Solving Linear Equations*, Adv. in Appl. Math. 3 (1982) no.4, 377–383.

[CATL86b] Catlin, P.A.; *Graphs with 4-Flows*, preprint (unfinished).

[CHAI82a] Chaiken, S.; *A Combinatorial Proof of the All Minors Matrix Tree Theorem*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 3 (1982) no.3, 319–329.

[*CHEN86a] Chen, Z.Z.; *A generalization of the Bodendiek conjecture about graceful graphs*, (Chinese), Qufu Shifan Daxue Xuebao. Ziran Kexue Ban 12 (1986), no.4, 45–46.

[*CHEN87a] Chen, Z.Z.; *A generalization of the Bodendiek's conjecture concerning graceful graphs*, (Chinese) Neimenggu Shida xuebao Ziran Kexue Ban 1987, no.1, 1–15.

[CHIB89a] Chiba, N.; Nishizeki, T.; *The Hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs*, J. Algorithms 10 (1989), no.2, 187–211.

[CHRI75a] Christofides, N.; *Graph Theory, An Algorithmic approach*, (Academic Press, New York, 1975).

[CHRI86a] Christofides, N.; Campos, V.; Mota, E.; *An algorithm for the rural postman problems on a directed graph*, Netflow at Pisa (Pisa, 1983). Math. Programming Stud. no.26 (1986), 155-166.

* 现已出版, 见 Ars lombinatoria 2aA (1990)141–153

[+COCK88a] Cock, J.C.; *Toroidal tilings from de Bruijn-Good cyclic sequences*, Discrete Math. 70 (1988), no.2, 209-210.

[*DAIH86a] Dai, H.T.; *A graceful labelling of the complete binary trees*, (Chinese), Qufu Shifan Xuebao. Ziran Kexue Ban, 12 (1986), no.3, 70–72, 56.

[DAWS57a] Dawson, R.; Good, I.J.; *Exact Markov Probabilities from Oriented Linear Graphs*, Ann. Math. Statist. 28 (1957) 946–956.

[DAYH84a] Dayhoff, J.E.; *Independently Prescribable Sets of n-Letter Words*, Discrete Math. 50 (1984) 193–219.

[DEAN88a] Dean, N.; *How do you decompose a graph into trees of small diameter?* Seventeenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Winnipeg, MB, 1987). Congr. Numer. 62 (1988), 65–67.

[DELO80a] Delorme, C.; Maheo, M.; Thullier, H.; Koh, K.M.; Teo, H.K.; *Cycles with a Chord are Graceful*, J. Graph Theory 4 (1980) no.4 409–415.

[DINI89a] Dinitz, J.-H.; Stinson, D.R.; *Some new perfect one-factorizations from starters in finite fields*, J. Graph Theory 13 (1989) no.4, 405–415.

[*DONG85a] DONG, J.Q.; *Graceful Labelings of a Special Class of Lobster Trees*, (Chinese), Neimenggu Daxue Xuebao, 16 (1985) no.3, 337–341.

[DÖPP71a] Döpp, K.; *Automaten in Labyrinthen I*, Elektron. Informationsverarb. u. Kybernet. 7 (1971) no.2, 79–94.

[DÖPP71b] Döpp, K.; *Automaten in Labyrinthen II*, Elektron. Informationsverarb. u. Kybernet. 7 (1971) no.3, 167–190.

[DROR87a] Dror, M.; Stern, H.; Trudeau, P.; *Postman tour on a graph with precedence relation on arcs*, Networks 17 (1987), no.3, 283–294.

[+DUDI88a] Du, D.Z.; Hwang, F.K.; *Generalized de Bruijn digraphs*, Networks 18 (1988), no.1, 27–28.

[DULIXXa] Du, L.; *On the Complexity of Cycle Packing Problem*, Master thesis, Comput. Science Dept. of Shandong Teachers' Univ. (probable date: 1986).

[EDMO65a] Edmonds, J.; *Maximum Matching and a Polyhedron With 0,1-Vertices*, J. Res. Nat. Bur. Standards, Math. and Math. Phys. 69B (1965) no.1/2, 125–130.

[EDMO65b] Edmonds, J.; *The Chinese Postman's Problem*, Oper. Res. 13 (1965) Suppl.1, B–73.

[EDMO65c] Edmonds, J.; *Paths, Trees and Flowers*, Canad. J. Math. 17 (1965) 449-467.

[EDMO70a] Edmonds, J.; Johnson, E.L.; *Matching: A Well-Solved Class of Integer Linear Programs*, in: Guy, R.; Hanani, H. et al. (eds); Comb. Structures & Their Applications (Gordon & Breach, New York, 1970) 89–92.

[EDMO73a] Edmonds, J.; Johnson, E.L.; *Matching, Euler Tours and the Chinese Postman*, Math. Programming 5 (1973) 88–124.

[EGGL84a] Eggleton, R.B.; Skilton, D.K.; *Graphs With Eulerian Chains*, Bull. Austral.

Math. Soc. 29 (1984) no.3, 389–399.

[+ETZI88a] Etzion, T.; *Constructions for perfect maps and pseudorandom arrays*, Coding techniques and coding theory, IEEE Trans. Inform. Theory 34 (1988), no.5, part II, 1308–1316.

[EVEN75a] Even, S.; Kariv, O.; *An $O(N^{2.5})$ Algorithm for Maximum Matching in General Graphs*, Proc. 16th annual Symp. on Foundations of Computer Sciences, IEEE, New York (1975) 100–112.

[EVEN76a] Even, S.; Itai, A.; Shamir, A.; *On the Complexity of Time Table and Multicommodity Flow Problems*, SIAM J. Comput. 5 (1976) 691–703.

[EVEN79a] Even, S.; *Graph Algorithms*, (Computer Science Press, Inc., Rockville, 1979).

[FLEI76a] Fleischner, H.; *Eine gemeinsame Basis für die Theorie der Eulerschen Graphen und den Satz von Petersen*, Monatsh. Math. 81 (1976) 267–278.

[FLEI77a] Fleischner, H.; Vestergaard, P.D.; *Value-Ture Walks in Finite, Connected, Valuated Graphs*, Monatsh. Math. 83 (1977) 1–8.

[FLEI83a] Fleischner, H.; *A Way of Enumerating Eulerian Tails in a Connected Eulerian Graph*, Ars Combin. 16B (1983) 177–196.

[FLEI83b] Fleischner, H.; *Eulerian Graphs*, in: Beineke, L.W.; Wilson, R.J. (eds.); Selected Topics in Graph Theory 2 (Academic Press, London-New York, 1983) 17–53.

[FLEI89b] Fleischner, H.; *Elementary proofs of (relatively) recent characterizations of Eulerian graphs*, First Montreal Conference on Combinatorics and Computer Science, 1987. Discrete Appl. Math. 24 (1989), no.1-3, 115–119.

[FLEI89c] Fleischner, H.; Wenger, E.; *D_0-Favouring Eulerian Trails in Digraphs*, Archivum Mathematicum 25 (1989), no.1-2, 55–60

[FLEI90b] Fleischner, H.; Wenger, E.; *Characterizing Directed Postman Tours*, in: Topics in Combinatorics and Graph Theory, Bodendiek, R., Henn, R. (Eds.), Physica-Verlag Heidelberg (1990).

[FLEI90c] Fleischner, H.; Hilton, A.J.W.; Jackson, B.; *On the Maximum Number of Pairwise Compatible Euler Cycles*, J. Graph Theory 14 (1990), NO.1, 51–63.

[FLEI90d] Fleischner, H.; *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol. 1*, Ann. Discete Math. 45 (North-Holland, Amsterdam, 1990).

[FORD62a] Ford, L.R., Jr.; Fullkerson, D.R.; *Flows in Networks*, (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962).

[FOUQ84b] Fouquet, J.L.; *On Nowhere-Zero Flows in Bidirected Graphs*, Theorie algebrique des graphes, Table ronde, Lemans, 5-11 Sept. 1984, abstract.

[FRAE70a] Fraenkel, A.S.; *Economic Traversal of Labyrinths*, Math. Mag. 43 (1970) 125–130.

[FRAE71a] Fraenkel, A.S.; *Economic Traversal of Labyrinths*, (Correction) Math. Mag. 44 (1971) 12.

[FRAN84a] Frank, A.; Tardos, É.; *Covering Directed and Odd Cuts*, Math. Programming Stud. 22 (1984) 99–112.

[FRAN85a] Frank, A.; *Edge-Disjoint Paths in Planar Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 39 (1985) no.2, 164–178.

[FRED79a] Frederickson, G.N.; Hecht, M.S.; Kim, C.E.; *Approximation Algorithms for Some Routing Problem*, SIAM J. Comput. 7 (1978) 178–193.

[FRUC79a] Frucht, R.; *Graceful Numberings of Wheels and Related Graphs*, in: Gewirtz, A.; Quintas, L. (eds.), 2nd Int. Conf. on Comb. Math. (The New York Academy of Sciences, New York, 1979) 219–229.

[*FRUC88a] Frucht, R.; Gallian, J.A.; *Labeling Prismas*, Ars Combin. 26 (1988), 69–82.

[GARE79a] Garey, M.R.; Johnson, D.S.; *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*, (W.H. Freeman & Company, San Francisco 1979).

[GERA88b] Gerards, A.M.S.; *On Shortest T-Jions and Packing T-Cuts*, Res. Report CORR 88-50, Fac. of Math., Univ. of Waterloo (Nov 1988).

[GOLO72a] Golomb, S.W.; *How to number a graph*, in: R.C. Read (ed.); Graph Theory and Computing; (Academic Press, New York 1972) 23–37.

[GOOI46a] Good, T.J.; *Normal Recurring Decimals*, J. London Math. Soc. XXI (1946) 167–169.

[GOOM73a] Goodman, S.E.; Hedetniemi, S.T.; *Eulerian Walks in Graphs*, SIAM J. Comput. 2 (1973) 16–27.

[GOOM74a] Goodman, S.E.; Hedetniemi, S.T.; *On Hamiltonian Walks in Graph*, SIAM J. Comput. 3 (1974) no.3, 214–221.

[GOUL81b] Goulden, I.P.; Jackson, D.M.; *The Enumeration of Directed Closed Euler Trails and Directed Hammiltonian Circuits by Lagragian Methods*, European J. Combin. 2 (1981) 131–135.

[GOUL82a] Goulden, I.P.; Jackson, D.M.; *The Application of Langrangian Methods to the Enumeration of Labelled Trees With Respect to Edge Partition*, Canad J. Math. 34 (1982) 513–518.

[GROP90a] Gropp, H.; *Configurations and the Tutte conjecture*, Ars Combinatoria 29A (1990), 171–177.

[GRÖT85a] Grötschel, M.; Lovász, L.; Schrijver, A.; *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, (Algorithms and Combinatorics 2; Springer, New York, 1985).

[GRÖT88a] Grötschel, M.; Holland, O.;*Solution of Large-Scale Symmetric Travelling Salesman Problems*, Preprint.*

* 现已发表, 见 Mathematical Programming: Series A and archive 51–2(Sept. 1991)141–202(Springer-Verlag New York, Inc.Secaucus, NJ, USA).

[GRUN73a] Grunskii, I.S.; Speranskii, D.V.; *Length of Graphical Walk*, Kibernetika 6 (1973) 34–37.

[GUAN62a] Guan, M.; *Graphic Programming Using Odd or Even Points*, Chinese Math. 1 (1962) no.3, 273–277.

[GUAN62b] Guan, M.; *Improvement on Graphic Programming*, Chinese Math. 1 (1962) no.3, 278–287.

[GUAN84a] Guan, M.; *On the Windy Postman Problem*, Discrete Appl. Math. 9 (1984) 41–46.

[GUAN84b] Guan, M.; *The Maximum Weighted Cycle-Packing Problem and its Relation to the Chinese Postman Problem*, in: Bondy, J. Adrian; Murty, U.S.R. (eds.); Progress in Graph Theory (Academic Press, Toronto, Ont., 1984) 323–326.

[GUAN85b] Guan, M.; Pulleyblank, W.R.; *Eulerian Orientations and Circulations*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 6 (1985) no.4, 657–664.

[HAKI65a] Hakimi, S.L.; *On the Degrees of the Vertices of a Directed Graph*, J. Franklin Inst. 279 (1965) no.4, 290–308.

[HARA73a] Harary, F.; Palmer, E.M.; *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York, London, (1973).

[HARB89a] Harborth, H.; Harborth, M.; *Straight Ahead Cycles in Drawings of Complete Graphs*, Rostock. Math. Kolloq. 38 (1989) 71–75.

[HASS84a] Hassin, R.; *On Multicommodity Flows in Planar Graphs*, Networks 14 (1984) 225–235.

[HECK76a] Heck, J.; *Ein Algorithmus zur Lösung des Chinese Postman Problems*, in: Noltemeier, H. (ed.), Graphen, Algorithmen, Datenstrukturen, 2. Fachtagung über Graphentheoretische Konzepte der Informatik, Göttingen, 1976; Appl. Comput. Sci. 4 (Hanser, Munich 1976) 183–216.

[HEDE68a] Hedetniemi, S.T.; *On Minimum Walks in Graphs*, Naval Res. Logist. Quart. 15 (1968) 453–458.

[HEMM85a] Hemmerling, A.; *On Labyrinth Problems*, in: Sachs, H. (ed.); Graphs, Hypergraphs and Applications; Teubner Texte zur Mathematik 73 (Leipzig, 1985) 57–61.

[HERS64a] Herstein, I.N.; *Topics in Algebra*, (Xerox College Publ., 1964).

[HILL77a] Hill, T.L.; *Free Energy Transduction in Biology*, (Academic Press, New York, 1977).

[*HOYS89a] Ho, Y.S.; Lee, S.M.; Shee, S.C.; *Cordial Labeling of unicyclic graphs and generalized Petersen graphs*, in: Proc. Eighteenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Winnipeg, MB, 1988). Congr. Numer. 68 (1989), 109–122.

[HOED78a] Hoede, C.; Kuiper, H.; *All Wheels are Graceful*, Utilitas Math. 14 (1978), 311.

[HOFF82b] Hoffmann, F.; *1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen*, Report R-MATH-06-82, Akademie der Wissenschaften der DDR, Inst. f. Math., Berlin 1982.

[HOFF84a] Hoffmann, F.; *Four Pebbles Don't Suffice to Search Planar Infinite Labyrinths*, in: Theory of Algorithms (Pécs, Hungary 1984) Colloq. Math. Soc. János Bolyai 44, 191–206.

[HUTC74a] Hutchinson, J.P.; *Eulerian Graphs and Polynomial Identities for Sets of Matrices*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974) 1314–1316.

[HUTC74b] Hutchinson, J.P.; *Cancelling Eulerian Graphs*, in: Bari, R.A.; Harary, F.(eds); Graphs and Combinatorics; Lecture Notes in Math. 406 (1974) 302–313.

[HUTC75a] Hutchinson, J.P.; *Eulerian Graphs and Polynomial Identities for Skew-Symmetric Matrices*, Canad. J. Math. XXVII(1975) no.3, 590–609.

[HUTC75b] Hutchinson, J.P.; Wilf, H.S.; *On Eulerian Circuits and Words with Prescribed Adjacency Patterns*, J. Combin. Theory 18 (1975) no.1, 80–87.

[HUTC75c] Hutchinson, J.P.; *On Words with Prescribed Overlapping Subsequences*, Utilitas Math. 7 (1975) 241–250.

[IHRI87a] Ihrig, E.C.; Seah, E.S.; Stinson, D.R.; *A perfect one-factorization of* K_{50}, Proceedings of the first Carbondale combinatorics conference (Carbondale, 1986). J. Combin. Math. Combin. Comput. 1 (1987), 217–219.

[JACS79a] Jackson, D.M.; Goulden, I.P. *Sequence Enumeration and the de Bruijnvan Aardenne-Ehrenfest-Smith-Tutte Theorem*, Canad. J. Math. XXXI (1979) no.3, 488–495.

[JACS81b] Jackson, D.M.; *The Generalization of Tutte's Result for Chromatic Trees*, by Lagrangian Methods, Canad. J. Math. XXXIII(1981) no.1, 12–19.

[JAEG76a] Jaeger, F.; *Balanced Valuations and Flows in Multigraphs*, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976) 237–242.

[JAEG76b] Jaeger, F.; *On Nowhere-Zero Flows in Multigraphs*, Proc. 5th British Combin. Conf., Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975, Congr. Number. XV (1976) 373–378.

[JAEG79a] Jaeger, F.; *Flows and Generalized Coloring Theorems in Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 26 (1979) no.2, 205–216.

[JAEG83b] Jaeger, F.; *Geometrical Aspects of Tutte's 5-Flow Conjecture*, in: Graphs and Other Combinatorial Topics, Prague, 1982; Teubner-Texte Math. 59 (Teubner, Leipzig, 1983) 124–133.

[JAEG83d] Jaeger, F.; Payan C.; Kouider, M.; *Partitions of odd regular graphs into bistars*, Discrete Math. Vol.46, No.1 (1983) 93–94.

[JAEG84b] Jaeger, F.; *On Circular Flows in Graphs*, in: Finite and Infinite Sets, 6th Hung. Combin. Colloq., Eger/Hungary, Vol. I, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 37 (1984) no.1, 391–402.

[JAEG88a] Jaeger, F.; *Nowhere-Zero Flow Problems*, in: Beineke, L.W.; Wilson, R.J. (eds.);

Selected Topics in Graph Theory 3 (Academic Press, New York, 1988).

[JÄRV73a] Järvinen, P.; *On a Routing Problem in a Graph with Two Types of Costs Associate with the Edges*, Acta Univ. Tamper. Ser. A 50 (1973) 9–54.

[JAVO71a] Javors'kiĭ, E.B.; *Properties of the ϕ-Transformation of a Cycle Under an R-Equivalence on Pairs of Edges*, Topological Aspects of Graph Theory, Izdanie Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR Kiev 302 (1971) 126–131.

[JOHN87a] Johnson, E.L.; Mosterts, S.; *On four problems in graph theory*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods (1987), no.2, 163–185.

[JUNG87a] Jungnickel, D.; *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*, (Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich, 1987).

[KALU77a] Kaluza, T.; *Ein Zusammenhang zwischen 1-Faktoren, Doppelsternen und gewissen Durchlaufungen von Graphen*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 28 (1977) 59–63.

[KAPP79a] Kappauf, C.H.; Koehler, G.J.; *The Mixed Postman Problem*, Discrete Appl. Math. 1 (1979) 89–103.

[KAST67a] Kasteleyn, P.W.; *Graph Theory and Crystal Physics*, in: Harary, F. (ed.); Graphs Theory and Theoretical Physics (Academic Press, New York, 1967) 43–110.

[KESE87a] Kesel'man, D.Y.; *On the covering of edges of a graph by cycles*, (Russian. English summary), Kibernetika (Kiev) 1987, no.3, 16–22,132. (English Traslation in: Cybernetics 23 (1987), no.3, 306–313).

[KHEL87a] Khelladi, A.; *Nowhere-zero integral chains and flows in bidirected graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 43 (1987), no.1, 95–115.

[KHEL89a] Khelladi, A.; *Bidirected graphs, Flows and Classification*, preprint.

[KIRC47a] Kirchhoff, G.; *über die Auflösung der Gleichungen, aufwelche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird*, Ann. Phys. Chem. LXXII (1847) 497–508.

[KOBA89a] Kobayashi, M.; Kiyasu, Z.; *Perfect one-factorizations of K_{1332} and K_{6860}*, J. Combin. Theory Ser. A 51 (1989), no.2, 314–315.

[KOEG67a] Koegst, M.; Thalwizer, K.; *Zum Labyrinthenproblem*, Elekton. Informationsverarb. u. Kybernet.3 (1967) 341–350.

[KOHK74a] Koh, K.M.; Teh, H.H.; *On Directed Postman Problem*, The Nanyang Univ. J. VIII/IX (1974/75) 14–35.

[*KOHK85a] Koh, K.M.; Yap, K.Y.; *Graceful Numberings of Cycles with a P_3-Chord*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 13 (1985), no.1, 41–48.

[KÖNI36a] König, D.; *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, (Chelsea Publ. Comp., New York, 1950, first publ. by Akad. Verlagsges., Leipzig, 1936).

[KORA82a] Korach, E.; *Packing of T-cuts, and Other Aspects of Dual Integrality*, Ph.D.

Thesis, Univ. of Waterloo (Ontario, 1982).

[KOST58a] Kostant, B.; *A Theorem of Frobenius, a Theorem of Amitsur-Levitzki and Cohomology Theory*, J. Math. Mech. 7 (1958) no.2, 237–264.

[KOTZ59a] Kotzig, A.; *On Finite Graphs Oriented in Equilibrium*, (Slovak), Časopis Pěst Mat. 84 (1959) 31–45.

[KOTZ78b] Kotzig, A.; Turgeon, J.; *β-Valuations of Regular Graphs with Complete Components*, Hajnal, A.; Sós, V., T.(eds); Proc. 5th Hung. Coll. on Combinatorics, Keszthely, 1976, Coll. Math. Soc. Jańos Bolyai 18 (North-Holland, Amsterdam, 1978) 697–703.

[*KOTZ84a] Kotzig, A.; *Recent Result and Open Problems in Graceful Graphs*, Proc. 15th Southeastern Conf. Combin., Graph Th. and Comp. (Baton Rouge, LA, 1984), Congr. Numer. 44 (1984), 197–219.

[*KUAN88a] Kuang, Q.; Lee, S.-M.; Mithchem, J.; Wang, A.-G.; *On edge-graceful unicyclic graphs*, Seventeenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Winnipeg, MB. 1987). Congr. Numer. 61 (1988), 65–74.

[LASV81a] Las Vergnas, M.; *Eulerian Circuits of 4-Valent Graphs Imbedded in Surfaces*, Algeber. Meth. in Graph Theory I/II (Szeged/Hungary 1978) Colloq. Math. Soc. Janós Bolyai 25, (North-Holland, Amsterdam, 1981), 451–477.

[LASV83a] Las Vergnas, M.; *Le Polynôme de martin d'un graphe eulerien*, Ann. Discrete Math. 17 (1983) 397–411.

[LASV86a] Las Vergnas, M.; *An Upper Bound for the Number of Eulerian Orientations of a Ragular Graph with Even Degrees*, to appear in Combinatorica.*

[LASV88a] Las Vergnas, M.; *On the Evaluation at(3,3) of the Tutte Polynomail of a Graph*, J. Combin. Theory Ser. B 45 (1988), no.3, 367–372.

[LAWL76a] Lawler, E.L.; *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, (Holt, Rinehart & Winston, New York, 1976).

[LAWL85a] Lawler, E.L.; Lenstra, J.K.; Rinnooy Kan, A.H.G.; Shmoys, D.B. (eds.); *The Travelling Salesman Problem*, (John Wiley & Sons, New York, 1985).

[*LEES87a] Lee, S.-M.; Wui, I.; *Skolem-gracefuleness of 2-stars and 3-stars*, Bull. Malaysian Math. Soc. (2) 10 (1987), no.1, 15–20.

[*LEES88a] Lee, S.-M.; Wang, G.; *All pyramids, lotuses and diamonds are k-graceful*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.) 32 (80) (1988).

[*LEES88b] Lee, S.-M.; Liu, A.; *A construction of k-graceful graphs from complete bipartite graphs*, Southeast Asian Bull. Math. 12 (1988), no.1, 23-30.

[*LEES88c] Lee, L.-M.; Lee, S.-M.; Murthy, G.; *On edge-graceful labellings of complete graphs – solution of Lo's conjecture*, Seventeenth Manitoba Conference on Nu-

* 现已出版, 见 Joural Combinatorica, Vol.10(1990)no.1, 61–65.

merical Mathematics and Commputing (Winnipeg, MB, 1987). Congr. Numer. 62 (1988), 225–233.

[*LEES88d] Lee, S.-M.; Wang, S.S.; Wui, I.; *On Skolem-gracefulness of 4-stars*, Seventeenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Commputing (Winnipeg, MB, 1987). Congr. Numer. 62 (1988), 235–239.

[*LEES88e] Lee, S.-M.; Quach, L.H.; Wang, S.S.; *Skolem-gracefulness of graphs which are union of paths and stars*, Seventeenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Commputing (Winnipeg, MB, 1987). Congr. Numer. 61 (1988), 59–64.

[*LEES89a] Lee, S.-M.; Ng, K.C.; *Every Young tableau graph is d-graceful*, Combinatorial Mathematics: Proceedings of the Third International Conference (New York, 1985), 296–302, Ann. New York Acad. Sci., 555, New York Acad. Sci., New York, 1989.

[LIXU88a] Li, X.L.; *Connectivity of Euler tour graphs*, (Chinese, English summary), J. Xinjiang Univ. Natur. Sic. 5 (1988), no.3, 16–20.

[LIEB70a] Liebling, T.M.; *Graphentheorie in Planungs-und Tourenproblemen*, Lecture Notes in Oper. Res. Math. Sys. 21 (Springer-Verlag, New York, 1970).

[LING82a] Lin, G.; Zhang, F.; Lin Y.; *An Algorithm for Generating all Elementary Cycle-Coverings of an Eulerian Graph*, Lanzhou Daxue Xuebao 18 (1982) no.4, 9–15.

[+LING84a] Lin, G.; Zhang, F.; Wu, S.; *The strong homomorphisms of de Brujin-Good Graphs* D_n^3, (Chinese. English summary), J. Xinjiang Univ. Nat. Sci 1984, no.2, 20–28.

[LISK71a] Liskovec, V.A.; *O tschisle eilerowaich digrafow i odnorodnaich turnirow*, Weszi Akademii Mawuk Belaruskaj SSR, Ser. Fis.-Mat. Nawuk 1 (1971) 22–27.

[LIUC68a] Liu, C.L.; *Introduction to Combinatorial Mathematics*, (McGraw-Hill, New York, 1968).

[LIUJ87a] Liu, J.; *On the Maximum Cycle Packing Problem and the Minimum Cycle Covering Problem of Weighted Graphs*, preprint.

[*LIUZ85a] Liu, Z.S.; *A Class of Graceful Graphs and Two Classes of Graceful Graphs Derived From it*, (Chinese), Neimenggu Daxue Xuebao 16 (1985) no.2, 183–186.

[*LOSH85a] Lo, S.-P.; *On edge-graceful Labelling of graphs*, Proceedings of the Sundance conference on combinatorics and related topics (Sundance, Utah, 1985). Congr. Numer. 50 (1985), 231–241.

[LOVÁ75a] Lovász, L.; *2-Matchings and 2 Covers of Hyergraphs*, Acta Math. Acad. Scient. Hung., Vol.26, No.3–4 (1975) 433–444.

[LOVÁ86a] Lovász, L.; Plummer, M.D.; *Matching Theory*, Ann. Discrete Math. 29 (North-Holland, Amsterdam, 1986).

[LUCA82a] Lucas, M.É.; *Récréations Mathématiques*, (Gauthiers-Villars et fils, Paris,

1982).

[LUCA94a] Lucas, M.É.; *Récréations Mathématiques IV*, (Gauthiers-Villars et fils, Paris, 1894).

[*MAXU86a] Ma, X.D.; *Some classes of graceful graphs*, (Chinese), J. Xinjiang Univ. Nat. Sci. 3 (1986), no.2, 106–107.

[*MAXU88a] Ma, X.D.; *A Graceful numbering of a class of graphs*, J. Math. Res. Exposition 8 (1988), no.2. 215–216.

[*MAKE84a] Ma, K.J.; Feng, C.J.; *On Gracefulness of Gear Graphs*, Math. Practice Theory 4 (1984) 72–73.

[MARM34a] Martin, M.H.; *A Problem in Arrangements*, Bull. Amer. Math. Soc. XL (1934) 859–864.

[MATS85a] Matsumoto, K.; Nishizeki, T.; Saito, N.; *An Efficient Algorithm for Finding Multicommodity Flows on Planar Networks*, SIAM J. Comput. Vol.14, No.2 (May 1985) 289–302.

[MATS86a] Matsumoto, K.; Nishizeki, T.; Saito, N.; *Planar Multicommodity Flows, Maximum Mathings and Negative Cycles*, SIAM J. Comput. 15 (1986) no.2, 495–510.

[McKA82a] McKay, B.D.; *Eulerian Circuits in* K_n, Combinatorics 4 (1982) no.1, 5–6.

[McKA83a] McKay, B.D.; *Applications of a Technique for Labelled Enumeration*, Proc. 14th Southeastern Conf. on Combin., Graph Theory & Computing, (Boca Raton, Fla., 1983), Congr. Numer. 40 (1983) 207–221.

[MINI79a] Minieka, E.; *The Chinese Postman Problem for Mixed Networks*, Management Sci. 25 (1979) no.7, 643–648.

[MINT67a] Minty, G.J.; *A Theorem on Three-Coloring the Edges of a Trivalent Graph*, J. Combin. Theory 2 (1967) 164–167.

[MÖLL88a] Möller, M.; Carstens, H.G.; Brinkmann, G.; *Nowhere-Zero flows in low genus graphs*, J. Graph Theory 12 (1988), no.2, 183–190.

[MOON70a] Moon, J.W.; *Counting Labelled Trees*, Canad. Math. Monographs No.1, Canad. Math. Congress, Montreal 1970.

[MÜLL71a] Müller, H.; *Endliche Automaten und Labyrinthe*, Elektron. Informationsverarb. u. Kybernet. 7 (1971) no.4, 261–264.

[NADD81a] Naddef, D.; Pulleyblank, W.R.; *Hamiltonnicity and combinatorial polyhedra*, J. Combin. Theory Ser. B 31 (1981), no.3, 297–312.

[NADD84a] Naddef, D.; Pulleyblank, W.R.; *Hamiltonnicity in* $(0-1)$*-polyhedra*, J. Combin. Theory Ser. B 37 (1984), no.1, 41–52.

[+NYUV86a] Nyu, V.; *The independence number of de Bruijn graphs*, (Russian) Metoday Diskret. Analiz. No.44 (1986), 58–68,70.

[OELL84a] Oellermann, O.R.; Swart, H.C.; *Graphs for which all Strong Orientations are Eulerian*, Exposition. Math. 2 (1984) 183–184.

[OKAM81a] Okamura, H.; Seymour, P.D.; *Multicommodity Flows in Planar Graphs*, J. Comb. Theory Ser. B 31 (1981) 75–81.

[OKAM83a] Okamura, H.; *Three Commodity Flows in Graphs*, Proc. Jap. Acad. Ser. A 59 (1983) 266–269.

[OREO51a] Ore, O.; *A Problem Regarding the Tracing of Graphs*, Elem. Math. 6 (1951) no.3, 49–53.

[OWEN73a] Owens, F.W.; *Graph Theory and Identities on Matrices*, Notices Amer. Math. Soc. 20 (1973) A–35.

[OWEN75a] Owens, F.W.; *Applications of Graph Theory to Matrix Theory*, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975) no.1 242–249.

[PALM78a] Palmer, E.M.; *The Enumeration of Graphs*, in: Beineke, L.W.; Wilson, R.J. (eds.); Selected Topics in Graph Theory 1 (Academic Press, New York, 1978) 385–415.

[PAPA76a] Papadimtriou, C.H.; *On the Complexity of Edge Traversing*, J. Assoc. Comput. Mach. 23 (1976) no.3, 544–554.

[PAPA82a] Papadimtriou, C.H.; Steiglitz, K.; *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, (Prentice Hall, Inc., New jersey, 1982).

[PARK83a] Parker, R.G.; Rardin, R.L.; *The Travelling Salesman Problem: An Update of Research*, Nav. Res. Logist. Quart. 30 (1983) 69–96.

[PATT73a] Patterson, H.D.; *Quenouille's Changeover Designs*, Biometrika 60 (1973) 33–45.

[POLE71a] Polesskii, V.P.; *A lower boundary for the reliability of information networks*, Problems of Information Trasmission 7 (1971), 165–171.

[POLJ90a] Poljak, S.; *Directed Eulerian Cycle with Fixed Order of Three Edges*, Lecture Hold at the 4th Intern. Colloq. on Graph Theory and Combinatorics, Marseille Luminy, July 1990.

[*PUNN87a] Punnim, N; Pabhapote, N.; *On graceful graphs: cycles with a P_k-chord, $k \geqslant$ 4*, Proceedings of the Singapore conference on combinatorial mathematics and computing (Singapore, 1986). Ars. Combin. 23 (1987), A, 225–228.

[READ62b] Read, R.C.; *Graph Theory Algorithms*, in: Graph Theory and Its Applications, Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1969 (Academic Press, New York, 1970) 51–78.

[READ87a] Read, R.C.; *A new method for drawing a planar graph given the cyclic order of the edges at each vertex*, Sixteenth Manitoba conference on numerical mathematics and computing (Winnipeg, Man., 1986). Congr. Numer, 56 (1987), 31–44.

[REES46a] Rees, D.; *Note on a Paper by I.J. GOOD*, J. London Math. Soc. XXI (1946) 169–172.

[REGN76a] Regner, S.; *Zur Existenz einer speziellen Art von Eulerschen Linien in ebenen Graphen*, Ph.D. Thesis, Univ. of Vienna (1976).

[RICD82a] Richards, D.; Swart, C.; *Traversing Unknown Graphs*, Proc. 13th Southeastern Conf. on Combin., Graph Theory & Computing (Boca Raton, Fla., 1982) Congr. Numer. 36 (1982) 77–88.

[RICD83a] Richards, D.; Swart, C.; *Universal traversal sequences, graph traversal and graph indentification*, Combinatorics on words (Waterloo, Ont., 1982), 387–405, Academic Press, Toronto, Ont., 1983.

[*RING86a] Ringel, G.; *Vermutungen über numerierbare Graphen* [*Conjectures on numerable Graphs*], Elem. Math. 41 (1986), no.3, 68–74.

[ROSS71a] Rosenstiehl, P.; *Labyrinthologie Mathématique (I)*, Math. Sci. Humaines 9 (1971) no.33, 5–32.

[ROSS72a] Rosenstiehl, P.; Fiksel, J.R.; Holliger, A.; *Intelligent Graphs: Networks of Finite Automata Capable of Solving Graph Problems*, in: Graph Theory and Computing (Academic Press, New York, 1972) 219–265.

[ROSS73a] Rosenstiehl, P.; *Les mots de Labyrinthe*, Cahiers du centre d'etudes de recherche opérationnelle 15 (1973) 245–252.

[ROSS82a] Rosenstiehl, P.; *Le dodécadédale ou l'éloge de l'heuristique*, Critique (Aug./Sept. 1982) 423–424.

[ROTH66a] Rothschild,B.; Whinston, A.; *Feasibility of Two Commodity Network Flows*, Oper. Res. 14 (1966) 1121–1129.

[ROTH66b] Rothschild,B.; Whinston, A.; *On the Two-Commodity Network Flows*, Oper. Res. 14 (1966) 377–387.

[ROWE73a] Rowen, L.H.; *Standard Identities for Matrix Rings with Involution*, Notices Amer. Math. Soc. 20 (1973) A–76.

[ROWE74a] Rowen, L.H.; *Standard Polynormials in Matrix Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 190 (1974) 253–284.

[ROWE82a] Rowen, L.H.; *A Simple Proof of Kostant's Theorem, and an Analogue for the Symplectic Involution*, Contemp. Math. 13 (1982) 207–215.

[RYTT82a] Rytter, W.; *A Note on the Complexity of Traversing a Labyrinth*, in: Borowiecki,M.; Kennedy, J.W.; Syslo, M.M. (eds.); Graph Theory, Lagów 1981; Lecture Notes in Math. 1018 (Springer, Berlin-New York, 1983) 223–229.

[SABI77a] Sabidussi, G; *Tracing Graphs Without Backtracking*, in: Henn, R. et al. (eds.), Methods of Operations Research XXV, Part 1, First Symp. on Oper. Res., Univ. Heidelberg, Sept. 1-3, 1976.

[SCHM79a] Schmidt, R.; *Zyklische Orientierungen endlicher bewerteter Graphen*, Monatsh. Math. 88 (1979) 253–263.

[SCHR83a] Schijhver, A; *Bounds on the Number of Eulerian Orientations*, Combinatorica 3 (1983) no.3–4, 375–380.

[SCHR83b] Schijhver, A; *Bounds on Permanents, and the Number of 1-Factors and 1-*

Factorizations of Bipartite Graphs, in: Lloyd, E.K. (ed); Surveys in Combinatorics, 9th British Combin. Conf. Southampton 1983, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 82 (Cambridge University Press 1983) 107–134.

[SCHÜ72a] Schütz, K.; *Zur Beschreibung eines Labyrinthes durch ein Wort über einem zweistelligen Alphabet*, Elektron. Informationsverarb. u. Kybernet. 8 (1972) no.5, 275–282.

[SCOT89a] Scotti, F.; *Interdependence of the lower embeddability and upper embeddability of a graph*, (Italian. English summary), Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 3 (1989), no. 279–288.

[SEAH89a] Seah, E.S.; Stinson, D.R.; *A perfect one-factorization for* K_{40}, Eighteenth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Winnipeg, MB, 1988), Congr. Numer. 68 (1989), 211–213.

[SEBŐ84a] Sebő, A.; *On the Structure of Odd Joins*, MO/54, Eötvös Loránd Univ., Aug. 1984.

[SEBŐ85a] Sebő, A.; *A Quick Proof of Seymour's Theorem on t-joins*, Discrete Math. 64 (1987) 101–103.

[SEBŐ86a] Sebő, A.; *Finding the t-Join-Structure of a Graph*, Math. Programming 36 (1986) 123–134.

[SEBŐ89b] Sebő, A.; *Integer Plane Multicommodity Flows With a Bounded Number of Demands*, to appear in JCT.

[SEBŐ???] Sebő, A.; *Distances in Undirected Graphs*, undated manuscript.

[SEND72a] Sendov, B.H.; Boyanov, T.P.; *A Problem of Labyrinths*, C.R. Acad. Bulgare Sci. 25 (1972) 583–585.

[SERD74a] Serdjukov, A.I.; *On the Problem of Finding a Minimal Euler Multigraph for a Connected Graph With Weighted Edges*, Control Systems 12 (1974) 61–67, Acad. Sci. USSR Sib., Dep. Inst. Mat., Novosibirsk.

[SEYM78a] Seymour, P.D.; *A Two-Commodity Cut Theorem*, Discrete Math. 23 (1978) 177–181.

[SEYM79a] Seymour, P.D.; *Sums of Circuits*, in: Bondy, J.A.; Murty, U.S.R. (eds.); Graph Theory and Related Topics (Academic Press, New York, 1979) 341–356.

[SEYM81a] Seymour, P.D.; *Nowhere-Zero 6-Flows*, J. Combin. Theory Ser. B 30 (1981) 130–135.

[SEYM81b] Seymour, P.D.; *On Odd Cuts and Plane Multicommodity Flows*, Proc. London Math. Soc. 42 (1981) no.3, 178–192.

[SEYM81c] Seymour, P.D.; *Matroids and Multicommodity Flows*, European J. Combin. 2 (1981) 257–290.

[SEYM81d] Seymour, P.D.; *On Tutte's Extension of the Four-Color Problem*, J. Combin. Theory Ser. B 31 (1981) 82–94.

[SHIS68a] Shishov, V.S.; Thuan, H.; *Remarks on Tarry's Method of Counting Euler Cycle*, (Russian), Kibernetika 4 (1968) no.4, 76–80 (English translation in: Cybernetics 4 (1968) no.4, 65–68).

[SKIL85a] Skilton, D.K.; *Strong Double Tracings*, Research Report no.85-09, Dep. of Math. & Stat., Simon Fraset Univ. Burnaby, Sept. 1985.

[ŚKOV89a] Škoviera, M.; Nedela, R.; *The Maximum Genus of a Graph and Doubly Eulerian Trails*, preprint.

[*SLAT85a] Slater, P.J. *Problems in graph theory: graceful and sequential numberings of infinite graphs*, Southeast Asian Bull. Math. 9 (1985), no.1, 15–22.

[*SLAT86a] Slater, P.J. *On k-graceful, countably infinite graphs*, Discrete Math. 61 (1986), no.2-3, 293–303.

[SMIT72a] Smith, K.C.; Kumin, H.J.; *Identities on Matrices*, Amer. Math. Monthly 79 (1972) 157–158.

[SORO69a] Sorokin, V.A.; *A Formula for the Number of Euler cycles of a Complete Graph* U_n, Uspekhi Mat. Nauk 24 (150) (1969) no.6, 191–192.

[STEI84a] Steinberg, R.; *Tutte's Five Flow Conjecture for the Projective Plane*, J. Graph Theory 8 (1984) no.2, 277–289.

[STEI88a] Steinberg, R.; Younger, D.H.; *Grötzsch's Theorem for the Projective Plane*, to appear with minor revision in Ars Combin.

[SWAN63a] Swan, R.G.; *An Application of Graph Theory to Algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) 367–373.

[SWAN69a] Swan, R.G.; *A Correction to "An Application of Graph Theory to Algebra"*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969) 379–380.

[SYSL77a] Syslo, M.M.; Skupień, Z.; *Applied Graph Theory III: Eulerian and Hamiltonian Graphs, The Travelling Salesman Problem*, Rocz. Pol. Tow. Mat., Ser. III, Mat. Stosow. 10 (1977) 5–54.

[SYSL83a] Syslo, M.M.; Deo, N.; Kowalik, J.S.; *Discrete Optimization with PASCAL Programs*, (Prentice Hall Inc., New Jersey, 1983).

[THAL68a] Thalwitzer, K.; *Charakterisierung eines Labyrinthes durch ein Wort über einem zweistelligen Alphabet*, in: Beiträge zur Graphentheorie, Colloq., Manebach, 1967 (Teubner, Leipzig, 1968) 157–161.

[THOM87a] Thomassen, C.; *Bidirectional Retracting-Free Double Tracings and Upper Embeddability of Graphs*, preprint.*

[TRAC63a] Trachtenbrot, B.A.; *Algorithmes et machines á caculer*, (Dunod, Paris, 1963).

[TROY66a] Troy, D.J.; *On Traversing Graphs*, Amer. Math. Monthly 73 (1966) 487–499.

[TUCK76a] Tucker, A.; *A New Applicable Proof of the Euler Circuit Theorem*, Amer. Math.

* 见 J.Combin. Theory Ser.B50-2(1990)198–207.

Montly 83 (1976) 638–640.

[TUTT41a] Tutte, W.T.; Smith. C.A.B.; *On Unicursal Paths in a Network of Degree 4*, Amer. Math. Monthly 48 (1941) 233–237.

[TUTT48a] Tutte, W.T.; *The Dissection of Equilateral Triangles into Equilateral Triangles*, Proc. Cambridge Philos Philos. Soc. 44 (1948) 463–482.

[TUTT49a] Tutte, W.T.; *On the Embedding of Linear Graphs in Surfaces*, Proc. London Math. Soc., Ser. II 51 (1949) 474–489.

[TUTT54a] Tutte, W.T.; *A Contribution to the Theory of Chromatic Polynomials*, Canad. J. Math. 6 (1954) 80–91.

[TUTT66a] Tutte, W.T.; *On the Algebraic Theory of Graph Colorings*, J. Combin. Theory 1 (1966) 15–50.

[TUTT66b] Tutte, W.T.; *Connectivity in Graphs*, Math. Expositions no.15 (Univ. of Toronto Press, 1966).

[VEST75a] Vestergaard, P.D.; *Doubly Traversed Euler Circuits*, Arch. Math. 26 (1975) 222–224.

[VICH83a] Viches, S.A.; *An Efficient Algorithm to Construct the Shortest Tour of a One-Color Connected Drawing*, Automat. Remote Control 43 (1983) no.12, 1569–1579.

[VIZI69a] Vizing, V.G.; Goldberg, M.K.; *The Length of a Circuit in a Strongly Connected Graph*, Kibernetika 5 (1969) no.1, 79–82.

[WAGN70a] Wagner, K.; *Graphentheorie*, BI-Hochschultaschenbücher, Bd. 248, Bibliograph. Inst. AG (Mannheim, 1970).

[WALT80a] Walton, P.N.; Welsh, D.J.A.; *On the Chromatic Number of Binary Matroids*, Mathematika 27 (1980) 1–9.

[+WANZ86a] Wan, Z.; Xiong, R.; Yu, M.; *On the number of cycle of short length in the de Bruijn-Good graph G_n*, Discrete Math. 62 (1986), no.1, 85–98.

[WATT79a] Watanabe, T.; Asano, T.; Saito, N.; *Upper Bounds on Lengths of Chinese Postman Walks in Undirected Graphs*, Systems-Comput.-Controls, Vol.10, No.2 (1979) 66–75.

[WEAV88a] Weaver, R.; *Tutte's Five-Flow-Conjecture for Surfaces of Large Euler Characteristic*, (Abstract), Congr. Numer. 64 (1988) 278.

[WENI89a] Wen, I.; *The number of Euler trails and Euler tours in the complete graph K_7*, J. Xinjiang Univ. Natur. Sci. 6 (1989) no.2, 17–23.

[WENG82a] Wenger, E.; *Anwendungen der Eulerschen Graphen*, (Techn. Univ. Vienna, Nov. 1982).

[WIEN73a] Wiener, C.; *Über eine Aufgabe der Geometria situs*, Math. Annalen VI (1873) 29–30.

[WHIA80a] White, A.T.; *A Note on Conservative Graphs*, J. Graph Theory, Vol.4, No.4

(1980) 423–425.

[*WILF87a] Wilf, H.S.; Yoshimura, N.A.; *Ranking rooted trees, and a graceful application*, Discrete algorithms and complexity (Kyoto, 1986), 341-349, Perspect. Comput. 15 (Academic Press, Boston, Mass., 1987).

[*XIEL84a] Xie, L.T.; Liu, G.Z.; *A survey of the Problem of Graceful Trees*, (Chinese), Qufu Shiyuan Xuebao 1 (1984) 8–15.

[+XION86a] Xiong, R.; *On homomorphisms of the de Bruijn-Good graphs*, Kexue Tongbao(English Ed.) 31 (1986), no.7, 439–442.

[XUON79a] Xuong, N.H.; *How to Determine the Maxinmum Genus of a Graph*, J. Combin. Theory Ser. B 26 (1979) 217–225.

[YOUN83a] Younger, D.H.; *Integer Flows*, J. Graph Theory 7 (1983) 349–357.

[ZALE85a] Zalesskii, A.E.; *Assymmetric Analog of the Amitsur-Levitzki Theorem*, VestsīAkad. Navuk BSSR, no.2, Ser. Fīz. Mat. 128 (1985) no.16, 108–110.

[ZEIL85a] Zeilberger, D.; *A Combinatorial Approach to Matrix Algebra*, Discrete Math. 56 (1985), no.1, 61–72.

[ZHAF86b] Zhang, F.J.; Xiaofeng, G.; *Hamiltonian cycles in perfect matching graphs*, (Chinese. English summary) J. Xinjiang Univ. Nat. Sci 3 (1986), no.4, 10–16.

[ZHAF87a] Zhang, F.J.; Guo, X.F.; *Hamiltonian cycles in directed Euler tour graphs*, Discrete Math. 64 (1987), no.2-3, 289–298.

[+ZHAF88a] Zhang, F.J.; Lin, G.N.; *A note on strong homomorphisms of de Bruijn-Good graphs*, (Chinese. English summary) J. Xinjiang Univ. Natur. Sci. 5 (1988), no.4, 113–115.

[*ZHAO86a] Zhao, S.L.; *Double isomorphic graceful trees are graceful stringing trees*, (Chinese. English summary), Qufu Shifan Daxue Xuebao. Ziran Kexue Ban 1986, no.2, 54–55.

[ZÝKA88a] Zýka O.; *Nowhere-Zero 30-flow on Bidirected Graphs*, preprint.

对第一卷的更正和补录[①]

自本专著第一部分第一卷出版以来，很多同事发现了一些语法、概念、结论上的错误，而且随着时间的推移，一些文献已正式出版. 因此，我借此机会更正错误并更新参考文献. 本专著的第二部分将 (以趋近于 1 的概率) 包含一个附录对第一部分这两卷进行勘误和补注.

首先勘误. 虽然我所学过的是拉丁方 (Latin) 而不是拉丁语 (latin) (p.II.1)，对莎士比亚的引用 (p.III.73) 还是应为“是 P 还是 NPC……”(我忘了字母 C—— 这的确是一个很不该有的错误). 第 3 章的另一个错误与库达引理 (引理 3.40，p.III.39) 的优先性有关. P.A. Catlin 和 Charles J. Colbourn 提醒我注意 V.P. Polesskii 的文章 [POLE71a]，那里引用了 Polesskii Russian 于 1970 年发表的引理 3.40. 由于没有找到原始文献，我在此仅引用 [POLE71a]，并从此以后将引理 3.40 称为 Polesskii-Kundu 引理[②]. 我还忘了定义 E^* 和 A^*，它们分别表示一个 (混合) (有向) 图 H 的半边集合和半弧集合 (见 p.III.41 第 16 行). 显然，$E^* := \bigcup_{v\in V(H)} E_v^*$，$A^* := \bigcup_{v\in V(H)} A_v^*$.

一个更恼人的错误发生在 p.VI.146，在那里，我 (错误地) 声称 [NISH83a] 中证明了对平面三角剖分，哈密顿圈的问题可以在 $O(p^2)$ 时间内解决. 事实是，这个 $O(p^2)$ 算法可以找到一个 $V(G)$- 覆盖迹，其长度至多为 $3(p-3)/2$，而该问题对该类图是 NP- 完备的. 我要谢谢 Takao Nishizeki，是他向我指出了这个错误，他还指出 p.A.3 中文献 [CHIB84a] 混淆了姓和名. 这篇文献的作者应该是 N. Chiba，T. Yamanouchi 和 T. Nishizeki.

下一个更正与第 7 章有关. 这些错误是由 Emanuel Wenger 指出的. 事实上，在引理 7.22 的叙述中 (p.VII.41)，等式 $\kappa_a = \kappa'\kappa''$ 应为 $\kappa_a = \kappa''\kappa'$；p.VII.42(*) 中的指标 S 应为 s；p.VII.43 页第 2 行的 “exists” 应为 “exist”；p.VII.44 最后一句中的 “intested reader” 应为 “interested reader”；p.VII.18 第 19 行，$X^*_{T_{j,k}}$ 应为 $X_{T^*_{j,k}}$；p.VII.19 第 9 行 $\{e_3', e_1'\}$ 应为 $\{\{e_3', e_1'\}\}$. 此外，尽管以下这句话是正确的：“κ- 变换在有向图的欧拉迹的转换中不是一个足够通用的工具” (见 p.VII.45 第一段)，应指出的是：片段逆，因而 κ- 变换，不能用类似于图的情形的方法定

① 第一卷是第 1~7 章.

② C.J. Colbourn 早于 1989 年 11 月就提醒我注意这个问题了，那时我们在滑铁卢大学相遇，但是他当时未能立即回想起 Polesskii 的文章. 他于 1990 年 1 月 2 日写的信没有及时到我手中，因此，第一卷中没有考虑到这个问题. 为了保持本专著第一部分的一致性，我决定在第二部分中再改引理 3.40 的名字. 最后，我要感谢 N.S. Merzlyakov，Moscow(USSR)，他在我完成本卷之前寄了 [POLE71a] 的俄文版给我.

义在有向图上. 类似的不确切出现在应用 κ- 变换于有 $2k > 2$ 个奇度点的图的迹分解中 (p.VII.9 第一页). 以上两个问题的叙述不当，源于我忽略了一个基本事实：设 T 是 G 的迹分解 S 的一个元素，若应用 κ- 变换于 T，则新迹 T' 必然满足 $E(T) = E(T')$，因而 T 和 T' 连接 G 的相同的奇度点. 因此，若 S^* 是由 S 经一系列 κ- 变换 (或片段逆) 得到的，则 S^* 定义了 $E(G)$ 的相同的划分和 G 的奇度点的相同的配对. 于是除非确定了要考虑 $\mathcal{P}(G,\kappa)$ 的图 G 的范围，以上两个问题的答案是否定的.

最后，在紧接着定理 7.28 叙述之后的讨论中 (p.VII.52 和 p.VII.53)，我没有明确指出：一个满足 $\Delta(G) = 4$ 的平面欧拉图 G，只要 G 有至少三个 A- 迹，就有 $G(\mathcal{T}_A(G),\kappa_A)$ 是边–哈密顿的. 这一事实可由定理 7.74 和 Cummins 的结果直接得出. Cummin 的结果说：一个至少有三个支撑树的图的树图是边–哈密顿的. 注意一个类似于定理 7.28 的结果对有向图同样成立 [ZHAF87a]，其基础变换是 τ- 变换 (见定义 7.25 和定理 7.27). 我在 p.VII.52 提到了这一点，但因为那时没有文章 [ZHAF87a]，故未能明确指出用的是哪种变换. 作者还证明了类似结果，对完美匹配的集合也成立. 那里的变换被定义为 L- 交错圈的 "旋转"(在 L- 交错圈中，1- 因子 L 中的某些边与不在 L 中的边交错出现) [ZHAF86b]. 然而，这一结果早在 [NADD81a，NADD84a] 中就已经 (用不同的方法) 证明了. 最后，文章 [LIXU88a] 建立了 $G(\mathcal{T},\kappa)$ 的连通度的公式.

我想添加些与第 4~6 章所讨论的问题相关的文献. 首先，定理 4.5，定理 4.7 及一些推论在 [FLEI89b] 中已发表. 定理 6.35 在 [FLEI89c] 中被证明，其证明不依赖于定理 6.33 和定理 6.34，因而可以容易地以更一般的定理中得出. 用欧拉迹以特定的序通过特定边的问题 (见 p.VI.34 的第一段) 在有向图情况已在 [POLJ90a] 中讨论. K_{2n} 的完美 1- 因子分解的论题 (即在此 1- 因子分解中任两个 1- 因子的并为一个哈密顿圈) 和两两相容欧拉迹有关 (见 p.VI.48)，在 [DINI89a，IHRI87a，KOBA89a，SEAH89a] 中已有讨论. 一个在 4- 连通可平图中的哈密顿圈的 $O(p)$ 算法发表在 [CHIB89a]. .

本附录最后给出第一卷出版时尚未发表的一些文献的完整出处，因而 [FLEI86a] 现为 [FLEI90c]，[GROP89a] 现为 [GROP90a]，而 [HARB89a] 保持不变，[READ86a] 变为 [READ87a].

人名译名表

A

Amitsur　爱米秀
Ariadne　阿雷顿
Avondo-Bodino　爱冯多-鲍狄奴

B

Barnett　巴尼特
Batagelj　巴塔卡尔
Bellman　贝尔曼
Bely　贝利
Berman　博曼
Bertossi　伯托西
Borchardt　鲍尔查特
Bott　鲍特
Bouchet　鲍奇多
Broucher　布鲁卡

C

Carey　加瑞
Carlsruhe　卡尔斯卢
Catlin　凯特林
Celmins　赛尔明斯
Chiba　迟巴
Cook　库克

D

de Bruijn　狄·布鲁斯
Der Kneiphof　德·耐夫宾
Dijkstra　迪拉斯特拉
Dirac　狄拉克
Döpp　道普
Dynkin　邓肯

E

Edminds　埃得蒙斯
Ehrenfest　埃伦费斯特
Ellingham　埃林厄姆
Even　埃奋

F

Fleury　佛莱瑞
Ford　福特
Fouquet　福格特
Fraenkel　弗伦科
Frobenicus　弗罗奔尼斯
Fulkerson　富克森

G

Garey　加瑞
Georges　乔治斯
Gerads　杰拉德
Good　古德
Goodey　古迪斯
Goulden　高尔顿
Gropp　格罗普

H

Hadamard　阿达马
Hall　霍尔
Hararry　哈拉里
Hasse　哈塞
Heywood　希伍德
Hieholzer　赫拉兹
Hill　希尔
Hilton　希尔顿
Hitchcook　希奇柯克
Hoang thuy　黄堆
Hoffman　霍夫曼
Hopcroft　浩普克罗特
Horton　霍顿

Husimi　休西米
Hutchinson　哈钦森

J

Jaeger　耶格
Jackson　杰克逊
Jangermann　简杰曼
Jävinen　加维南
Johnson　约翰逊
Jordan　若尔当

K

Kalnza　卡鲁兹
Kagnal　凯格纳
Kasteleyn　卡斯它林
Kel'mans　卡尔门斯
Khelladi　克海拉蒂
Kilpatrick　基尔帕特里克
Kirchhoff　基尔霍夫
König　寇尼格
Kostant　科斯坦特
Kotzig　科特齐格
Kronrod　克伦罗德
Kundu　库达
Kuratowski　库拉托夫斯基

L

Las Vergas　拉斯卫格纳斯
Leibniz　莱布尼茨
Levitzki　莱维茨基
Liebling　利波林
Liskovec　李斯考维茨
Listing　李斯庭
Liu Jiannong　刘建农
Lovasz　罗瓦兹
Lucas　卢克斯

M

Maller　马勒
Martin　马丁
Mayberry　美柏里
McKay　姆凯
Mckee　麦哲
Menger　门格尔
Meyniel　米内
Minieka　米尼卡
Moon　睦恩
Moore　穆尔

N

Nash-Williams　纳什威廉姆斯
Nishizeki　尼什克

O

Ore　奥锐
Oswald Veblen　奥斯瓦德・外伯伦
Owen　奥温

P

Palmer　帕尔姆
Petersen　彼特森
Plummer　普卢默
Pisanski　皮山斯基
Prussia　普鲁士
Pulleyblank　普里布兰克

Q

Quenuille　琨纽尔

R

Rademacher　拉德马赫
Read　里德
Regner　瑞格尼尔
Reitlerer　雷特尔
Rosa　罗莎
Rosenstiehl　洛林斯蒂尔
Rowen　罗文

Rüroth 卢罗特

S

Sabdnss 撒比达斯
Saint-Quentin 塞思特–昆迁
Sank 山克
Schmidt 施密特
Schüzenherger 苏尊柏格
Sebö 塞宝
Serdjukov 塞德佳科瓦
Seymour 西蒙
Skileon 斯凯尔顿
Smith 史密斯
Sorokin 索罗钦
Steinitz 斯坦尼兹
Swart 斯瓦特
Swan 斯万

T

Tait 泰特
Tarjan 塔加
Tarry 塔里
Theseus 提修斯
Thomassen 汤姆森
Tihany 提安尼
Toida 陶达
Trachtenbrot 特洛奇坦布洛特
Trémaux 特雷马克斯
Troy 特罗伊
Tucker 塔克
Turgeon 特乔昂
Tutte 塔特

U

Ullman 乌尔曼

V

Veblen 外伯伦
Viches 维奇斯

W

Wagner 瓦格纳
Walton 沃尔顿
Weaver 威沃
Welsh 外尔什
Wenger 文格尔
Whitney 惠特尼
Wiener 维纳
Wormald 娥冒德

X

Xuong 雄

Y

Younger 杨格
Youngers 杨斯

Z

Zijka 兹卡

《现代数学译丛》已出版书目

(按出版时间排序)

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007.12 〔德〕Andreas Enge 著 吴 铤 董军武 王明强 译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008.1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译
3 现代非参数统计 2008.5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译
4 最优化问题的扰动分析 2008.6 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译
5 统计学完全教程 2008.6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译
6 应用偏微分方程 2008.7 〔英〕John Ockendon, Sam Howison, Andrew Lacey & Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译
7 有向图的理论、算法及其应用 2009.1 〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷 著 姚兵 张忠辅 译
8 微分方程的对称与积分方法 2009.1〔加〕乔治 W. 布卢曼 斯蒂芬 C. 安科 著 闫振亚 译
9 动力系统入门教程及最新发展概述 2009.8 〔美〕Boris Hasselblatt & Anatole Katok 著 朱玉峻 郑宏文 张金莲 阎欣华 译 胡虎翼 校
10 调和分析基础教程 2009.10 〔德〕Anton Deitmar 著 丁勇 译
11 应用分支理论基础 2009.12 〔俄〕尤里·阿·库兹涅佐夫 著 金成桴 译
12 多尺度计算方法——均匀化及平均化 2010.6 Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著 郑健龙 李友云 钱国平 译
13 最优可靠性设计：基础与应用 2011.3 〔美〕Way Kuo, V. Rajendra Prasad, Frank A.Tillman, Ching-Lai Hwang 著 郭进利 闫春宁 译 史定华 校
14 非线性最优化基础 2011.4 〔日〕Masao Fukushima 著 林贵华 译
15 图像处理与分析：变分，PDE，小波及随机方法 2011.6 Tony F. Chan, Jianhong (Jackie) Shen 著 陈文斌，程晋 译
16 马氏过程 2011.6 〔日〕福岛正俊 竹田雅好 著 何萍 译 应坚刚 校

17 合作博弈理论模型 2011.7 〔罗〕Rodica Branzei 〔德〕Dinko Dimitrov 〔荷〕Stef Tijs 著 刘小冬 刘九强 译

18 变分分析与广义微分 I：基础理论 2011.9 〔美〕Boris S. Mordukhovich 著 赵亚莉 王炳武 钱伟懿 译

19 随机微分方程导论与应用(第 6 版) 2012.4 〔挪〕Bernt Øksendal 著 刘金山 吴付科 译

20 金融衍生产品的数学模型 2012.4 郭宇权(Yue-Kuen Kwok) 著 张寄洲 边保军 徐承龙 等 译

21 欧拉图与相关专题 2012.4 〔英〕Herbert Fleischner 著 孙志人 李皓 刘桂真 刘振宏 束金龙 译 张昭 黄晓晖 审校

(O-4700.0101)

www.sciencep.com



科学出版中心　数理分社
电话：(010)64033664
E-mail: math-phy@mail.sciencep.com
网址：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

定 价：98.00 元